Formulaire algèbre

Priorité des opérations

1) Parenthèses
2) Exposants et racines
3) Produits et divisions, de gauche à droite
4) Addition et soustractions, de gauche à droite

Propriétés des opérations élémentaires

$A+B=B+A$ (Commutativité de $+$)

$A+(B+C)=(A+B)+C$ (Associativité de $+$)

$0+A=A+0=A$ (0 est neutre pour $+$)

$A+(-A)=(-A)+A=0$ (inverse pour $+$)

$AB=BA$ (Commutativité $\times$)

$0A=A0=0$ (0 est absorbant pour $\times$)

$1A=A1=A$ (1 est neutre pour $\times$)

$A(B+C)=AB+AC$ (distributivité de $\times$ sur $+$)

$AB=0 \implies A=0$ ou $B=0$ (produit nul)

Propriété des quotients

$A\frac{1}{A}=\frac{1}{A}A=1$ (définition inverse)

$\frac{1}{A}$ non défini pour $A=0$ (division par zéro)

$A\frac{1}{B}=\frac{A}{B}=\frac{1}{B}A$ (inverse général)

$\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \iff AD=BC$ (égalité de quotients)

$\frac{A}{B}=0 \iff A=0$ et $B\neq 0$ (quotient nul)

$\frac{1}{1/A}=A$ (inverse de l'inverse)

$\frac{AC}{BC}=\frac{A}{B}$ (simplification facteur commun)

$\frac{A}{B}+\frac{C}{B}=\frac{A+C}{B}$ (somme, même déno.)

$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD+CB}{BD}$ (somme, déno. commun)

$\frac{A}{B}\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}$ (produit de quotients)

$\frac{A/B}{C/D}=\frac{A}{B}\frac{D}{C}$ (division de quotients)

Puissances et racines

$A^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{A\cdot A\cdots A\cdot A}_{n \text{ fois}}$ (définition)

$A^nA^m=A^{n+m}$ (produit de puissances)

$(A^n)^m=A^{nm}$ (puissance de puissance)

$A^0=1$ (exposant zéro)

$A^{-n}=\frac{1}{A^n}$ (inverse de puissance)

$\sqrt[n]{A}$ est défini si n impair, ou si n pair et $A\geq 0$

$A^{1/n}=\sqrt[n]{A}$ (puissance fractionnairie)

$(AB)^n=A^nB^n$ (puissance d'un produit)

$\sqrt[n]{AB}=\sqrt[n]{A}\sqrt[n]{B}$ (racine d'un produit)

$\left(\frac{A}{B}\right)^n=\frac{A^n}{B^n}$ (puissance d'un quotient)

$\sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$ (racine d'un quotient)

$\sqrt[n]{A}=A$ si $A\geq 0$ $\qquad \sqrt[n]{A^n}=\begin{cases}|A| & \text{si } n \text{ pair}\\ A & \text{si } n \text{ impair}\end{cases}$

Exposants et logarithmes

$\log_b(A)=B \iff b^B=A$ (définition de logarithme)

$\log_b(b^A)=A$ (logarithme d'une puissance)

$b^{\log_b(A)}=A$ (puissance du logarithme)

$\log_b(1)=0$ (logarithme de l'unité est zéro)

$\log_b(AB)=\log_b(A)+\log_b(B)$ (logarithme d'un produit)

$\log_b\left(\frac{A}{B}\right)=\log_b(A)-\log_b(B)$ (logarithme d'un quotient)

$\log_b\left(A^B\right)=B\log_b(A)$ (logarithme d'une puissance)

$\log_b(A)=\frac{\log_c(A)}{\log_c(b)}$ (changement de base)

Identités algébriques fréquemment utilisées

$AB+AC=A(B+C)$ (mise en évidence simple)

$AC+AD+BC+BD=(A+B)(C+D)$ (mise en évidence double)

$\frac{A}{\sqrt{B}}=\frac{A\sqrt{B}}{B}$ (rationalisation)

$A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ (différence de carrés)

$\left(\sqrt{A}\pm\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}\mp\sqrt{B}\right)=A-B$ (conjugué)

$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)$ (différence de cubes)

$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ (binôme carré parfait)

$(A+B)^3=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$ (développement du binôme degré 3)

$(A+B)^4=A^4+4A^3B+6A^2B^2+4AB^3+B^4$ (développement du binôme degré 4)

Coefficients du développement d'un binôme de degré quelconque :

Triangle de Pascal

$$
\begin{array}{lccccccccccccc}
(A+B)^0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
(A+B)^1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
(A+B)^2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
(A+B)^3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
(A+B)^4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
(A+B)^5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
(A+B)^6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\vdots & & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}
$$

Résolution d'équations

Principes généraux

Transitivité $A = B$ et $B = C$ alors $A = C$.

