Le calcul et les mathématiques en 7[e] et 8[e] classes

Traduction du septième chapitre du livre *Rekenen in beweging*

Version du 3 décembre 2017

Éditeur : Reklamestudio Kees Kuiphof bNO, Ede.

Auteurs : Kees van Broekhuizen, Fred Goffree, Frank de Kiefte, Jan Kraamwinkel, Peter Landweer, Paul van Meurs, Job de Raadt, Kees Verhage, Pieter Witvliet, Annemieke Zwart.

Traduction : Luc Lismont. Toutes les remarques permettant d'améliorer cette traduction (style, orthographe, passage peu clair ou incompréhensible…) sont les bienvenues. Merci de les communiquer à Luc Lismont.

1 Les arrière-plans anthropologiques

En 7e classe et après, il est de plus en plus évident que les élèves veulent déterminer eux-mêmes leur propre voie. Au loin, c'est la lumière du monde entier pointe à l'horizon et les élèves veulent « regarder » de tous leurs sens au delà de l'horizon offert par l'école. Découverte, invention et révolution sont des thèmes majeurs dans la dernière partie de la deuxième septaine. D'autres façons de penser émergent, causalité et capacité de jugement se réveillent et préparent le déploiement de la conscience de soi.

Les élèves de septième et huitième sont au stade de la prépuberté, période du « Sturm-und-Drang [1] », parfois aussi appelée « phase problématique ». Cette troisième phase dans la deuxième septaine se termine autour de la quatorzième année, lorsque le prof de classe transmet sa classe aux professeurs des grandes classes qui accompagneront les élèves au cours de leur puberté.

Comme aux alentours de la dixième année, une transition marquante dans le développement à lieu autour de la douzième année. Le concept de cause à effet, de causalité, se développe chez les enfants. Maintenant, les élèves visent à conquérir le monde extérieur dans son ensemble. Ils sont actifs vers l'extérieur, tout en montrant une posture instable. La recherche d'une relation avec ses semblables de manière sympathique ou antipathique témoigne d'un incertitude et va parfois de pair avec de l'agressivité. La voix porte plus loin (littéralement et au sens figuré) que jusqu'à maintenant, et selon les circonstances, il n'est plus question de modération ou d'évaluations factuelles. Au niveau de la stature, nous observons une autre phase d'étirement qui part des mains et des pieds pour aller vers le tronc. Le prépubère commence petit à petit à trouver un nouveau rapport à la « gravité » et aux dimensions de son corps. Dans cette confrontation avec la « force de gravité », il est en train de devenir « citoyen de la terre ».

Dans cette phase de la vie, il est de la plus haute importance que le chemin pris pour s'exercer puisse trouver sa place dans l'enceinte sécurisante de sa « propre » école. Qui se perd, qui prend le mauvais chemin, doit avoir la sécurité de savoir accepté, pour vouloir essayer encore et encore de se trouver soi-même.

Au cours de cette nouvelle phase de la vie, en septième et de huitième classes, de nouveaux mondes sont à découvrir même dans l'enseignement des mathématiques : le monde des nombres négatifs, les fractions formelles, le calcul avec des lettres, de nouvelles opérations telles que les puissances ou les racines, le travail avec des formules, la résolution d'équations, des preuves visuelles du théorème de Pythagore, le concept de leu géométriques et les corps platoniciens.

À partir du mouvement et au travers de questionnements pratiques et réels qui demandent continuellement de nouveaux points de vue, des idées sont développées qui conduisent à une pensée précise, mais aussi flexible.

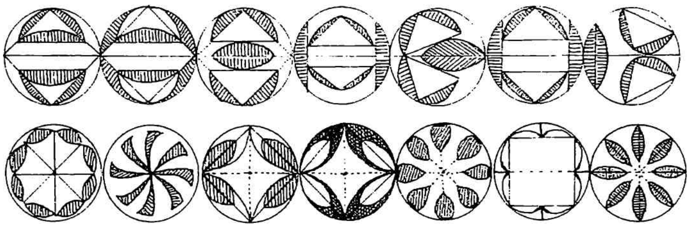
Dans les indications de Rudolf Steiner pour ces années d'enseignement, nous trouvons deux chemins. Le premier est le développement de la pensée abstraite. À partir du calcul avec des nombres et de recherche de généralisation au travers de raisonnements, nous découvrons des lois, par exemple celles de l'algèbre. D'autre part, les situations de la vie quotidienne – à partir desquelles se construit, entre autres, la résolution des équations – créent une connexion avec la réalité. En outre, l'algèbre et la géométrie s'associent l'une à l'autre en septième classe. Pensez à tout ceci : formules pour l'aire des figures géométriques, figures qui sous-tendent des formules algébriques, le développement côte à côte de points de vue géométries et algébriques autour du théorème de Pythagore.

Les élèves de septième découvrent l'accès à un monde qui leur était auparavant inconnu. Tout comme Léonard de Pise autour de l'an 1200, ils découvrent que certaines équations sont insolubles avec les nombres existants et qu'il faut ajouter des nombres négatifs. Cette découverte permet une nouvelle étape dans la

1. En allemand dans le texte. Littéralement « Tempête et passion » (NdT).

prise de conscience des enfants. Les facultés des élèves sont sollicitées pour – en se basant uniquement sur la causalité – relier un nouveau principe mathématique avec la réalité et expliquer de manière autonome les relations entre la nature du calcul et la culture du calcul (voir le premier chapitre *Points de départ pour le « calcul et les mathématiques » dans les écoles Waldorf*[2]).

Le programme de la septième et de la huitième année offre également la possibilité de développer diverses activités mathématiques intégrées (a.m.i.). Les enfants font aussi des expériences mathématiques dans d'autres cours que les cours de mathématiques. Si nous, les enseignants, en sommes conscients, alors les élèves peuvent en profiter pleinement. Dans les cours de dessins, durant les périodes astronomie et de sciences les a.m.i. sont pratiqués, mais beaucoup d'autres situations offrent également de telles occasions (voir la section 5 de ce chapitre). Par exemple, dans les périodes d'histoire. Le laps de temps couvrant les leçons d'histoire de la septième classe va du Moyen Age et de la Renaissance à l'époque moderne. Les caractéristiques de l'époque sont également visibles dans la biographie des élèves. La vie et l'œuvre de Leonardo da Vinci sont un thème important. Les artistes de la Renaissance ont en effet apporté une contribution significative à la pensée scientifique. Par exemple, l'étude de la perspective, qui a débuté à cette époque, offre de nombreuses possibilités pour la géométrie en 7e classe. En étudiant le travail de Leonardo, une page de son Atlanticus peut être une bonne occasion de concevoir une feuille de travail avec des exercices de géométrie. On peut par exemple reprendre les différentes constructions d'angles droits que les enfants ont apprises en 6e classe.



En septième et huitième classes, les heures hebdomadaires de mathématiques ont aussi un caractère un peu différent. Les élèves travailleront de plus en plus indépendamment (voir *Des heures d'exercices au travail autonome*[3]). On poursuit le travail autour des thèmes des années précédentes, comme le système métrique, les fractions, les nombres décimaux, les pourcentages et les rapports, en relation les uns avec les autres. Dans cette phase de la vie, les enfants peuvent aussi être amener au travers de généralisations à des stratégies de résolution. Des situations réalistes peuvent maintenant permettre de trouver des règles de calcul formel et des formules, par exemple, pour multiplier et diviser des fractions. Une exploration sur la calculatrice (voir *Une calculatrice de poche en classe de mathématiques ?*[4]) peut être incorporé dans les heures de calcul de cette année scolaire. Dans le travail, qui s'ajoutera à partir de nouvelles périodes dans les heures d'exercices de calcul, il s'agit aussi de poursuivre la formation de la volonté, de développer des compétences en exerçant avec persévérance, de mettre à l'épreuve les nouvelles connaissances au travers d'exercices stimulants.

En résumé, les points suivants peuvent caractériser du point de vue anthropologique caractérisé l'enseignement du calcul et des mathématiques de la septième et la huitième classe :

— approche exploratoire stimulante ;
— repousser et dépasser les frontières ;
— des activités mathématiques intégrées avec d'autres thèmes (travaillés en période) ;

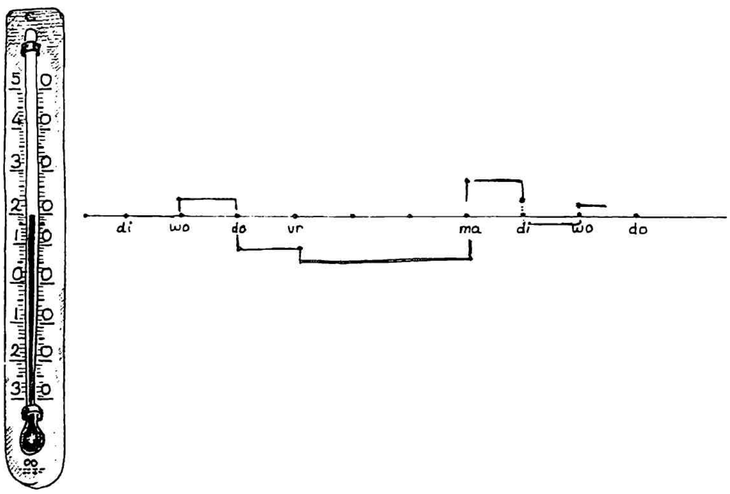
2. Non traduit à ce jour (3 décembre 2017)
3. Non traduit à ce jour.
4. Non traduit à ce jour.

