Rappel mathématiques de base 2

1. Notion de variables et expression algébriques

Variable : Lettre ou symbole qui représente un nombre ou une quantité qui peut varier

Coefficient : Constante placée devant une variable

Dans l'expression $y = a^x$,

a est appelé ____________________, *x* ______________________ et *y* ______________

______.

L'expression $3x^2y$ est un monôme

L'expression $3x^2y + 5x^3y^2 - 7y$ est un ________________, car elle est composée de plusieurs monômes.

2. Règles et propriétés des exposants

1. $a^0 = 1$
2. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
3. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
4. $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$
5. $\left(a^m\right)^n$
6. $\left(ab\right)^n$
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

3. Opérations sur les expressions algébriques

Le calcul algébrique est régi par les mêmes règles que le calcul numérique. Par exemple, la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition utilisée dans l'exemple numérique suivant : $5\times(3+2)=5\times3+5\times2=25$ est valable aussi dans le calcul algébrique; ainsi on a $z(x+y)=zx+zy$.

Dans l'expression $E=2x^2y+3xy^2+xy$ tous les termes contiennent le facteur commun xy : $E=2x(xy)+3y(xy)+1(xy)$. La propriété de distributivité du calcul avec les nombres réels, applicable aussi aux expressions algébriques, nous permet d'écrire :

$$E=xy(2x+3y+1)$$

C'est ce qu'on appelle factorisation simple ou mise en évidence simple

Exemples

Développez les expressions suivantes et réduisez les résultats

$-2x(x-1)+3x(x+2)=$

$\left(x+y\right)\left(2x-3y\right)=$

Simplifiez le plus possible en utilisant la factorisation simple

$\dfrac{24x^4+12x^3-18x^2}{6x^2}=$

$\dfrac{2xy+x^2z}{4xz}=$

4. Contextes de gestion modélisés à l'aide d'expression algébrique

Le but d'une modélisation est de décrire un phénomène non seulement pour en réaliser l'optimisation, mais aussi pour une meilleure compréhension du phénomène et de son évolution.

Exemple

Une voiture, âgée de 4 ans, se vend actuellement 17 919,14 \$. Quelle était sa valeur à neuf si le prix de vente a diminué chaque année de 5 % ?

Discussion

Le problème inverse serait plus «facile» : si une voiture neuve coûte 22 000 \$ et si le prix de vente diminue chaque année de 5% quel sera le prix à la fin de la première année ?

$22\,000 - 5\%$ de $22\,000 = 22\,000 - (0{,}05 \times 22\,000) = 22\,000 \times (1 - 0{,}05)$

$= 22\,000 \times 0{,}95$

Le tableau suivant donne les prix de vente pour 4 années consécutives :

Prix à neuf	22 000
Prix après 1 an	$22\,000 \times 0{,}95 = 20\,900$
Prix après 2 ans	$20\,900 \times 0{,}95 = 19\,855$
Prix après 3 ans	$19\,855 \times 0{,}95 = 18\,862{,}25$
Prix après 4 ans	$18\,862{,}25 \times 0{,}95 = 17\,919{,}14$

On constate que, en fait,

$$17\,919{,}14 = 22\,000 \times 0{,}95 \times 0{,}95 \times 0{,}95 \times 0{,}95 = 22\,000 \times 0{,}95^4$$

Évidemment, il était difficile de « deviner » le prix à neuf (22 000 \$) dans le contexte de l'énoncé.

En algèbre, on utilise des «**variables**» pour désigner par une simple lettre des grandeurs (physiques, économiques, financières, mathématiques, etc…) dont on ne connaît pas les valeurs exactes. En fait, si l'on se résume à une simple notation (exemple : notons par x le prix à neuf de la voiture, inconnu pour le moment) le progrès est presque inexistant.

