REMARQUES SUR LA NOTION DE LA PERFECTION

YOSIHISA IZUMI

(Received June 24, 1952)

Le but de cette note est de montrer quelques propriétés concernant la perfection forte, la perfection faible et l'Entscheidbarkeit. Les définitions de cettes notions ont été données par Hilbert-Ackermann[1], mais en utilisant certains des notations métalogiques de Tarski[2] nous les exprimerons comme suit.

Désignons par S un ensemble qui contient toutes les propositions variables $a, b, c, \ldots, x, y, z$, et qui est fermé concernant les opérations $\vee$, $.$, $-$, $\rightarrow$, et par $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ les sous-ensembles de S, et par $Fl(A)$ un produit de tous les ensembles qui contiennent A et qui sont fermés concernant les règles de substitution et de modus ponens. A partir de ceux-là, on définit la non-contradiction de A (que nous considérons dans tout le cours de cette note comme un système d'axiomes) par la formule

$$\overline{A \rightarrow a.\overline{a}},$$

ou

$$A \nrightarrow a.\overline{a}, \qquad \text{Df 1}$$

et la perfection forte de A par la formule

$$(x)[x \in S.\, x \overline{\in} Fl(A) \rightarrow (\{A, x\} \rightarrow a.\overline{a})]^{3)}, \qquad \text{Df 2}$$

et de plus, l'Entscheidbarkeit de A par la formule

$$(x)(\exists Y)[x \in S \rightarrow Y \subset Fl(A).(\{Y, x\} \nrightarrow a.\overline{a}) \vee (\{Y, x\} \rightarrow a.\overline{a})]. \qquad \text{Df 3}$$

La lettre B_i suivie d'un indice étant un produit de tous les ensembles qui contiennent toutes les formules satisfaisant la matrice $\mathfrak{M}$ à i valeurs, on définit la perfection faible de A par la formule

$$(x)[B_i \subset S.\, x \in B_i.\, A \subset B_i \rightarrow x \in Fl(A)] \quad 1 \leqslant i \leqslant \aleph_0. \qquad \text{Df 4}$$

THÉORÈME 1. *Si A est contradictoire, A est fortement partfait.*

DÉMONSTRATION. D'après la Df 1, on a

$$A \rightarrow a.\overline{a}.$$

On en déduit

$$\{A, b\} \rightarrow a.\overline{a},$$

d'où l'on obtient

$$b \in S.\, b \overline{\in} Fl(A).\, \{A, b\} \rightarrow a.\overline{a},$$

d'où l'on conclut

$$(x)[x \in S.\, x \overline{\in} Fl(A) \rightarrow (\{A, x\} \rightarrow a.\overline{a})]. \qquad \text{Q.E.D.}$$

Supposons dans ce qui suit que A ne soit pas contradictoire.

THÉORÈME 2. *Si A est fortement parfait, A est faiblement parfait.*

DEMONSTRATION. De la Df 2, on a

$$(x)[B_i \subset S. x \in B_i. x \overline{\in} Fl(A) \rightarrow (\{A, x\} \rightarrow a.\bar{a})],$$

c.-à-d.

$$(x)[B_i \subset S. x \in B_i. (\{A, x\} \nrightarrow a.\bar{a}) \rightarrow x \in Fl(A)],$$

d'où l'on obtient

$$(x)[B_i \subset S. x \in B_i. A \subset B_i. (\{A, x\} \nrightarrow a.\bar{a}) \rightarrow x \in Fl(A)].$$

Puisque B_i est un produit de tous les ensembles qui contiennent toutes les formules satisfaisant la matrice $\mathfrak{M}$ à i valeurs, il vient que

$$B_i \nrightarrow a.\bar{a},$$

et par conséquent

$$b \in B_i. A \subset B_i \rightarrow (\{A, b\} \nrightarrow a.\bar{a}).$$

On obtient donc

$$(x)[B_i \subset S. x \in B_i. A \subset B_i \rightarrow x \in Fl(A)]. \qquad \text{Q.E.D.}$$

D'aprés le Théorème 2, il y a trois cas concernant la relation entre la perfection forte et la perfection faible.