Les étudiants sont mis au défi en :

— développant leur capacité réfléchissante [?] ; ?
— prenant des points de vues variables ;
— en raisonnant de manière causale ;
— en travaillant de façon autonome et avec persévérance.

2 Élargissement de l'univers des nombres

« Maîtresse, aujourd'hui, j'ai froid et hier pourtant, j'avais encore trop chaud avec ma chemise. » Ernst avait raison, c'était un temps très changeant. De manière impromptue, j'ai décidé d'utiliser sa remarque pour préparer la période de mathématiques de la semaine prochaine. J'ai proposé alors d'afficher sur une grande feuille de papier l'évolution des températures extérieures. Eloy, notre dessinateur, a dessiné un grand thermomètre avec son échelle au début de la feuille. Chaque matin, nous allons indiquer la température que nous lirons sur le vrai thermomètre à l'extérieur.



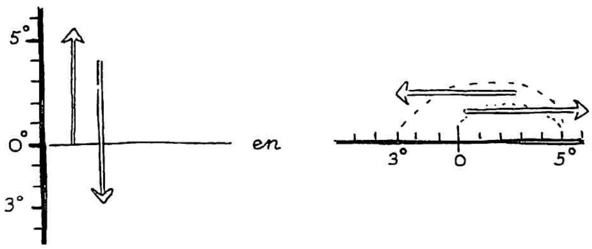
C'était à celui qui arrivait premier l'école pour faire les observations !
Le premier jour, nous avons dessiné une longue ligne horizontale à la hauteur de la température du matin, ce qui serait notre point de départ. Avec des flèches, nous avons indiqué les augmentation et diminutions de la température de chaque matin.

Cette observation des températures est une bonne introduction à la période sur les nombres.
En septième classe, les élèves découvrent les nombres négatifs et le monde des nombres est étendu à la collection des nombres rationnels. Les nombres avec lesquels nous travaillons jusqu'à présent se révèlent insuffisants dans toutes sortes de situations. Les enfants peuvent à partir de leur expérience de la température imaginer facilement ce qui serait arrivé si, le premier jour, la température avait été de 0°. Avec le souvenir du patinage lors de l'hiver passé, les enfants trouvent cela normal d'utiliser des nombres négatifs. Au cours de cette période, on amène cette connaissance informelle à la conscience et, lentement mais sûrement, on va déterminer les règles du calcul avec les nombres négatifs et positifs.

Avec les enfants, on peut aussi suivre le mouvement du fluide dans le thermomètre le long d'une ligne de nombres imaginaire. Quand la température augmente, alors on marche vers l'avant. Si elle baisse, on se déplace vers l'arrière ; chaque degré est une étape. La position de départ est indiquée par un petit cercle en craie sur le sol. Plus tard, ce sera le 0 sur la ligne des nombres. Chaque enfant le sait : si on commence à 0° et que la température augmente d'abord de 5°, et qu'ensuite elle diminue de 8° il gèle « avec 3° » et qu'il fait 3° « en dessous de zéro ».

Ce qu'on a fait en marchant, on le dessine alors dans le cahier. On le fait avec différentes couleurs : les températures « au-dessus de zéro », par exemple, sont écrites avec une couleur chaude comme le jaune et celles « en dessous de zéro » avec une couleur froide comme le bleu. On convient d'appeler les nombres bleus nombres négatifs. Celui qui ne veut plus utiliser les différentes couleurs, peut écrire (—3) ou (moins 3) pour 3° en dessous de zéro et (+5) ou (plus 5) pour 5° au-dessus de zéro.

Le nombre de pas se traduit par la longueur des flèches – dessinée dans la même couleur que les signes d'opération. Une élévation de la température, marchée vers l'avant, est dessinée, par exemple, avec une flèche rouge ; un baisse de température, marchée vers l'arrière, avec une flèche rouge pointant dans la direction opposée.



Lorsqu'ensuite, on écrit ce qui a été fait et dessiné comme « calcul », alors on utilise les mêmes couleurs : les nombres et les symboles indiquant les opérations en rouge et les autres nombres dans leur propre couleur. Par exemple :

$0 + 5 = (+5)$

$(+5) - 8 = (-3)$

$(-3) + 2 = (-1)$

On fait ainsi l'expérience que le monde des nombres positifs se reflète avec zéro comme centre de symétrie et que l'expansion des nombres avec les négatifs est nécessaire. En outre, on voit apparaître la différence entre les nombres (avec un signe) qui correspondent une position et un nombre (avec un signe) indiquant un déplacement. Il est important que les élèves deviennent bien conscients de cette différence.

Cette différence, nous l'avions en fait déjà rencontrée quand nous avons appris à compter en première classe. Est-ce que l'on compte les positions (points sur la ligne de nombres) ou les étapes ? (Voir la troisième partie du chapitre [5]). Lors du travail avec des nombres négatifs, cela émerge à nouveau comme une difficulté et peut être une pierre d'achoppement lors du calcul avec les nombres négatifs. Toutefois, cela peut aussi être vécu comme un défi de percer « ce qui se trouve derrière cela ». Si l'on passe rapidement aux règles, on enlève au élèves un moment de prise de conscience et on leur fait vivre les mathématiques comme quelque chose pour lesquelles il faut accepter ce qui est dit. Dans ce cas, il y a quelque chose de l'éducation qui reste en jachère. Les mathématiques sont une excellent matière qui permet de développer la conscience (de soi). Celui qui n'a pas encore et toujours l'occasion à ce stade de développement de former ses pensées à partir de ses forces propres e à son niveau se détournera rapidement son regard intérieur ou pire encore développer le sentiment d'être stupide.

À partir des déplacement en comptant le long de la ligne des nombres, qui a maintenant été élargie avec

5. Non traduit à ce jour (3 décembre 2017).

les nombres négatifs, nous allons maintenant calculer avec des nombres positifs *et* négatifs. Nous savons maintenant :

— ajouter, c'et marcher vers l'avant
— soustraire, c'est marcher arrière

On ajoute maintenant les conventions :

— pour calculer avec un nombre positif, on tourne son nez dans le sens positif
— pour calculer avec un nombre négatif, on tourne son nez dans le sens négatif

Maintenant, on marche :
$(+5)-(+8)=(-3)$: à partir de $(+5)$ avec le nez vers $+$, marcher à reculons
$(-3)-(+8)=(-11)$: à partir de (-3) avec le nez vers $+$, marcher à reculons
$(-11)+(+5)=(-6)$: à partir de (-11) avec le nez vers $+$, marcher en avant
$(-6)-(-5)=(-1)$: à partir de (-6) avec le nez vers $-$, marcher marcher à reculons
$(-1)-(-5)=(+4)$: à partir de (-1) avec le nez vers $-$, marcher à reculons

Après avoir marcher cela, les exercices doivent surtout être pratiqués sur le papier par le déplacement (mouvement) à indiquer par des flèches au-dessus de la ligne de nombres. Ici, le travail avec des couleurs différentes peut à nouveau porter des fruits, lorsqu'une différence est faite entre le signe de l'opération (rouge pour l'addition et la soustraction) et le signe de la position. Les flèches au-dessus de la ligne des nombres reçoivent les couleurs des signes d'opération. Ils représentent toujours les mouvements. Peu à peu, ce travail avec des couleurs va laisser la place aux notations habituelles.

En plus des températures, il y a d'autres situations concrètes et des problèmes pratiques qui peuvent servir de base de l'introduction des nombres négatifs : emprunter de l'argent, l'élévation par rapport au niveau de la mer, les déficits et ainsi de suite. Dans toutes ces situations, c'est une bonne chose de décrire d'abord les événements avec la ligne de nombres avant de les écrire comme « calculs ».
Il y a beaucoup à exercer pratiquement et le travail avec les fractions peut aussi être abordé dans ce travail. Les calculs avec des nombres fractionnaires négatifs nécessitent une attention et l'utilisation de la ligne des nombres est fondamentale au début.
$3-5\frac{1}{3}=-2\frac{1}{3}$ ne pose généralement pas de problème, mais
$-3\frac{3}{4}-(-6)=2\frac{1}{4}$ (!) est un plus grand défi.

La multiplication et la division avec des nombres négatifs

Des questions comme $5\times(-2)=(-10)$ et $(-10):2=(-5)$ ne posent généralement pas de problème. Les élèves peuvent encore se représenter quelque chose, surtout quand les nombres « actif » sont rouges. Plus difficile est le calcul $(-2)\times 5=$... Que peut-on se représenter pour (-2) fois ?
Celui qui considère que $(-2)\times 5$, c'est la même chose que $5\times(-2)$ contourne ce problème. On a donc $(-2)\times 5=(-10)$, l'opposé de $(+10)$ et par conséquent également de $2\times(5)$. D'une manière analogue, on peut penser alors que $(-2)\times(-5)$ est l'opposé de $2\times(-5)$, c'est-à-dire l'opposé de (-10). En résumé, $(-2)\times(-5)$ est l'opposé de l'opposé de (10) et est donc (10) également.
Une brève réflexion sur la différence entre les signes d'opération et les signes de position, tels que les nous avons déjà rencontrés avec l'addition et la soustraction, a tout à fait sa place ici. Nous avons découvert en marchant que soustraire un nombre négatif donne le même résultat qu'ajouter l'opposé de ce nombre

négatif, par exemple : —(—5) donne le même résultat que +(+5). Si on pense maintenant qu'ajouter (+5) signifie la même chose qu'ajouter 1 × (+5), alors on peut créer un pont vers la multiplication des nombres négatifs dans la mesure où —(—5) peut être compris comme (—1) × (—5). C'est donc, comme nous l'avons découvert précédemment, (+5).