Ce qui nous permet d'aller plus loin est le fait qu'avec x, en tant que nombre réel inconnu, on peut faire des calculs comme s'il était connu! Dans notre cas :

$$x \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 \cdot 0,95 = 17919,14$$

Les calculs avec les variables réelles étant les mêmes qu'avec les nombres réels, on peut écrire :

$$x =$$

Ce qui nous permet de trouver la valeur de notre variable : $x =$

Exemple

Vous voulez vous achetez une voiture neuve dans 4 ans. Vous estimez qu'elle vous coutera 20 000$. Vous décidez donc d'économiser dès aujourd'hui. Quel montant devrez-vous placer à la banque si cette dernière vous offre un taux d'intérêt de 6% (par année) sur votre placement ?

5. <u>Équations et inéquations</u>

Pour résoudre des équations, nous utilisons les deux principes suivants

- L'opération inverse de l'addition est la ______________________________

- L'opération inverse de la multiplication est la ________________________

Exemples :

Trouvez la valeur de *x* dans les équations suivantes

a. $x+2=4$

b. $\frac{x}{2}=4$

c. $x+7=3x-5$

Une inéquation est une phrase mathématique qui possède l'un des symboles $>$, $<$, $\geq$, $\leq$. Ces symboles signifient respectivement : strictement plus grand, strictement plus petit, plus grand ou égal et plus petit ou égal.

On solutionne une inéquation à une variable en effectuant des opérations qui ne changent pas la phrase mathématique. Ainsi, ajouter ou soustraire une même quantité des deux membres de l'inéquation ou les multiplier ou les diviser par le même nombre <u>positif</u> donne une inéquation équivalente (ayant le même ensemble de solution) **mais** le fait de multiplier ou diviser les deux membres d'une inéquation par un nombre négatif **<u>change le sens de l'inéquation.</u>**

Exemple 1 :

la solution de l'inéquation $4x+3>1$ est :

$4x+3>1$

$4x>-2$ (on enlève 3 de chaque côté)

$x>-1/2$ (on divise par 4 chaque côté)

C'est-à-dire que l'inéquation est vraie pour toutes les valeurs de x supérieures à $-1/2$. La solution de l'inéquation $-4x+3>1$ est : $x<1/2$.

Exemple 2 :

Résoudre les inéquations suivantes :

a. $-4x+3>1$

b. $-3x+4<7$

c. $3x+2\leq 8x-8$

6. Factorisation

Le but est de résumer les méthodes permettant de factoriser les équations quadratiques, c'est-à-dire les équations de la forme $ax^2 + bx + c$. Autant que possible, nous éviterons d'utiliser, pour ceux qui la connaissent, la fameuse formule quadratique :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Trois méthodes nous permettront d'effectuer la factorisation de la plupart des fonctions quadratiques. Ces méthodes sont : la différence de carrés, la mise en évidence simple et la mise en évidence composée.

Différence de carrés

Il existe une forme quadratique qui permet une factorisation rapide. Lorsqu'une fonction présente la forme $x^2 - k^2$, celle-ci peut être décomposée en facteurs par la formule de différence des carrés, c'est-à-dire :

$$x^2 - k^2 = (x - k)(x + k)$$

Exemple :

$$x^2 - 9 = x^2 - 3^2 = (x - 3)(x + 3)$$

En somme, il suffit d'obtenir la racine carrée du premier terme ($\boldsymbol{x}$) et du second terme ($\boldsymbol{k}$) et de faire le produit de leur somme ($\boldsymbol{x} + \boldsymbol{k}$) avec leur différence ($\boldsymbol{x} - \boldsymbol{k}$). Le signe négatif séparant les termes x^2 et k^2 est d'une importance capitale. Par exemple, la règle présentée ci-dessus ne peut s'appliquer à $x^2 + k^2$, d'où le nom **différence** de carrés !

Exemples :

$$x^2 - 100 = x^2 - (10)^2 = (x-10)(x+10)$$

$$x^2 - 81 = x^2 - (9)^2 = (x-9)(x+9)$$

Dans les exemples précédents, nous avons choisi d'employer des valeurs qui sont des carrés parfaits. Ce critère n'est pas nécessaire en général. Par exemple, quoique 8 ne soit pas un carré parfait, sa racine est bien définie et est égale à $\sqrt{8}$.