2.1. A est fortement parfait et faiblement parfait. Un exemple de ce cas est le système d'axiomes du calcul des propositions de Hilbert-Ackermann.

2.2. A est fortement imparfait et faiblement parfait. Un exemple de ce cas est le système d'axiomes du calcul des propositions trivalentes de J. Lukasiwicz, tels que

L 1. $x \rightarrow (y \rightarrow x)$

L 2. $(x \rightarrow y) \rightarrow [(y \rightarrow z) \rightarrow (x \rightarrow z)]$

L 3. $[(x \rightarrow \bar{x}) \rightarrow x] \rightarrow x$

L 4. $(\bar{y} \rightarrow \bar{x}) \rightarrow (x \rightarrow y)$.

M. Wajsberg en a démontré la non-contradiction, l'indépendance et la perfection faible[4]. Pour en démontrer l'imperfection forte, nous n'avons qu'à trouver x, tel que

$$(\exists x)[x \in \mathrm{S}. x \overline{\in} Fl(A). (\{A, x\} \nrightarrow a.\bar{a})].$$

Nous prenons B_2, nous considérons L 1, L 2, L 3 et L 4 comme des formules du calcul des propositions à deux valeurs. Et nous prenons pour x la formule p

$$(\bar{x} \rightarrow x) \rightarrow x. \text{ [5]}$$

Puisque la formule p prend la valeur 2 lorsque x prend la valeur 2, on ne sait pas déduire p des formules L 1, L 2, L 3 et L 4. D'autre part L 1, L 2, L 3, L 4 et p sont des thèses du calcul des propositions à deux valeurs.

2.3. A est fortement imparfait et faiblement imparfait. On peut faire un exemple de ce cas du système d'axiomes de Hilbert-Ackermann.

THÉORÈME 3. *Si A est fortement parfait, A est entscheidbar.*

DÉMONSTRATION. De la Df 2, on a

$$(x)[x \in S \rightarrow x \in Fl(A) \vee (\{A, x\} \rightarrow a.\bar{a})].$$

D'autre part, on a, en vertu de la perfection faible de A,

$$b \in Fl(A) \sim (\{A, b\} \nrightarrow a.\bar{a}),$$

et par conséquent

$$(x)(\exists Y)[x \in S \rightarrow Y \subset Fl(A).(\{Y, x\} \nrightarrow a.\bar{a}) \vee (\{Y, x\} \rightarrow a.\bar{a})]. \qquad \text{Q.E.D.}$$

D'après le Théorème 3, il y a trois cas concernant la relation entre la perfection forte et l'Entscheidbarkeit.

3.1. A est fortement parfait et entscheidbar. Un exemple de ce cas est le système d'axiomes du calcul des propositions de Hilbert-Ackermann.

3.2. A est fortement imparfait et entscheidbar. Un exemple de ce cas est le système J d'axiomes de A. Heyting[6]. G. Genzen en a démontré l'Entscheidbarkeit[7]. Puisque la formule

$$x \vee \bar{x}$$

est indépendant de J et elle n'est pas contradictoire à J, il est évident que J est fortement imparfait.

3.3. A n'est ni fortement parfait ni entscheidbar. Un exemple de ce cas est le système H' qui se composent de trois axiomes suivants

$$H\,1. \quad x \vee x \rightarrow x$$

$$H\,2. \quad x \rightarrow x \vee y$$

$$H\,3. \quad x \vee y \rightarrow y \vee x.$$

Nous considérons $H1$, $H2$, et $H3$ comme des thèses du calcul des propositions à deux valeurs. Il est évident que H' est fortement imparfait. Pour en démontrer la non-Entscheidbarkeit, nous le comparons à le système H qui contient $H\,1$, $H\,2$, $H\,3$ et la formule