Nous arrivons donc aux règles de calcul bien connues :

$+ \times + = +$ $\quad - \times - = +$

$+ \times - = -$ $\quad - \times + = -$

En nous basant les mêmes principes, nous pouvons également examiner et découvrir les règles de calcul pour la division avec des nombres négatifs.

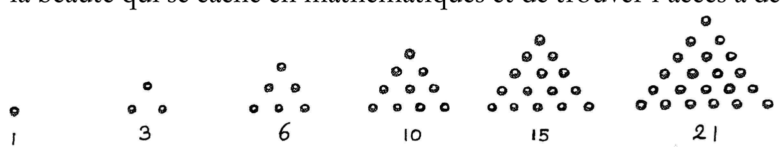
Dans ce qui précède, on a déjà répondu à la question : « Ces règles ne peuvent-elles pas être sonnées simplement en tant qu'axiomes du calcul avec les nombres négatifs ». En mathématiques, il ne s'agit pas de contourner les problèmes, mais plutôt de relever le défi, qui se pose l'homme pensant qui se développe, de résoudre des problèmes. L'important est que l'enseignant puisse stimuler cette disposition chez ses élèves. Le développement de l'élèves de septième classe est en général assez avancé à ce stade pour que ces étapes formelles, qui se jouent complètement dans la pensée, puissent maintenant être mises en œuvre. Pour les élèves qui n'en sont pas encore à ce niveau mental, des exemples pratiques de changements de température peuvent quand même leur donner la possibilité de comprendre leur propre niveau les règles de calcul.

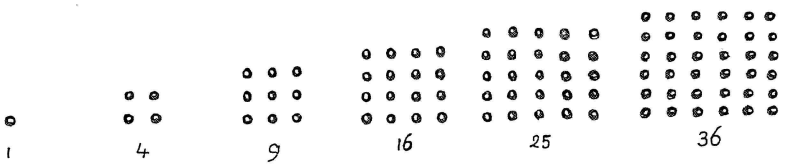
D'autres sujets

Le calcul avec des nombres négatifs donne la possibilité de reprendre des calculs anciens. C'est également le cas pour les sujets suivants :

— Les nombres premiers
— les propriétés de divisibilité
— carrés
— nombres triangulaires
— cubes
— puissances de 2 (exposants)
— règles de calcul pour les puissances
— extraire les racine des carrés
— algorithme pour extraire les racines
— d'autres formes pour les quatre algorithmes standards

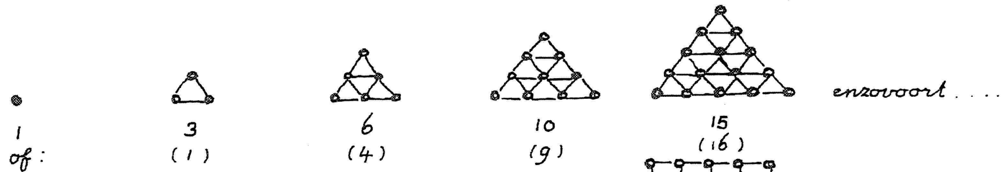
Toutes ces questions seront abordées en période de calcul. Il s'agit avant tout de découvrir et expérimenter la beauté qui se cache en mathématiques et de trouver l'accès à de nouveaux horizons de pensée.

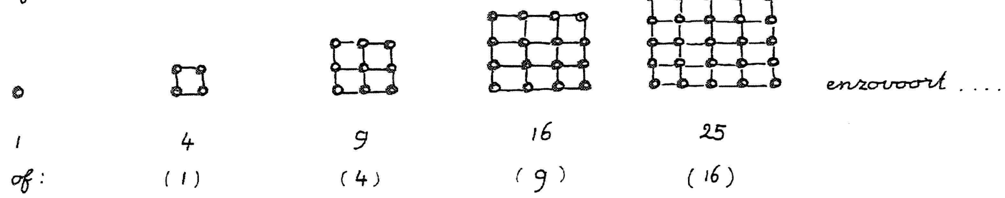




En wat ontdekken de kinderen als ze de stippen verbinden en de driehoeken of vierkanten tellen ?

Et que découvrent les enfants lorsqu'ils relient les points et qu'ils comptent les triangles ou les carrés ?





Ou : *etc*

3 Algèbre

Dans les cours d'histoire de septième classe, les enfants apprennent comment la culture arabe et orientale est arrivée en Europe à travers l'Espagne lors de l'expansion de l'empire musulman. Notre mot algèbre, la latinisation de l'arabe « al-Jabr » en témoigne. Au cours de telles périodes en septième et huitième classes, on voit se déployer le développement des sciences et donc des mathématiques.

La transition de l'arithmétique à l'algèbre donne un nouvel élan au développement de la pensée mathématique. Pour certains élèves, le passage du calcul avec des nombres au calcul avec des lettres reste longtemps opaque, même s'ils exécutent bien le « travail de calcul » lui-même. Lorsque, dans l'algèbre, nous amenons à la conscience des structures qui restent cachées dans le calcul, nous nous adressons à des forces qui se rendent disponibles pour la pensée chez les préadolescents et nous stimulons ainsi la transition de l'enseignement primaire vers le secondaire.

En sixième classe déjà, on peut déjà faire un premier pas vers l'algèbre en travaillant avec nombres concrets (voir aussi la 6e partie du chapitre sur les fractions), par exemple avec la formule du capital : $R = \frac{K \times P \times T}{100}$ ou en arithmétique commerciale (poids et mesures), où le « poids net est le poids brut moins la tare », ou encore « Net = Brut − Tare » : $N = B - T$.
Qu'avons nous fait ? Les premiers calculs ont d'abord effectués dans un contexte spécifique, les pensées sous-jacentes ont ensuite été exprimées, puis brièvement résumées dans des concepts et finalement représentées schématiquement avec lettres. Après cela, lors de l'utilisation de la formule, les lettres ont à nouveau été remplacées par des nombres pour résoudre de nouveaux problèmes concrets. Il s'agit donc de l'apprentissage d'une pensée raisonnée, dans laquelle les opérations sont structurées de manière schématique au moyen de concepts appropriés et qui est finalement fixée sous forme abstraite dans une formule. Ensuite, les élèves expérimentent, au cours de l'utilisation de la formule qu'ils ont trouvée eux-mêmes, que le travail (de calcul) est devenu plus efficace. Les formules ne sont pas des outils au services d'actes mystérieux

et incompréhensibles de chercheurs ou d'enseignants. Elles servent à trouver soi-même des connexions intéressantes, exprimées de façon claire, courte et concise, avec comme objectif de rendre les calculs aussi efficaces que possible. Celui qui apprend à se débrouiller avec cet outil mathématique, fera d'emblée l'expérience de tout cela.
En dehors de la recherche de formules, l'algèbre peut aussi se développer à partir des régularités de suites et séries, de la géométrie et des équations.

Formules

Une formule comme celle du capital n'est jamais une fin en soi. Il s'agit d'apprendre à raisonner en relation avec la réalité. La formule est le résidu de ce processus. Il existe beaucoup de types de formules avec lesquelles cette mathématisation peut être exercée. La plupart des formules ont souvent la formes $a = b \times c$ ou $c = \frac{a}{b}$. Mais des formules de la forme $a = p+q$, $a = p-q$ ou encore $a = b \times c+q$ peuvent être trouvées par les élèves eux-mêmes au cours d'un tel processus de raisonnement.

Les formules peuvent apparaître [successivement] comme une description d'un calcul qui est toujours le même, comme un objet autonome qui peut être manipulé, comme une « description » d'une relation entre des variables. Il est évident qu'en sixième classe, l'accent n'est mis que sur le premier de ces trois aspects.

Une feuille de calcul pourrait, par exemple, ressembler à ceci :

Feuille de travail

« Trouve ta propre formule »

Je veux savoir combien de mètres je roule quand j'ai fait un certain nombre de tours de pédale avec mon vélo. J'ai mesuré qu'avec un tour de pédale, j'ai parcouru 3 mètres et 60 centimètres.