Donc : $x^2 - 8 = x^2 - (\sqrt{8})^2 = (x+\sqrt{8})(x-\sqrt{8})$

Exemples :

$$\begin{aligned} x^2 - 3 &= x^2 - (\sqrt{3})^2 \\ &= (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 45 &= x^2 - (\sqrt{45})^2 \\ &= (x-\sqrt{45})(x+\sqrt{45}) \\ &= (x-3\sqrt{5})(x+3\sqrt{5}) \end{aligned}$$

car $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$ (Atelier de mathématiques 1)

Aussi, il est possible que le premier terme lui-même ne soit pas x^2 mais plutôt $9x^2$. Encore une fois, il n'y a pas lieu de s'inquiéter. Il suffira de trouver la racine carrée de $9x^2$ plutôt que celle de x^2 ($\sqrt{9x^2} = 3x$). En tout autre point, la méthode restera la même.

Exemples :

$$\begin{aligned} 9x^2 - 3 &= (3x)^2 - (\sqrt{3})^2 \\ &= (3x-\sqrt{3})(3x+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25x^2 - 8 &= (5x)^2 - (\sqrt{8})^2 \\ &= (5x-\sqrt{8})(5x+\sqrt{8}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - 45 &= (\sqrt{2}x)^2 - (\sqrt{45})^2 \\ &= (\sqrt{2}x-\sqrt{45})(\sqrt{2}x+\sqrt{45}) \\ &= (\sqrt{2}x-3\sqrt{5})(\sqrt{2}x+3\sqrt{5}) \end{aligned}$$

Mise en évidence simple

Il faut éviter de confondre la forme de la différence de carrés $x^2 - k^2$ avec $ax^2 - bx$. La présence d'un x dans le second terme nous permettra plutôt de procéder par mise en évidence simple. Ceci revient à factoriser tout ce qui est commun aux deux termes de l'expression, dans le cas présent, le x.

Exemple :

$$x^2 - 6x = x(x-6)$$

Nous avons mis en facteur un x puisque chacun des termes de $x^2 - 6x$ possède au moins un x. Remarquez que le produit $x(x-6)$ est bien égal à $x^2 - 6x$. Vous pouvez vous convaincre en distribuant le x à chacun des termes de l'expression $x - 6$. Vous pouvez interpréter la mise en évidence simple comme étant l'opération de séparer tous les facteurs communs aux termes d'une expression.

Exemple :

Factorisez $25x^2 - 10x$

Quels sont tous les facteurs communs à $25x^2$ et $10x$? Chacun possède au moins un x. Les coefficients 25 et 10 ont également en commun le facteur 5. Donc $5x$ constitue le plus grand commun facteur de $25x^2$ et $10x$. Si 5x est retiré de ces termes (pour être mis en évidence), que reste-t-il de $25x^2$ et $10x$? De $25x^2$, il restera $5x$. De $10x$, il restera 2. Par conséquent, $25x^2 - 10x = 5x(5x-2)$.

Exemples :

Factorisez les fonctions quadratiques suivantes par mise en évidence simple.

1. $x^2 + 12x = x(x+12)$
2. $2x^2 + 12x = 2x(x+6)$
3. $-36x^2 + 6x = 6x(-6x+1)$ ou $-6x(6x-1)$
4. $225x^2 - 45x = 15x(15x-3)$
5. $9x^4 - 16x^2 = x^2(9x^2 - 16) = x^2(3x-4)(3x+4)$

Veuillez noter que dans l'exemple 5, nous avons utilisé une mise en évidence simple suivie d'une différence de carrés… rien ne nous empêche d'utiliser ou de combiner deux méthodes de factorisation au cours d'un même problème. Il faut donc être à l'aise avec l'ensemble des méthodes que nous vous suggérons.