Application d'une opération Si $f(x)$ est une opération (fonction), on a que

$$A = B \implies f(A) = f(B).$$

Si f est une opération inversible, alors $A = B \iff f(A) = f(B)$. Si $f^{-1}(x)$ est l'opération inverse de $f(x)$, alors

$$f(A) = B \iff A = f^{-1}(B).$$

Substitution si $A(x) = B(x)$ alors $A(C) = B(C)$, où C est une expression algébrique quelconque substituée à la place de la variable x.

Autres principes fréquemment utilisés

$\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0$ et $B \neq 0$

$\frac{A}{B} = 0 \iff A = 0$ et $B \neq 0$

$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC$ et $B, D \neq 0$

Opérations inverses usuelles

$A + C = B \iff A = B - C$

$CA = B \iff A = \frac{1}{C}B$ si $C \neq 0$.

$A^n = B \iff A = \pm\sqrt[n]{B}$ si n pair.

$A^n = B \iff A = \sqrt[n]{B}$ si n impair.

$b^A = B \iff \log_b(B) = A$ si $b > 0$.

$\sin(A) = B \iff A = \arcsin(B)$ si $-\frac{\pi}{2} \leq A \leq \frac{\pi}{2}$

$\cos(A) = B \iff A = \arccos(B)$ si $0 \leq A \leq \pi$

$\tan(A) = B \iff A = \arctan(B)$ si $-\frac{\pi}{2} < A < \frac{\pi}{2}$

Zéros de polynômes

Forme factorisée

Un polynôme factorisé comme

$$P(x) = c(x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_n)$$

a comme zéros $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Division polynômiale avec reste

Soit $P(x)$ et $D(x)$ des polynômes en x. On peut toujours trouver des polynômes $Q(x)$ (le quotient) et $R(x)$ (le reste), avec $\deg(R(x)) < \deg(Q(x))$ tels que

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

On peut écrire sous forme fractionnaire :

$$\frac{P(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}.$$

Exemple

$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - x^2 + 3x - 4 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
x^3 - x & x - 1 \text{ reste } 4x - 5 \\ \cline{1-1}
-x^2 + 4x - 4 & \\
-x^2 + 1 & \\ \cline{1-1}
4x - 5 &
\end{array}
$$

$$x^3 - x^2 + 3x - 4 = (x - 1)(x^2 - 1) + (4x - 5)$$

$$\frac{x^3 - x^2 + 3x - 4}{x - 1} = (x^2 - 1) + \frac{4x - 5}{x - 1}$$

Équations quadratiques

Formule quadratique :

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Identités utiles pour le passage entre les différentes formes d'une équation quadratique :

Si u et v sont les zéros du polynôme $ax^2 + bx + c$,
on a que $ax^2 + bx + c = a(x - u)(x - v)$

$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$
(Factorisation produit-somme)

$A^2 + 2bA = A^2 + 2bA + b^2 - b^2 = (A + b)^2 - b^2$
(Complétion de carrés)

Théorèmes de factorisation

Théorème 1. *Soit $P(x)$ un polynôme. La valeur a est un zéro de $P(x)$ si et seulement si $(x - a)$ est un facteur de $P(x)$:*

$$P(a) = 0 \iff P(x) = (x - a)Q(x).$$

Théorème 2. *Les polynômes réels irréductibles sont de l'une des deux formes suivantes :*

degré 1 de la forme $c(x - a)$ (a est nécessairement un zéro)

degré 2 de la forme $ax^2 + bx + c$, où $b^2 - 4ac < 0$. (polynôme de degré deux sans zéros).

Théorème 3 (Théorème fondamental de l'algèbre)**.** *Tout polynôme réel peut s'écrire comme un produit d'une constante et de polynômes irréductibles, unique à l'ordre des facteurs près.*