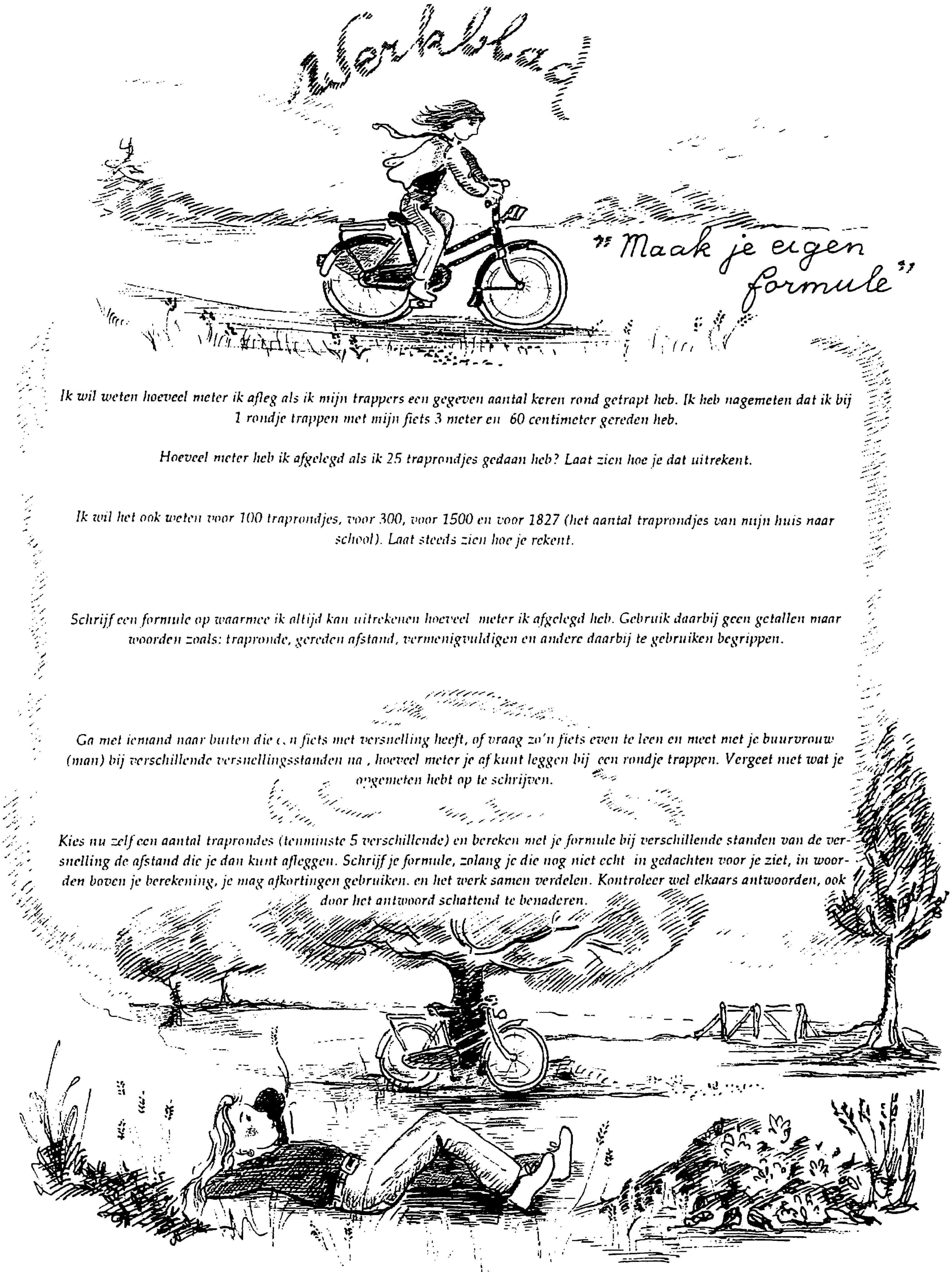
Combien de mètres est-ce que je parcours si je fais 25 tours de pédale ? Montre comment tu calcules.

Je veux connaître la distance pour 100 tours de pédale, pour 300, 1500 et 1827 (le nombre de tours de pédale de ma maison à l'école). Montre toujours comment tu calcules.

Écris une formule qui me permet toujours de calculer combien de mètres je fais. Pour cela, n'utilise pas de chiffres, mais des mots tels que tour de pédale, distance, multiplier et d'autres mots qui seront nécessaires.

Va à l'extérieur avec quelqu'un qui possède une bicyclette avec un dérailleur ou emprunte un vélo comme cela. Avec ton (ta) voisin (voisine) mesure quelle longueur est parcourue à chaque tour de pédale pour les différentes vitesses. N'oublie pas d'écrire ce que vous avez mesuré.

Choisis maintenant toi-même quelques nombres de tours (au moins 5 différents) et calcule, à l'aide de ta formule, la distance parcourue pour les différentes positions du dérailleur. Écris ta formule en mots, tant que tu ne la visualise pas encore vraiment dans tes pensées. Tu peux utiliser des abréviations et répartir le travail avec d'autres. Vérifiez vos réponses les uns des autres, aussi en calculant la réponse de manière approchée.



Werkblad

"Maak je eigen formule"

Ik wil weten hoeveel meter ik afleg als ik mijn trappers een gegeven aantal keren rond getrapt heb. Ik heb nagemeten dat ik bij 1 rondje trappen met mijn fiets 3 meter en 60 centimeter gereden heb.

Hoeveel meter heb ik afgelegd als ik 25 traprondjes gedaan heb? Laat zien hoe je dat uitrekent.

Ik wil het ook weten voor 100 traprondjes, voor 300, voor 1500 en voor 1827 (het aantal traprondjes van mijn huis naar school). Laat steeds zien hoe je rekent.

Schrijf een formule op waarmee ik altijd kan uitrekenen hoeveel meter ik afgelegd heb. Gebruik daarbij geen getallen maar woorden zoals: trapronde, gereden afstand, vermenigvuldigen en andere daarbij te gebruiken begrippen.

Ga met iemand naar buiten die e.n fiets met versnelling heeft, of vraag zo'n fiets even te leen en meet met je buurvrouw (man) bij verschillende versnellingsstanden na , hoeveel meter je af kunt leggen bij een rondje trappen. Vergeet niet wat je opgemeten hebt op te schrijven.

Kies nu zelf een aantal traprondes (tenminste 5 verschillende) en bereken met je formule bij verschillende standen van de versnelling de afstand die je dan kunt afleggen. Schrijf je formule, zolang je die nog niet echt in gedachten voor je ziet, in woorden boven je berekening, je mag afkortingen gebruiken. en het werk samen verdelen. Kontroleer wel elkaars antwoorden, ook door het antwoord schattend te benaderen.

Il peut y avoir encore beaucoup d'exercices à partir d'une telle situation, par exemple : en plus de calculer la distance par tour de pédale, estimer la distance pour aller à la maison. On peut aussi demander de penser à une formule en mots qui calcule le nombre de tours de pédales nécessaires pour parcourir une certaine distance. Le devoir à la maison peut alors être de compter le nombre de tours pour aller à la maison et de vérifier ensuite sur une carte si la distance a été bien estimée. Ou encore : qui peut trouver lui-même une formule qui permet de trouver instantanément la distance en kilomètres ? Et ainsi de suite.

Travailler avec des formules commence toujours par un calcul à partir de la vie quotidienne. Peu à peu, les enfants parviennent à généraliser. Grâce à l'utilisation d'abréviations, les formules peuvent encore être formalisées avec des lettres.

Parce que les élèves ont la liberté de choisir eux-mêmes des mots et des lettres pour les variables, ils ne perdent pas de vue leur signification réelle. L'algèbre est alors vécue comme une forme de raisonnement qui en vient progressivement à un niveau plus élevé d'abstraction.

Pour finir, voici encore quelques exemples de situations qui peuvent conduire à la conception de formules :

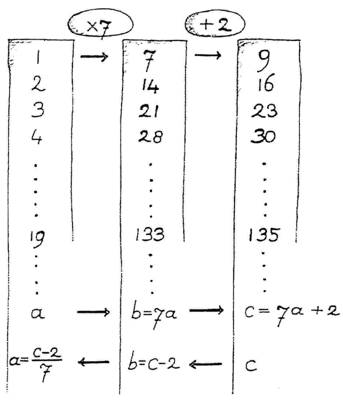
— La relation entre les tailles de chaussures françaises et anglaises.
— La correspondances entre les mesures dans le système métrique.
— La conversion de sommes d'argent dans d'autres devises.
— Calculs autour d'un cyclomoteur : la consommation de carburant, le prix du carburant en fonction du kilométrage.
— Le montant à payer pour du tissu lorsque le prix au mètre est connu (poids et mesures dans les cours de travaux manuels).
— La relation entre le poids apparent et la longueur d'un levier (poids et mesures dans la période de mécanique).
— La relation entre les échelles de température Celsius et Fahrenheit (poids et mesures en période de physique).
— Poids spécifique (masse) comme un lien entre le poids (masse) et le volume (poids et mesures en période de physique)

Suites et séries

Dans les calculs qui proviennent d'une situation concrète, il s'agit de choses qui viennent à l'enfant à partir de l'extérieur. Lors des années précédentes, des bases pour l'algèbre ont aussi été posées chez l'enfant. On peut penser ici aux aux suites de nombres, à certains jeux de nombres, à des procédures et des règles de calcul que les enfants connaissent déjà plus tôt. L'algèbre peut maintenant être amenées à la conscience.

Exemple 1

Des tables qui se composent de plusieurs suites qui peuvent être écrites chacune sur une bande de papier.