Mise en évidence composée

Considérons l'équation quadratique $x^2 + 5x + 6$. Il ne s'agit clairement pas d'un problème qui puisse être résolu par différence de carrés, la forme ne s'y prêtant pas. Aussi, vous constaterez qu'aucun facteur commun ne peut être mis en évidence. Modifions cette fonction quadratique un peu :

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 .$$

Vous remarquerez que nous n'avons pas triché : quoique nous ayons réécrit la fonction, sa valeur totale n'a pas changé. Sous cette nouvelle présentation, remarquez qu'une factorisation peut être effectuée aux paires de termes $(x^2 + 2x)$ et $(3x + 6)$. En effet, x est facteur commun de $x^2 + 2x$, et 3 est facteur commun de $3x + 6$. En procédant à une factorisation simple, paire par paire, nous obtenons

$$(x^2 + 2x) + (3x + 6) = x(x + 2) + 3(x + 2) .$$

Mais, là n'est pas tout ! Maintenant, de cette nouvelle expression, $(x + 2)$ est un facteur commun. Nous pouvons donc mettre $(x + 2)$ en évidence. Ainsi, de $x(x + 2)$, il restera x. De $3(x + 2)$, il restera 3. Par conséquent,

$$x(x + 2) + 3(x + 2) = (x + 2)(x + 3) .$$

Nous avons effectué trois mises en évidence consécutives afin de compléter cette factorisation, d'où le nom ***mise en évidence composée***.

Il reste un aspect de la méthode qui est inexpliqué : pourquoi réécrire x^2+5x+6 sous la forme $x^2+2x+3x+6$ plutôt que $x^2+x+4x+6$ ou $x^2+9x-4x+6$? Voici donc le processus permettant de découvrir de quelle façon séparer le terme central :

Soit ax^2+bx+c, une fonction quadratique telle que $b \neq 0$ et $c \neq 0$. Il faut séparer le terme bx afin d'obtenir la factorisation complète. Pour ce faire, nous devons trouver deux nombres, m et n, tels que :

le produit : $m \cdot n = a \cdot c$ la somme : $m+n=b$

Une fois les nombres m et n trouvés, il faut remplacer l'expression ax^2+bx+c par $ax^2+mx+nx+c$ et procéder à une factorisation par mise en évidence composée.

Exemple :

Factorisez la fonction quadratique x^2+5x+6.

Solution :

Les coefficients sont respectivement

$a=1$

$b=5$

$c=6$

Séparons d'abord en deux parties le terme central, $5x$. Pour ce faire, il nous faut trouver deux nombres, m et n, tels que

- le produit $m \cdot n = a \cdot c = (1)(6) = 6$
- la somme $m+n=b=5$

Quels sont les deux nombres dont le produit est 6 et la somme est 5 ? Par tâtonnement, vous trouverez que $m = 2$ et $n = 3$. Nous utilisons ces deux nombres pour substituer $5x$ par $2x + 3x$. Nous pouvons alors poursuivre par mise en évidence composée :

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= x^2 + 2x + 3x + 6 \\ &= x(x+2) + 3(x+2) \\ &= (x+2)(x+3) \end{aligned}$$

Exemple :

Factorisez la fonction quadratique $6x^2 - 17x + 12$.

Solution :

Les coefficients sont respectivement

$a = 6$

$b = -17$

$c = 12$

Nous devons d'abord séparer en deux parties le terme central, $-17x$. Pour ce faire, il nous faut trouver deux nombres, m et n, tels que

- le produit $m \cdot n = a \cdot c = (6)(12) = 72$
- la somme $m + n = b = -17$

Quels sont les deux nombres dont le produit est 72 et la somme est -17 ? Nous trouvons, par essais et erreurs, $m = -8$ et $n = -9$. Notez bien que les signes négatifs importent beaucoup puisque nous voulons bien une somme de -17. Nous utilisons ces deux nombres pour substituer $-17x$ par $-8x - 9x$.