$$H\,4. \quad (x \rightarrow y) \rightarrow (z \vee x \rightarrow z \vee y).$$

H est entscheidbar, car on y peut mettre toute formule du calcul des propositions sous la forme normale conjonctive qui soit équivalente par des formules qui s'en déduisent, dans lesquelles il y a des formules suivantes

$$x \vee \bar{x}, \tag{1}$$

$$x \sim \bar{\bar{x}}. \tag{2}$$

D'autre part, on ne peut pas déduire (1) et (2) de H' ; c.-à-d. (1) et (2) sont indépendants de H' par les matrices suivantes $\mathfrak{M}1$ et $\mathfrak{M}2$.

$\mathfrak{M}$ 1

V	0	1	2	−
0	0	1	1	1
1	1	1	1	0
2	2	1	2	0

$\mathfrak{M}$ 2

V	0	1	2	−
0	0	0	1	2
1	0	1	1	0
2	0	1	1	0

(1) prend la valeur 1 par la matrice $\mathfrak{M}$ 1 lorsque x prend la valeur 2.
(2) prend la valeur 2 par la matrice $\mathfrak{M}$ 2 lorsque x prend la valeur 2.
Par conséquent, à faute de la formule (2), on ne peut pas mettre toute formule sous la forme normal conjonctive, et, à faute de la formule (1), on ne peut pas reconnaitre la vérité (ou l'identité) de toute formule mise sous la forme normale conjonctive. Donc, H' n'est pas entscheidbar.

THÉORÈME 4. *Si A est entscheidbar, A est faiblement parfait.*

DÉMONSTRATION. Désignons par $\mathfrak{P}$ la perfection faible de A, et par $\mathfrak{E}$ l'Entscheidbarkeit de A. Pour démontrer le Théorème 5, nous démontrons que $\mathfrak{E}.\overline{\mathfrak{P}}$ est absurd. Alors, nous avons $\overline{\mathfrak{E}.\overline{\mathfrak{P}}}$, c.-à-d. $\mathfrak{E}\rightarrow\mathfrak{P}$. De $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{E}\rightarrow\mathfrak{P}$ nous avons $\mathfrak{P}$.

De la Df 3 on a

$$(x)(\exists Y)[B_i \subset S.\, x \in B_i \rightarrow Y \subset Fl(A).(\{Y,x\} \nrightarrow a.\overline{a}) \vee (\{Y,x\} \rightarrow a.\overline{a})],$$

et par conséquent

$$(x)[B_i \subset S.\, x \in B_i.\, A \subset B_i \rightarrow (\exists Y)(Y \subset Fl(A).(\{Y,x\} \nrightarrow a.\overline{a}) \vee (\{Y,x\} \rightarrow a.\overline{a}))]. \tag{1}$$

D'autre part, puisque la Df 4 est déductivement équivalente à la formule

$$B_i \subset S.\, b \in B_i.\, A \subset B_i \rightarrow b \in Fl(A),$$

nous utilisons cette formule-ci pour exprimer l'imperfection faible de A:

$$B_i \subset S.\, b \in B_i.\, A \subset B_i \nrightarrow b \in Fl(A). \tag{2}$$

D'après l'hypothèse de la non-contradiction de A, on a

$$b \in Fl(A) \rightarrow (\{A,b\} \nrightarrow a.\overline{a}),$$

$$(\{A,b\} \nrightarrow a.\overline{a}) \rightarrow (\exists Y)(Y \subset Fl(A).(\{Y,b\} \nrightarrow a.\overline{a})(\{Y,b\} \rightarrow a.\overline{a})),$$

et par conséquent, on a, en tenant compte de (2),

$$(\exists x)[B_i \subset S.\, x \in B_i.\, A \subset B_i \nrightarrow (\exists Y)(Y \subset Fl(A).(\{Y,x \nrightarrow a.\overline{a}) \vee (\{Y,x\} \rightarrow a.\overline{a}))],$$

c.-à-d.

$$\overline{(x)}[B_i \subset S.\, x \in B_i.\, A \subset B_i \rightarrow (\exists Y)(Y \subset Fl(A).(\{Y,x\} \nrightarrow a.\overline{a}) \vee (\{Y,x\} \rightarrow a.\overline{a}))]. \tag{3}$$

(3) est contradictoire à (1). Q. E. D.