Avec de telles régularités, les élèves peuvent aller à la recherche des opérations et de leur inverse. Ensuite, nous trouvons la formule qui indique comment passer d'une colonne à l'autre

Exemple 2

Une recherche sur les carrés :

$$\begin{array}{lllll} 100 \ldots & 121 \ldots & 144 \ldots & 169 \ldots & (10+a)^2 \\ (10)^2 & (11)^2 & (12)^2 & (13)^2 & \end{array}$$

$$100 \ldots 100+20+1 \ldots 100+40+4 \ldots 100+60+9 \ldots$$

$$100 \ldots 100+2\cdot 10+1 \ldots 100+4\cdot 10+4 \ldots 100+6\cdot 10+9 \ldots 100+2\cdot a\cdot 10+a^2$$

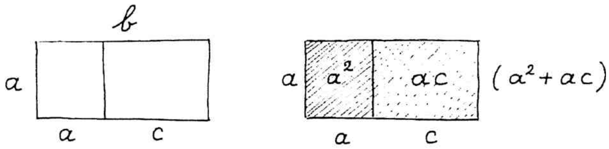
Exemple 3

Le chemin inverse : on donne la « recette » et on demande de reformer la suite de nombres. Cela nous amène à la substitution [remplacement d'une lettre par sa valeur]. D'une certaine manière, ceci a déjà été pratiqué lors du travail avec des fractions concrètes.
Lors des calculs avec remplacement d'une lettre par une valeur, on ne pratique pas seulement le calcul habituel, mais aussi le calcul avec des nombres négatifs et des lettres, ainsi que la manipulation des parenthèses.

Géométrie

C'est aussi à partir de la géométrie qu'il faut amener l'algèbre. Pensez par exemple aux formules à trouver pour le périmètre et l'aire du carré, rectangle, parallélogramme et triangle.

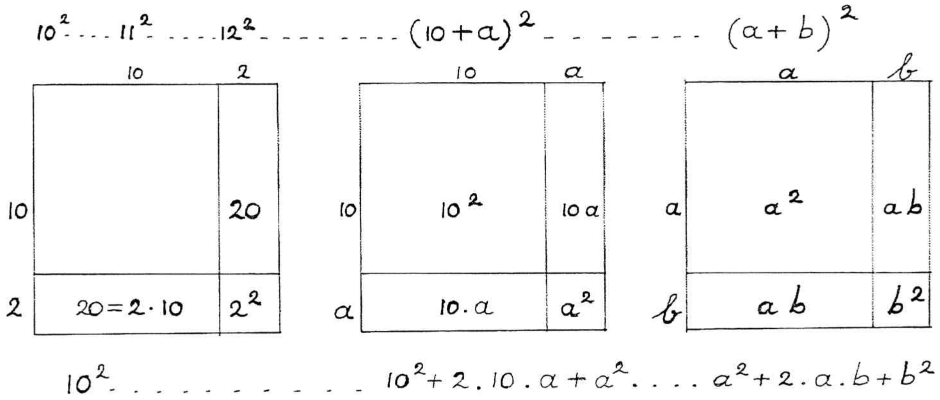
Voici un exemple très différent. Dessiner un rectangle. Mesurer la longueur et la largeur. Calculer la différence, puis le périmètre et l'aire.
On met les calculs dans un tableau, et on fait varier les dimensions du rectangle.



lengte	breedte	verschil	omtrek	oppervlakte
9	4	9−4=	9+4+9+4	9×4=
9,6	3,9	9,6−3,9=	2(9,6+3,9)=	9,6×3,9=
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
b	a	c= b−a	2a+2b= 2(a+b)	a×b=ab a×(a+c)= a² + ac.

Longueur Largeur Différence Périmètre Aire

On peut aussi prendre la suite des carrés, en utilisant les formules d'aire pour les carrés et les rectangles.



Quelques enfants de la classe aident le samedi dans une ferme pédagogique. À partir de cette situation pratique, on a pu développer le problème concret suivant :

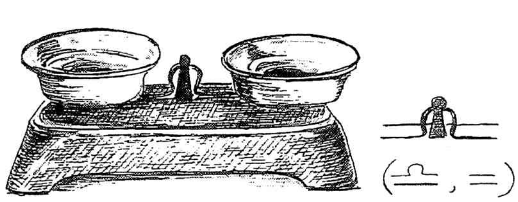
Dans une ferme, on doit clôturer une partie d'une prairie pour avoir du foin pour les animaux. Tout d'abord, on a décidé de prendre un hectare. On en a fait un dessin avec les mesures à l'échelle. Mais on s'est rendu compte plus tard qu'il faut une plus grande surface. Combien faut-il de mètres de clôture en plus lorsque le terrain s'allonge respectivement de 10 m, de 30 m ou de x mètres ?

Le terrain a été ensemencé avec de l'herbe. Le poids de graines nécessaire pour un mètre carré est marqué sur l'emballage des graines. Quelle quantité de semences d'herbe est nécessaire pour une parcelle qui sera prolongée respectivement de 10 m, de 30 m ou de x mètres ? (Cette réponse semble dépendre de la largeur. Comment ça ?) Quel sera le supplément de coût si 1 kg de graines coûte ... ? Et ainsi de suite.

Équations

Les équations sont des cas particuliers de formules. Au cours des années précédentes, des devinettes « Je pense à un nombre... » de plus en plus élaborées ont permis de poser des bases pour l'apprentissage des équations.

J'ai emprunté une ancienne balance à plateaux qui était exposée dans la vitrine de mon marchand de légumes. Lorsque les plateaux étaient en équilibre, l'aiguille était exactement perpendiculaire à deux « lignes » parallèles.



Éric a voulu représenter ma devinette de nombre à l'aide d'une collection de petits blocs de même poids : « Je pense à un nombre, je lui ajoute 5 et le résultat est 12. Quel était mon nombre ?» Il place un sachet blanc vide sur l'un des plateaux. Il y place aussi cinq blocs, et ensuite douze blocs sur l'autre plateau. Pas de problème ! Le nombre inconnu, bien sûr, c'était 7 : il fallait mettre sept blocs dans le sac pour mettre la balance en équilibre.

Ce nombre inconnu, on lui a donné le nom x et on l'a écrit sur le sac. Maintenant, nous avons aussi pu écrire :

$x + 5 = 12$

$x = 7$

Plus tard, nous avons fait une autre expérience avec les plateaux : Anne-Marie a voulu remplir le sac où x est écrit avec un nombre de blocs connu seulement d'elle et de moi. Ensuite elle l'a fermé. Nous avons chuchoté un moment, après quoi nous avons fait la déclaration suivante à la classe : $x-3=9$. *Anne-Marie a mis le sac sur un plateaux et neuf blocs sur l'autre.*

Que faire maintenant ? Il n'y avait pas d'équilibre ! Il y avait des enfants qui savaient bien que la réponse était 12, mais qu'en était-il de l'équilibre ? Après toutes sortes d'idées, Joris a trouvé une solution : « On ajoute d'abord trois blocs sur les deux plateaux. » « Très bien, mais pourquoi ? Et qu'est-ce que nous écrivons maintenant ? » ai-je demandé. « Si on peut enlever trois blocs, il faut d'abord en mettre trois des deux côtés. On peut toujours changer de la même façon les deux plateaux, non ?! Et puis maintenant on peut enlever trois blocs dans le sac. » On peut alors écrire : $x-3+3=9+3$.

$x=12$

À partir de l'expérience qu'avec une égalité on peut faire tout ce qu'on veut, à condition de le faire des deux côtés de la balance (signe égal), les enfants explorent les actions suivantes :

- Ajouter un certain nombre des deux côtés.
- Soustraire un certain nombre des deux côtés.
- Multiplier les deux côtés par un nombre.
- Diviser les deux côtés par un nombre.

Les enfants pensent d'eux-mêmes à des problèmes à réaliser lors de l'expérimentation. Un petit groupe de la classe reçoit la balance afin de pouvoir tirer des conclusions expérimentalement.

Tout cela s'appuie sur les conseils de Rudolf Steiner d'aussi développer les équations juste à partir de la vie pratique. À partir d'histoires de calcul, les enfants distillent alors les inconnues x et l'équation [?]. ?

Exemple

Nous avons vu durant la période d'anthropologie que nous pesons à peu près autant que ce que notre taille dépasse le mètre. « Anja et Ben pèsent 63 et 78 kg respectivement. Quelle est à peu près leur taille ? Ecris une équation relative à cette question. » Certains on écrit $t=100+p$ et d'autres ont écrit $p=t-100$, ce qui montre que certains enfants raisonnent à partir de ce qui est demandé et d'autres à partir des données.