Ainsi, $6x^2 - 17x + 12 = 6x^2 - 8x - 9x + 12$. Nous pouvons poursuivre maintenant par mise en évidence composée, en commençant toujours par trouver les facteurs communs à chaque paire de termes : $2x$ est facteur commun de $6x^2 - 8x$; -3 est facteur commun de $-9x + 12$ (il faut en général s'assurer de factoriser le signe négatif de x s'il en a un). Puis nous complétons la factorisation :

$$\begin{aligned} 6x^2 - 17x + 12 &= 6x^2 - 8x - 9x + 12 \\ &= 2x(3x - 4) - 3(3x - 4) \\ &= (3x - 4)(2x - 3) \end{aligned}$$

<u>Exemple</u> :

Factorisez la fonction quadratique $3x^2 - x - 10$.

<u>Solution :</u>

Les coefficients sont respectivement

$a = 3$

$b = -1$

$c = -10$

Séparons en deux parties le terme central, $-x$. Pour ce faire, il nous faut trouver deux nombres, m et n, tels que

- le produit $m \cdot n = a \cdot c = (3)(-10) = -30$
- la somme $m + n = b = -1$

Quels sont les deux nombres dont le produit est -30 et la somme est -1 ? La seule combinaison de nombres possible est $m = -6$ et $n = 5$. Notez encore que les signes doivent être choisis afin de répondre aux critères de produit et somme. Nous utilisons ces deux nombres pour substituer $-x$ par $-6x + 5x$. Ainsi, $3x^2 - x - 10 = 3x^2 - 6x + 5x - 10$. Nous pouvons poursuivre maintenant par mise en évidence composée, en commençant par trouver les facteurs communs à chaque paire de termes : $3x$ est facteur commun de $3x^2 - 6x$; 5 est facteur commun de $5x - 10$. Puis nous complétons la factorisation :

$$\begin{aligned} 3x^2 - x - 10 &= 3x^2 - 6x + 5x - 10 \\ &= 3x(x - 2) + 5(x - 2) \\ &= (x - 2)(3x + 5) \end{aligned}$$

Exercices :

1. Soit $A = 6x^3 + 10x^2$
   a) Complétez :

      1) $A = 2(------)$
      2) $A = x(------)$
      3) $A = 2x(------)$
      4) $A = x^2(------)$
      5) $A = 2x^2(------)$

   b) Des cinq factorisations obtenues en a), quelle est celle où est mis en évidence le plus grand facteur commun ?

2. Factorisez les expressions suivantes en mettant en évidence le plus grand facteur commun :

   a) $5x - 10$
   b) $8x + 16$
   c) $12x^2 - 6x + 4$
   d) $x^2 + 5x$
   e) $x^2 - x$
   f) $24x^2 - 18x + 6$
   g) $x^2 + xy - x$
   h) $-6x^5y^3 + 12x^2y^4 + 18x^3y^2$
   i) $14x^4 - 28x^3 + 21x^2$
   j) $-9a^2b + 12a^4b^3 + 15a^3b$
   k) $a^4b^3 - a^3b^4$
   l) $x^3 + x^2 + x$

Réponses:

1. a)

    1) $3x^3+5x^2$
    2) $6x^2+10x$
    3) $3x^2+5x$
    4) $6x+10$
    5) $3x+5$

   b) la cinquième

2.

   a) $5(x-2)$
   b) $8(x+2)$
   c) $2(6x^2-3x+2)$
   d) $x(x+5)$
   e) $x(x-1)$
   f) $6(4x^2-3x+1)$
   g) $x(x+y-1)$
   h) $6x^2y^2(-x^3y+2y^2+3x)$
   i) $7x^2(2x^2-4x+3)$
   j) $3a^2b(-3+4a^2b^2+5a)$
   k) $a^3b^3(a-b)$
   l) $x(x^2+x+1)$

7. Systèmes d'équations et applications en gestion

Le problème de résoudre un système de deux équations et deux variables provient du fait que, généralement, deux variables sont présentes dans chacune des équations. La méthode de substitution vous permettra d'utiliser l'information contenue dans une des deux équations pour réduire la seconde à une seule variable. Il s'agit de suivre les étapes suivantes :

1. Dans la première équation, isoler *x*. Il est normal que vous n'obteniez pas une valeur précise tout de suite. Vous devriez plutôt avoir une expression dans laquelle *x* dépend de *y*. Vous pouvez aussi choisir d'isoler *y*, si cela vous semble plus simple. Vous pouvez également choisir d'utiliser la seconde équation pour isoler *x* ou *y* si cela vous semble plus simple.
2. Si vous avez décidé d'isoler *x*, substituer *x* dans l'autre équation par l'expression trouvée à l'étape précédente. Normalement, vous devriez obtenir une expression n'ayant que la variable *y*.
3. Résoudre pour *y*.
4. Trouver *x* en utilisant l'expression trouvée en 1) et la valeur de *y* maintenant connue.