D'après le Théorème 4, il y a trois cas concernant la relation entre l'Entscheidbarkeit et la perfection faible.

4.1. A est entscheidbar et faiblement parfait. Un exemple de ce cas est le système d'axiomes du calcul des propositions de Hilbert-Ackermann.

4.2. A n'est pas entscheidbar, mais il est faiblement parfait. Un exemple de ce cas est le système d'axiomes du calcul des prédicats de premier ordre de Hilbert-Ackermann, dont K. Gödel a démontré la non-Entscheidbarkeit et la perfection faible.[8]

4.3. A n'est ni entscheidbar ni faiblement parfait. Un exemple de ce cas est le système H' de 3.3.

Nous avons cité le système d'axiomes du calcul des prédicats à titre d'exemple de 4.2. D'autre part S ne contient que toutes les formules du calcul des propostions. En ajoutant à S les variables individuelles, les variables prédicatives et le symbole (x) ou $(\exists x)$, on réussit à faire S' contenant toutes les formules du calcul des prédicats, dans lequel sont valables les Df 1, 2, 3, 4 et les Théorèmes 1, 2, 3, 4. Par conséquent l'exemple de 4. 2 est valable.

Nous exprimons nos plus vifs remerciements à Prof. S. Kuroda pour ses suggestions en vue d'améliorations.

REFERENCES

[1] HILBERT-ACKERMANN, Grundzüge der theoretischen. Logik, 1928, 29-33.

[2] A. TARSKI, Über einige fundamentalen Begriffe der Metamathematik, Comptes Rendus de. séances de la Soc. des Sc. et des Lettr. de Varsovie XXIII (1930), 22-29.
J. LUKASIEWICZ und A. TARSKI, Untersuchungen über den Aussagenkalkül, ibid, 30-50.
A. TARSKI, Fundamentale Begriffe der Methodologie der deduktiven Wissenschaften I, Monatsh. f. Math. u. Phys. 37(1930), 361-404.

[3] $\{a, b\}$ singifie $a.b$. En particulier, quand nous considérons $a.b$ comme une formule indivisible, nous écrivons $\{a, b\}$ au lieu d'écrire $a.b$.

[4] M WAJSBERG, Aksjomatyzacja trójwartosciowego rachunku zda'n. Comptes Rendus de s' eances de la Soc. des Sc. et des Lettr. de Varsovie. XXIIII (1931), 126-145.
M. WAJSBERG, Ein Axiomensystem des dreiwertigen Aussagenkalküls, ibid, 146-148.

[5] Cette formule a été souvent utilisée dans les buts divers. J. LUKASIEWICZ, Die Logik und das Grundlagenproblem, les Entretiens de Zurich sur les Fondements et la Méthode des Sciences Mathématiques, 1941.
ALAN ROSE, Remarque sur les notions d'indépendance et de non-contradiction, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 233, (1951), 512.

[6] A. HEYTING, Die formalen Regeln der intuitionistischen Logik und Mathematik, Sitzungsber. d. preuss. Akad. d. Wiss., phys.-math. kl. 1930, 42-65.

[7] G. GENTZEN, Untersuchungen über das logische Schliessen. Math. Zeitschr. 39(1934), 176-210 et 405-431.

[8] K. GÖDEL, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, Monatsh. f. Math. u. Phys. 38(1931), 173-198.
K. GÖDEL, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatsh. f. Math. u Phys. 37(1930), 349-360.

L'UNIVERSITÉ DE TÔHOKU, SENDAI.