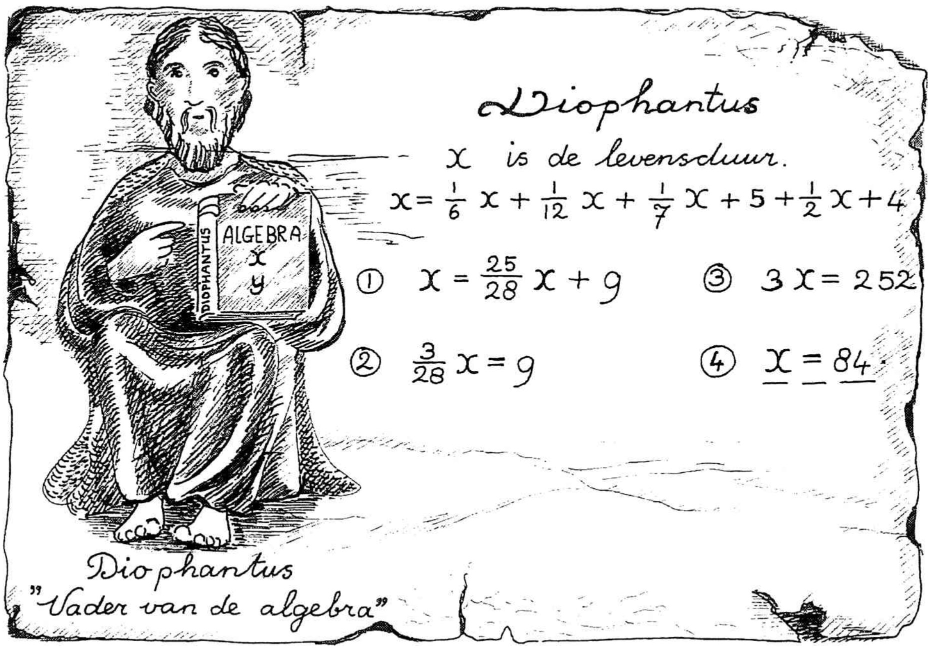
Après une certaine pratique, ce qui suit peut être proposé comme un véritable défi.

Exemple historique

Diophante est parfois appelé le « père de l'algèbre ». Il a vécu entre le 3^{e} et le 5^{e} siècle. Par hasard nous savons à quel âge il est mort, parce qu'un de ses admirateurs a transformé la durée de sa vie en une énigme algébrique :

> Sur la tombe de Diophante on pouvait lire :
> Passant, c'est ici le tombeau de Diophante.
> C'est lui qui t'apprend le nombre d'années qu'il a vécu.
> Sa jeunesse en a occupé la sixième partie de sa vie. Puis sa joue se couvrit d'un premier duvet pendant la douzième partie. Il passa encore le septième de sa vie avant de prendre une épouse et, cinq ans plus tard, il eut un bel enfant qui après avoir atteint la moitié de l'âge final de son père, périt d'une mort malheureuse. Son père lui survécut quatre années.
> De tout ceci, déduis son âge.

Essaie de mettre la biographie dans une formule. Quelle est l'équation de cette histoire ? Quel âge avait Diophante quand il mourut ?



x est la durée de sa vie

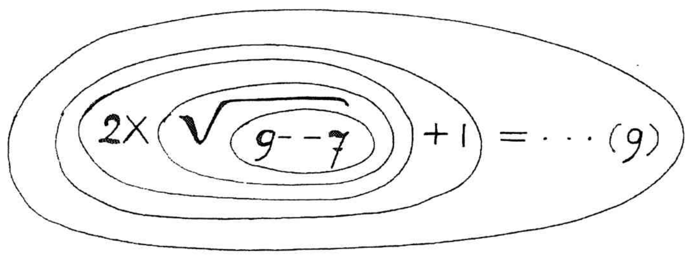
Diophante
« Père de l'agèbre »

Faites chercher les enfants eux-mêmes une vie à transformer en énigme algébrique !

Des équations « Je pense à un nombre » sont un bon exercice pour réviser en début de journée. Lorsque la réponse a été trouvée par calcul mental, les enfants écrivent chaque jour une telle devinette avec des « coquilles d'oeufs ».

Exemple

Prenez le nombre 9 ; enlevez —7, prenez la racine, doublez le résultat, ajoutez 1.
Quel est le résultat ?



autrement : anders : $2\times(\sqrt{(9--7)}) + 1 = x$

Faites inventer par les enfants à tour de rôle une telle devinette à la maison pour la proposer le jour suivant à la classe.
C'est aussi un bon exercice de faire inventer des exercices où l'on donne le résultat et où il faut trouver le nombre de départ : « Je pense à un nombre, je le ... (et ainsi de suite), et maintenant le résultat est 7 ! » À partir de ce 7, il faut raisonner à l'envers pour retrouver le nombre de départ.

Dans ces exercices, l'ordre des opérations du « trajet aller » est indiqué par un nombre de plus en plus grand de « coquilles » que les enfants apprennent ensuite à remplacer par des parenthèses. La formulation

du « trajet retour » se fait en enlevant les « coquilles » ou parenthèses morceau par morceau. On voit alors que chaque opération se transforme en son inverse.
En s'exerçant régulièrement, les enfants peuvent écrire et résoudre des équations aussi bien à partir de ce qui est connu que de ce qui est inconnu.

Ainsi, les équations à une inconnue sont introduites en septième classe. C'est précisément à cet âge que les enfants recherchent de nouveaux équilibres intérieurs. Les équations offrent un très bel écho à cela. Le principe est généralisé dans les années suivantes. Outre la résolution d'équations du premier degré à une inconnue plus complexes, on aborde aussi en huitième classe la résolution de deux équations linéaires à deux inconnues. Lorsqu'on le fait, il est intéressant de le développer à partir du calcul (mental). On peut par exemple faire ceci.

Exemple : « Je pense à deux nombres, ensemble ils font 12. Quels peuvent être ces nombres ?"

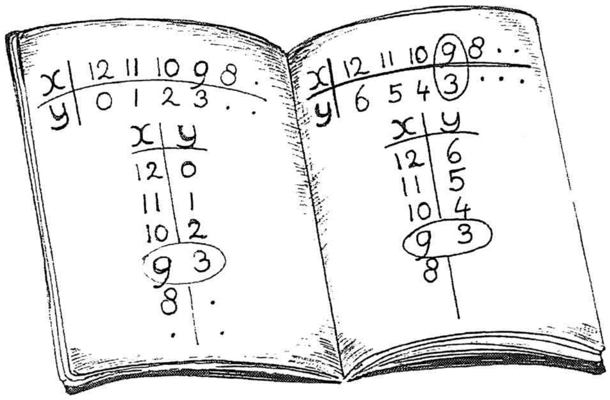
On découvre vite qu'il existe une infinité de possibilités. On peut en noter certaines dans une table. Si on appelle ces nombres x et y, alors une telle table ressemble à ceci :

x	12	11	10	9	8 ...
y	0	1	2	3	....

of

x	y
12	0
11	1
10	2
9	3
8	.
.	.
.	.
.	.

On ne peut pas dire de manière plus précise de quels nombres il s'agit. Cela change si on donne une deuxième caractéristique. Par exemple, la différence des deux nombres vaut 6. On construit également une table à partir de cette deuxième relation :



En comparant les deux tableaux, on trouve que les valeurs 9 pour x et 3 pour y remplissent les deux conditions.

De la même manière, on peut également explorer des problèmes pratiques, dans lesquels deux propriétés ou conditions peuvent être associées à des inconnues.
Exemple : c'est l'anniversaire de Robert et toute la classe est invitée à la fête. Les camarades de classe décident de donner un cadeau commun. Ensemble, il récoltent 60 florins. Jessy a acheté trois CD. Et trois bons

marqueurs. Chaque CD était trois fois plus cher qu'un marqueur. Que coûte un CD et un marqueur ? Essaie de mettre la question sous forme d'équation [6].

Plus tard, dans les grandes classes, on étudiera les manières plus algorithmiques de résoudre ces systèmes d'équations.

4 Géométrie

« Maîtresse, quand est-ce que nous allons refaire ces beaux dessins avec le compas et tout ça ? » En 6e, cette matière avait clairement fait vibrer une corde chez les élèves. Les dessins à la règle et au compas, magnifiquement colorés, décoraient déjà depuis longtemps le mur au-dessus du porte-manteau. Mais comme pour d'autres thèmes, il faut accomplir un pas supplémentaire en géometrie durant la 7e classe.

Durant l'année précédente, les constructions géométriques s'étaient vraiment bien reliées à des exercices déjà connus à partir du dessin de formes. Les nouvelles connaissances avaient parfaitement pu s'intégrer dans la beauté. « Beauté », ce leitmotif pour le vécu des enfants dans le premier cycle se complète maintenant de plus en plus souvent avec celui des grandes classes : « vérité ». Et pour cela, il faut mobiliser de plus en plus la pensée personnelle.
Dans l'enseignement des mathématiques et donc aussi en géométrie, les enfants sont maintenant mis au défi de « penser ». À partir de la puberté, penser et expérimenter se développent l'un à partir de l'autre. Une lutte se déroule pour dresser un pont entre beauté et vérité, à partir de ce qui semble vivre séparément dans l'art et la science.
À la fin de l'école, en 12e classe, le fil conducteur est « re-lier ». Pour celui qui dépasse la puberté de cette manière, les mots de Goethe prennent tout leur sens :
« Celui qui possède science et art, il *a* aussi la religion. Mais celui qui ne possède que l'un d'entre eux, qu'il *ait* la religion. »

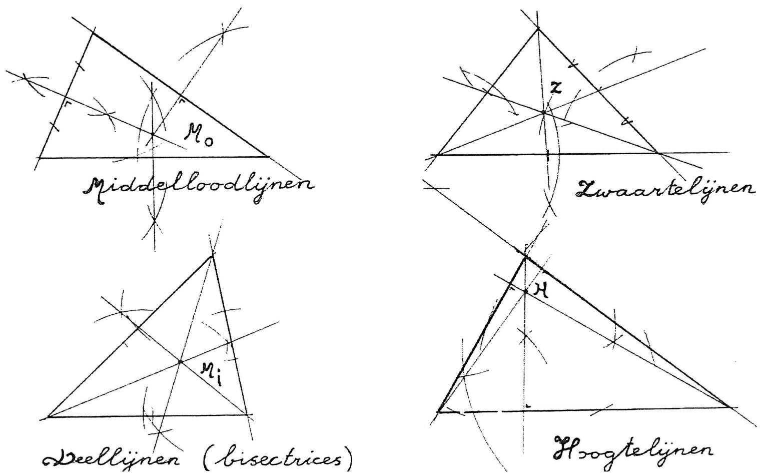
Étendre les constructions et les caractéristiques des figures

Le matériau de la période de géométrie de la 6e devra être repris. Pour que le travail à la règle et au compas revienne dans les doigts, on peut commencer avec des exercices comme celui-ci :

> Construire un cercle contenant un hexagone et un triangle isocèle, avec leurs sommets sur la circonférence du cercle. Faire apparaître clairement la construction en utilisant des couleurs. Relier ensuite les sommets des figures les uns avec les autres. Quelles sont les autres figures géométriques qui apparaissent alors ?