Exemple

Résoudre le système linéaire à deux variables

$$x+3y=5$$

$$2x+5y=9$$

Solution

1. Isoler x dans la première équation

2. Substituer x dans la seconde équation par la valeur obtenue en 1).

3. Résoudre pour y

4. Trouver x…

Exemple

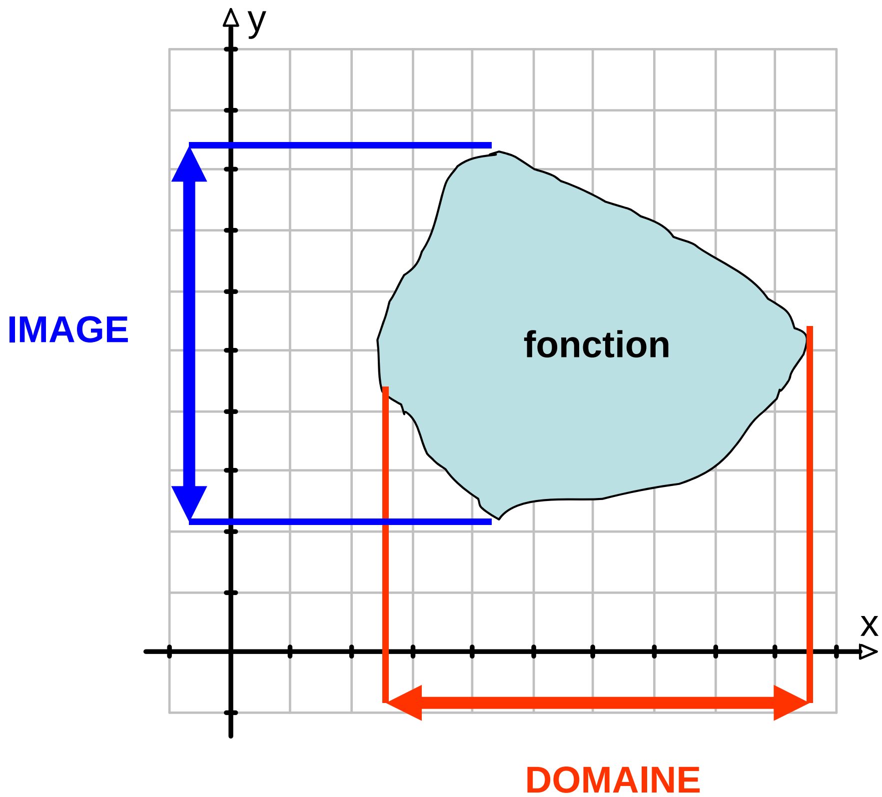
Le prix et la quantité d'équilibre d'un bien sont déterminés par l'intersection des courbes de l'offre et la demande. Pour un bien donné, les courbes d'offre et de demande sont les suivantes :

$$p_{offre} = 210 - 0,02\,q$$
$$p_{demande} = 110 + 0,03q$$

Trouvez le prix et la quantité d'équilibre.

