# FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

## I. PROBABILITÉS

Si $A$ et $B$ sont incompatibles : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Dans le cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A) \quad ; \quad P(\Omega) = 1 \quad ; \quad P(\emptyset) = 0$

Dans le cas équiprobable : $P(A) = \dfrac{\text{Nombres d'éléments de } A}{\text{Nombres d'éléments de } \Omega}$

*Variable aléatoire*

Fonction de répartition : $F(x) = P(X \leq x)$

Espérance mathématiques : $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$

Variance : $V(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right) 2 = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i 2 - \left(E(X)\right) 2$

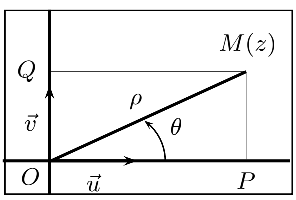
Écart type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

## II. ALGÈBRE

### A. *Nombres complexes*

Forme algébrique : $z = x + iy$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}, \rho > 0$




$\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

$\overline{OP} = x = \Re(z) = \rho\cos\theta$

$\overline{OQ} = y = \Im(z) = \rho\sin\theta$

$OM = \rho = |z| = \sqrt{x2 + y2}$

*Opérations algébriques*

$z + z' = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y')$

$zz' = (x + iy)(x' + iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

*Conjugué*

$z = x + iy = \rho e^{i\theta} \quad ; \quad \overline{z} = x - iy = \rho e^{-i\theta}$

$x = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z}) \quad ; \quad y = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'} \quad ; \quad \overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

$z\overline{z'} = x^2 + y^2 = |z|^2$

$\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + i\dfrac{-y}{x^2 + y^2} = \dfrac{1}{\rho}e^{-i\theta}$

*Module et argument d'un produit, d'un quotient*

$zz' = \left(\rho e^{i\theta}\right)\left(\rho' e^{i\theta'}\right) = \rho\rho' e^{i(\theta + \theta')}$

$|zz'| = |z||z'|$

$\dfrac{z}{z'} = \dfrac{\rho e^{i\theta}}{\rho' e^{i\theta'}} = \dfrac{\rho}{\rho'}e^{i(\theta - \theta')}$

$\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}, \, n \in \mathbb{Z}$

*Inégalité triangulaire*

$||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$

### B. Identités remarquables

(valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

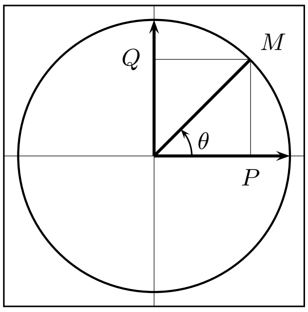
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad ; \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \quad ; \quad a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$

## C. *Trigonométrie*




$\overline{OP} = \cos\theta$

$\overline{OQ} = \sin\theta$

$\cos 2\theta + \sin 2\theta = 1$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ , $\theta \neq \dfrac{\pi}{2} 2k\pi$

*Valeurs remarquables*

| | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| sin | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ |
| cos | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ |
| tan | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | | $0$ |

*Formules d'Euler*

$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$ , $\sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

*Formules d'addition*

$e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin 2a = 2\cos 2a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2a)$ ; $\sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

*Formules de Moivre*

Pour tout entier naturel non nul $n$, $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$

soit encore $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

## D. *Équations du second degré*

Soient $a$, $b$, $c$ des nombres réels, $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$.

l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :

- si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- si $\Delta = 0$, une solution réelle double :

$$z_1 = z_2 = \frac{-b}{2a}$$

- si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a\left(z - z_1\right)\left(z - z_2\right)$.

$z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ , $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

## E. Suites arithmétiques, suites géométriques

*Suites arithmétiques*

Premier terme $u_0$ ; $u_{n+1} = u_n + a$ ; $u_n = u_0 + na$

$1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

*Suites géométriques*

Premier terme $u_0$ ; $u_{n+1} = bu_n$ ; $u_n = u_0 b^n$

Si $b \neq 1$, $S_n = 1 + b + b2 + \cdots + b^n = \dfrac{1 - b^{n+1}}{1 - b}$

Si $b = 1$, $S_n = n + 1$

# III. ANALYSE

## A. Propriétés algébriques des fonctions usuelles

1. **Fonctions logarithme et exponentielle**

$\ln 1 = 0$

$\ln e = 1$

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$

$\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Si $x \in ]-\infty\ ;\ +\infty[$ et $y \in ]\,0\ ;\ +\infty[$,
$y = \exp x = e^x$ équivaut à $x = \ln y$

$e^0 = 1$

$e^{a+b} = e^a e^b$

$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$

$a^x = e^{x \ln a} \quad (a > 0)$

$(e^a)^b = e^{ab}$

$\ln a^x = x \ln a$

2. **Fonctions puissances**

$x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0)$

$x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$

$x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$

$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Si $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in [\,0; +\infty[$ et $y \in [\,0; +\infty[$

$y = \sqrt[n]{x}$ équivaut à $x = y^n$

## B. *Limites usuelles des fonctions*

1. **Fonctions**

*Comportement à l'infini*

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$ et si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$

*Croissances comparées à l'infini*

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$

*Comportement à l'origine*

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0$ et si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = +\infty$

*Comportement à l'origine de* $\ln(1+x)$, $e^x$, $\sin x$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$

$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h} = 1$

2. **Suites (SÉRIES STI, spécialités génie électronique et génie électrotechnique)**

Si $k > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$ ; Si $0 < k < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = 0$

## C. *Dérivées et primitives* ***(Les formules ci-dessous peuvent servir à la fois pour calculer des dérivées et des primitives)***

### 1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles

| $f(x)$ | $f'(x)$ | *Intervalle de validité* |
|---|---|---|
| $k$ | $0$ | $]-\infty,+\infty[$ |
| $x$ | $1$ | $]-\infty,+\infty[$ |
| $x^n$, $n \in \mathbb{N}^*$ | $nx^{n-1}$ | $]-\infty,+\infty[$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x2}$ | $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ |
| $\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}^*$ | $-\frac{n}{x^{n+1}}$ | $]-\infty,0[$ ou $]0,+\infty[$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0,+\infty[$ |
| $x^\alpha$ , $\alpha \in \mathbb{R}$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ | $]0,+\infty[$ |
| $\ln x$ | $\frac{1}{x}$ | $]0,+\infty[$ |
| $e^x$ | $e^x$ | $]-\infty,+\infty[$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $]-\infty,+\infty[$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $]-\infty,+\infty[$ |

### 2. Opérations sur les dérivées

$(u+v)' = u' + v'$

$(ku)' = k\,u'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u2}$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v2}$

$(v \circ u)' = (v' \circ u)u'$

$(e^u)' = e^u u'$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, $u$ à valeurs strictement positives

$(u^\alpha)' = nu^{\alpha-1}u'$

## D. *Calcul intégral*

Si $F$ est une primitive de $f$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$

*Formule de Chasles*

$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t$

$\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

*Linéarité*

$\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

*Positivité*

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$

*Intégration d'une inégalité*

Si $a \leq b$ et $f \leq g$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq M(b-a)$

*Valeur moyenne* de $f$ sur $[a,b]$ : $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

## E. *Équations différentielles*

| Équations | Solutions sur intervalle $]-\infty,+\infty[$ |
|---|---|
| $y' - ay = 0$ | $f(x) = ke^{ax}$ |
| $y'' + \omega^2 y = 0$ | $f(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x$ |