Au moyen des cinq constructions de base apprises en 6e, on peut explorer les lignes particulières des triangles : médiatrices , médianes, bissectrices et hauteurs.

6. J'ai laissé l'exemple avec la monnaie hollandaise. Il faut l'adapter à un contexte réaliste aujourd'hui.



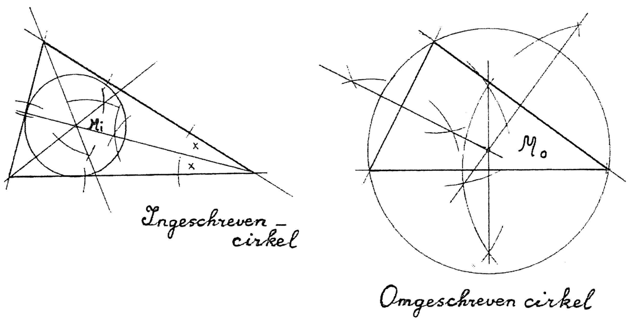
médiatrices *médianes,*

bissectrices *hauteurs*

Nous explorons ensuite les propriétés des intersections de ces lignes : le centre de gravité, les centres des cercles circonscrit et inscrit.

Chacun construit et découpe un triangle dans du carton rigide avec les médianes dessinées bien nettement. Je ne réponds pas la question « Quelle est la taille du triangle ? ». Le résultat est une gamme de différents triangles, de minuscule à très grand ! Je suspends quelques beaux spécimens par un sommet. « Est-ce que la médiane qui part de ce sommet est vraiment verticale ? Ou fait-elle seulement semblant ? » Nous avons vérifié avec un fil à plomb. « Maîtresse, quand je mets la pointe de mon compas sous le centre de gravité, le triangle reste en équilibre. Juste comme une balance. »

Les enfants sont étonnés de voir que c'est comme cela pour presque tous les triangles. Mais celui de Pierre tombe par terre, même quand Marie essaie de le mettre en équilibre sur la pointe de son propre compas. Comme nous avons déjà eu la période de physique dans laquelle nous avons étudié les leviers, Pierre se rend vite compte que quelque chose ne va pas et, avec l'aide des autres, il découvre qu'il n'a pas dessiné les médianes mais les hauteurs. Voilà ce problème vite réglé !



cercle inscrit

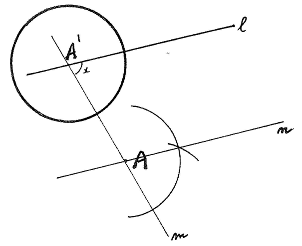
cercle circonscrit

Au cours de ces exercices de construction, on peut demander aux enfants : « Pourquoi pensez-vous que l'intersection des médiatrices est le centre du cercle circonscrit ? Décrivez cela avec vos mots. »

« Quelles autres figures ont aussi un cercle circonscrit ? » En groupes, les enfants peuvent répondre à de telles questions. Ensemble, on peut toujours plus que chacun pour soi.

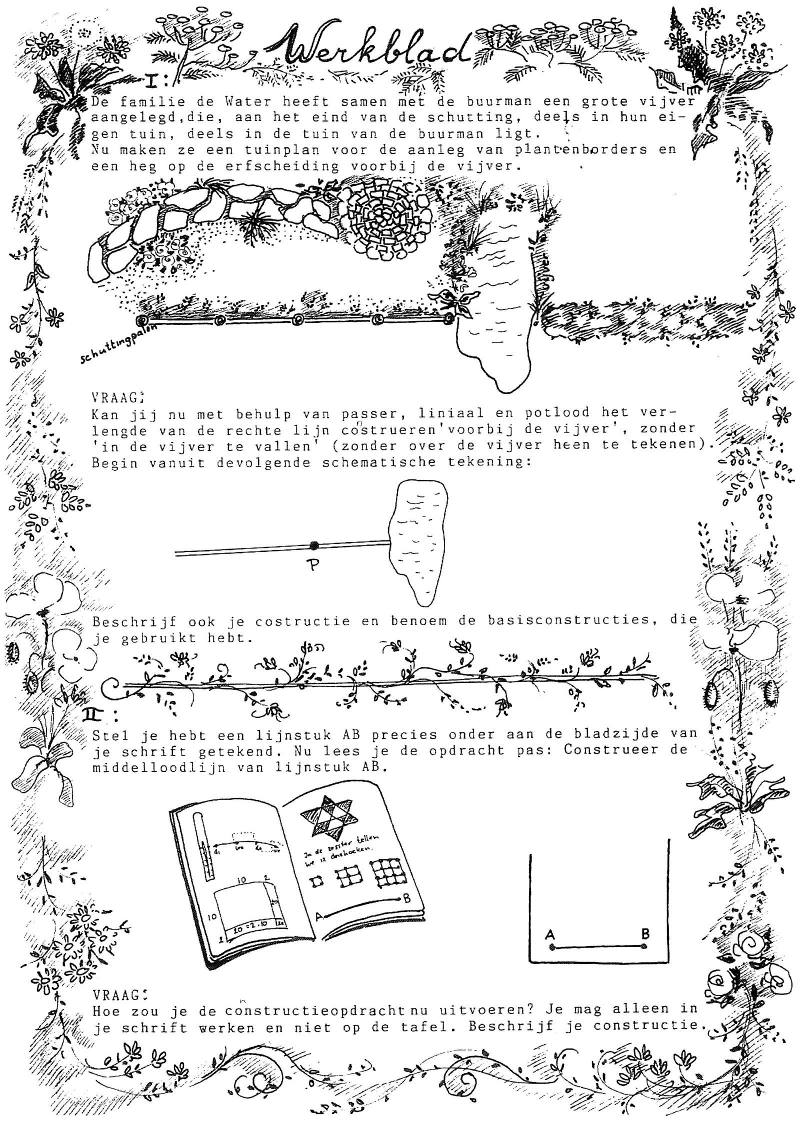
Toutes les exercices de septième sont l'occasion d'introduire une notation : majuscules pour les point (sommets), minuscules pour les côtés et les lignes droites (ℓ, m, n, ...) et aussi des signes pour des segments de même longueur, le parallélisme ||, et ainsi de suite.

Une nouvelle construction en septième : par un point donné, construire une ligne droite parallèle à une ligne droite existante.



* Dessine dans ton cahier une ligne ℓ et un point A en dehors de la ligne.
* Dessine maintenant une ligne m par A qui coupe ℓ et nomme A' l'intersection de m et ℓ.
* Construis un cercle de centre A' et appelle B' le point d'intersection avec ℓ.
* Reporte l'angle x entre m et ℓ vers le point A à partir de m, avec l'aide du cercle de centre A',
* Construis une ligne n qui passe par les points A et B (qui vient d'être construit sur le nouvel arc de cercle).
* On a maintenant $n \parallel \ell$.

Sur une feuille d'exercices, nous pouvons maintenant proposer quelques applications dans lesquelles les constructions connues seront pratiquées.



Feuille de travail

I. La famille DELEAU possède avec la famille voisine une mare dans un grand jardin qui, au bout de la clôture, se trouve en partie dans leur propre jardin et en partie dans le jardin des voisins.

Ils font un plan du jardin pour la construction d'une bordure végétale et d'une haie pour la séparation derrière l'étang

QUESTION

Peux-tu construire avec un compas, une règle et un crayon le prolongement de la ligne droite « au dessus de la mare », sans tomber dedans (sans dessiner sur la mare) ? Commence par le schéma suivant:

Décris ta construction et nomme les constructions de base que tu as utilisées.

II. Suppose maintenant que tu as dessiné une ligne *AB* exactement au bas de la page de ton cahier. Après avoir fait ce dessin, tu lis la consigne : « Construis médiatrice de *AB* ».