8. Fonction, domaine, image

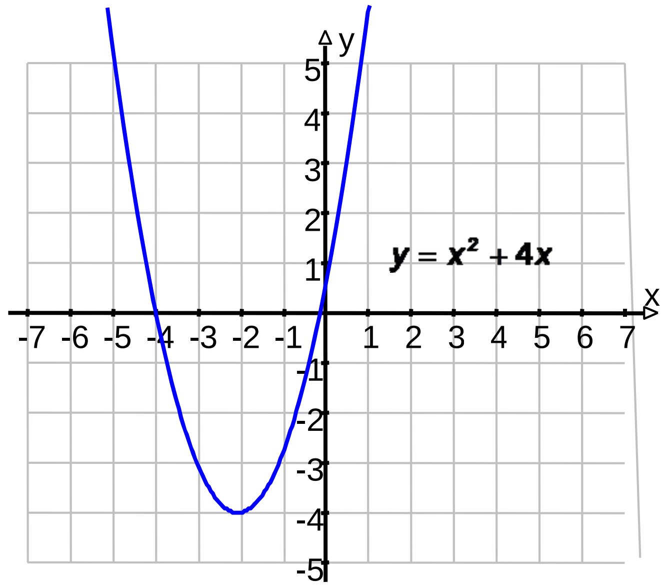
L'illustration ci-contre permet de bien visualiser ce que sont le domaine et l'image d'une fonction.



Le domaine d'une fonction *f*, noté **Dom** *f*, est l'ensemble des premières composantes des couples de *f*, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable indépendante **x**. C'est donc un sous-ensemble de l'ensemble de départ avec des éléments qui admettent une image par *f*. Il n'est pas nécessairement égal à l'ensemble de départ.

L'ensemble image de la fonction *f*, notée **Ima** *f*, est l'ensemble des deuxièmes composantes des couples de *f*, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable dépendante ***y***. C'est donc un sous-ensemble de l'ensemble d'arrivée. Ce sont les éléments de l'ensemble d'arrivée ***y*** qui sont associés aux éléments du domaine ***x***. Il n'est pas nécessairement égal à l'ensemble d'arrivée.

Voici le graphique d'une certaine fonction **y.** Déterminez :



La règle : ______________________

Domaine : _____________________

Image : _______________________

Zéros :_______________________

Intervalle(s) de croissance :______________________

Intervalle(s) de décroissance : _____________________

9. Équation d'une droite

Une droite est une fonction qui peut être écrite sous la forme $y = mx + b$

Particularité : Graphiquement, une droite est toute fonction dont l'inclinaison est constante en tout point.

La _____________, qui est représentée par la lettre *m*, est la mesure de l'inclinaison d'une droite. Elle exprime la variation verticale de la droite pour un déplacement horizontal d'une unité positive et est obtenue par la relation :

$$m =$$

________________________________, qui est représentée par la lettre *b*, est la valeur de *y* lorsque *x* vaut zéro. Il s'agit donc de la position de la droite lorsque celle-ci croise l'axe des *y*

En plusieurs occasions, il nous faudra trouver l'équation d'une droite à partir de certaines informations. Par exemple, quelle est l'équation de la droite qui contient les points (1,4) et (2,8)? Afin de répondre à cette question, il nous faut trouver les valeurs de *m* et de *b* qui caractérisent la droite.

Déterminer la pente

Dans l'exemple ci-haut, la pente serait

ce qui indique que pour déplacement d'une unité vers la droite, il y a un déplacement de _________________ vers le haut. Notez que le choix du "premier" et du "deuxième" point n'affectera pas le calcul de la pente :

Recalculez la pente en « inversant » les deux points :

Trouver l'ordonnée à l'origine

Afin de trouver la valeur de *b*, il s'agit d'utiliser un point connu de la droite et la pente qui vient d'être déterminée. L'équation d'une droite est $y = mx + b$. Or, nous venons de trouver que $m =$ _________, d'où l'équation de notre droite actuelle est ________________. Nous savons de plus que le point (1,4) se trouve sur cette droite et doit donc satisfaire son équation :

Encore une fois, le choix du point que l'on utilise n'affecte en rien le résultat obtenu. Si nous avions choisi le point (2,8), le calcul aurait révélé le même résultat.

La pente et l'ordonnée à l'origine étant maintenant connues, l'équation de la droite est _____________________________________.

Exemple

Une compagnie produit des chaussures. Lorsque 30 chaussures sont produites, le coût total de production est de 325 $. Lorsque 50 chaussures sont produites, le coût s'élève alors à 485 $. Quelle est l'équation du coût si celui-ci varie de façon linéaire (droite) en fonction du nombre de chaussures produites ?

10. Fonctions quadratiques

Une fonction quadratique est une fonction de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$

Le sommet d'une parabole est situé à la valeur $x = -\frac{b}{2a}$

Orientation :

- si $a > 0$ → ________________________________
- si $a < 0$ → ________________________________

Pour trouver les racines (zéros de la fonction), il faut utiliser la formule ci-dessous

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

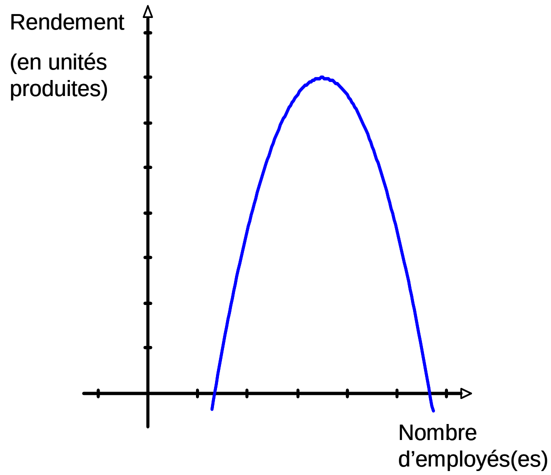
Exemple 1 :

Trouver les zéros de la fonctions suivantes : $h(x) = 4x^2 - 12x + 9$

Exemple 2 :

Le graphique ci-contre illustre l'évolution du rendement d'une société en pleine expansion. La relation entre le nombre d'employés et employées et le rendement de la production (en unités produites) est définie par la fonction :

$$f(x) = \frac{-3}{8}(x-35)^2 + 175.$$



a. Quel est le nombre d'employés et employées que doit embaucher la société pour obtenir le meilleur rendement de production?

b. Combien la société doit-elle engager d'employés et employées pour que son rendement soit positif ?

c. Quel est le meilleur rendement que la société puisse atteindre ?

d. Quand le rendement de cette société est-il négatif ?

e. Quel est le rendement de la société quand elle compte 39 employés et employées?

11. Fonctions exponentielles et logarithme

Voici un tableau récapitulatif de la fonction exponentielle. Faire une esquisse des deux types de graphiques à droite du tableau

Règle	$f(x)=b^x$, avec ($b>0$ et $b\neq 1$)
Graphique	Courbe qui s'approche de l'axe des *x* sans jamais y toucher et qui passe par les points (0 , 1) et (1 , b).
Domaine	$\mathbb{R}$
Image	$\mathbb{R}_+^*$
Zéro	Aucun
Signe	Positive
Variation	• Si $b>1$: croissante • Si $0<b<1$: décroissante
Réciproque	$y=\log_b x$, avec $x>0$

Exemple :

La dépréciation d'une certaine machine est telle que sa valeur après t années est donnée par une fonction de la forme $V(t)=V_0e^{-0,04t}$. Si cette machine vaut 8 986,58 \$ après 20 ans. Quelle était sa valeur initiale (V_0) ?

Voici un tableau récapitulatif de la fonction logarithme. Faire une esquisse des deux types de graphiques à droite du tableau

Règle	$f(x) = \log_b x \ \ (\mathrm{b} > 0 \text{ et } \mathrm{b} \neq 1)$
Graphique	Courbe s'approche de la droite $x = 0$ et passe par $(b,1)$ et $(\frac{1}{b}, -1)$.
Domaine	$\mathbb{R}_+^*$
Image	$\mathbb{R}$
Zéro	$x = 1$
Signe	Si $b > 1$: positive lorsque $x \geq 1$ et négative lorsque $0 < x \leq 1$ Si $0 < b < 1$: Positive lorsque $0 < x \leq 1$ et négative lorsque $x \geq 1$
Variation	Toujours décroissante si $0 < b < 1$ ou toujours croissante si $b > 1$.
Réciproque	La réciproque est $f(x) = b^x$