QUESTION:

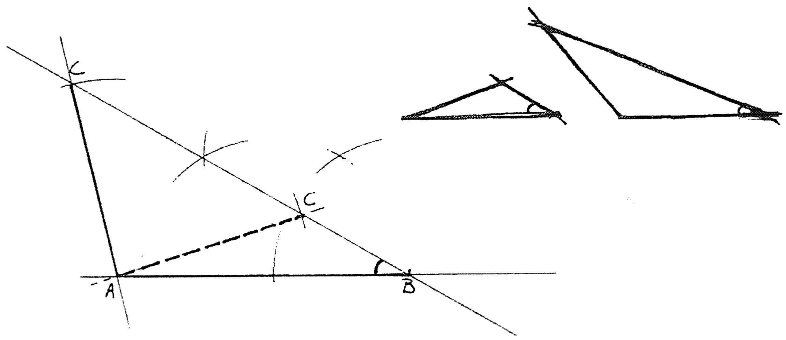
Comment construire cela ? Tu peux seulement travailler dans ton cahier et pas sur la table !
Décris ta construction.

Figures isométriques

Deux figures qui se superposent parfaitement sont appelées isométriques [7]. En 7e, on examine les cas d'isométrie des triangles. En 6e, on a construit des triangles dont trois mesures étaient données. Après avoir découvert et étudié les cas d'isométrie CCC, CAC et ACA [8], on peut faire un exercice comme celui-ci :

Ce matin, j'ai donné l'exercice suivant : « Construire un triangle ABC avec les données suivantes : $AB = 6$, $AC = 4$ et l'angle en B vaut 30°. »

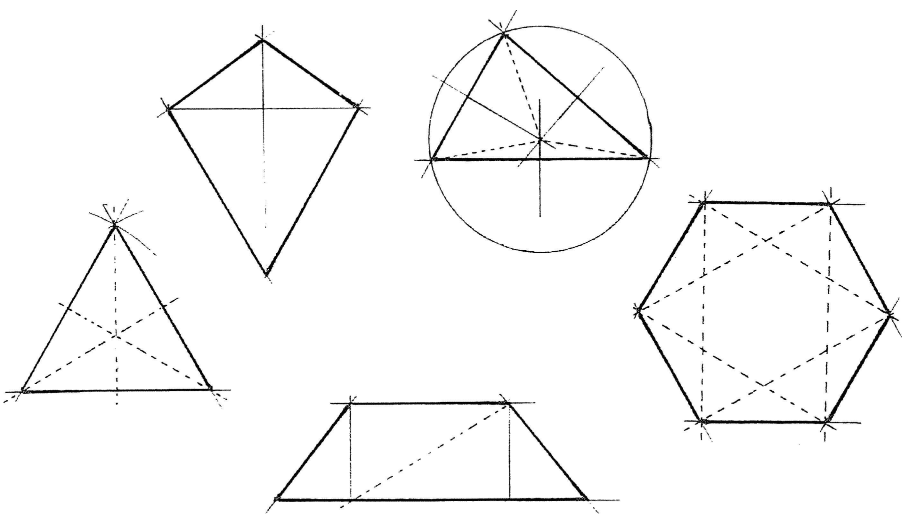
Juste après, on a vu que tous n'avaient pas trouvé la même solution. « Et alors ?! »



Joris qui n'arrête jamais de faire tourner son compas, a découvert plein d'étonnement qu'il y a « deux possibilités pour le même dessin » ! « Est-ce que c'est toujours possible ? » demande Iris.

Nous avons décidé d'explorer cela. Ensemble, nous sommes arrivés à la conclusion que l'on peut construire un angle obtus et un angle aigu.

La satisfaction est grande quand les enfants découvrent eux-mêmes le cas CCA.
Il est important de donner régulièrement l'occasion aux élèves de faire leurs propres découvertes. Les enfants peuvent aussi se poser mutuellement des questions, par exemple celles de reconnaître des triangles isométriques dans toutes sortes de figures.



7. Dans la notion d'isométrie, il y a l'idée de mesure. Deux figures sont isométriques lorsque toutes leur mesures (angles et longueurs) sont égales. Pour vérifier si deux figures sont superposables, il n'est pas nécessaire de mesurer... C'est pour cela que l'on parle parfois de figure *congruentes*. Mais le langage mathématique courant parle bien de figures isométriques pour des figures superposables (NdT).
8. CCC : « coté, côté, côté », CAC : « coté, angle, côté », CAC : « angle, coté, angle ».

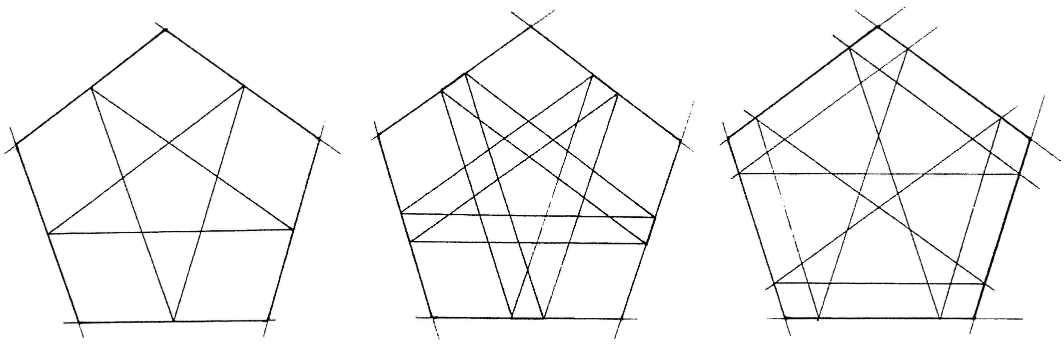
La somme des angles d'un triangle vaut 180 degrés

« Aujourd'hui, nous examinons un théorème célèbre ! Construisez deux triangles isométriques. Un dans le cahier et l'autre sur une feuille de dessin séparée. » On découpe ensuite ce dernier et l'on colorie les angles correspondants des deux triangles dans la même couleur. Nous avons découpé le triangle « libre » pour pourvoir coller deux des angles de part et d'autre du troisième angle dans le cahier, et le dernier sur celui du cahier.
C'est comme cela que nous avons découvert que la somme des angles vaut 180° dans tous les triangles.

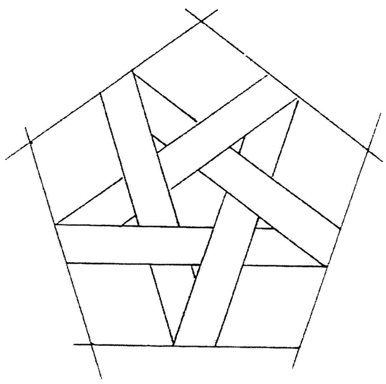
Constructions particulières

Les élèves de septième apprennent également la construction du pentagone et de la section dorée. Les enfants sont impressionnés de découvrir dans des livres d'art et d'histoire comment ces constructions étaient déjà utilisées en architecture et en peinture durant l'Antiquité et la Renaissance.

En plus des constructions, on peut également faire des dessins de forme. Voici un bon exercice : dans un pentagone, réaliser des métamorphoses de l'étoile à cinq branches avec un « mouvement continu ».



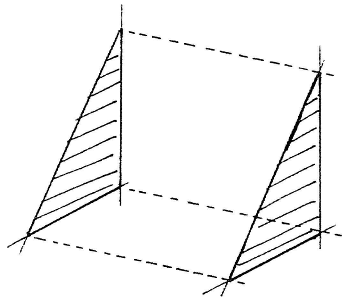
Pour finir, la réalisation du dessin (difficile) avec des entrelacs dans le pentagone pourra apporter une énorme satisfaction aux enfants.



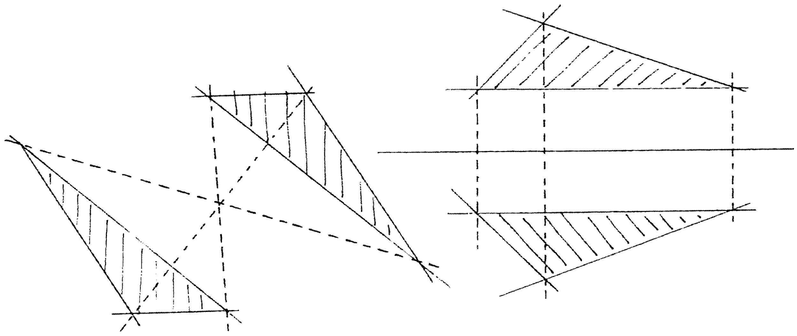
Translation, symétries, rotation, agrandissements (8e classe)

Ce qui se passe dans les translations, rotations et symétries, les enfants le savent déjà grâce aux dessins de formes des classes précédentes. Ils doivent maintenant en apprendre les lois par le biais des constructions. Manifester le mouvement par la couleur permet d'augmenter la conscience de ce dernier.

Translation



Symétries axiale (miroir) et centrale (par rapport à un point)



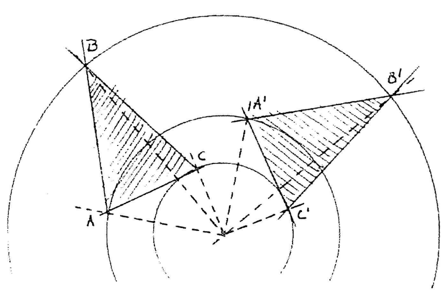
Durant la période de physique, nous avons beaucoup expérimenté avec des miroirs. Les expériences qui ont été faites peuvent être rappelées. Comment se passait encore la réflexion d'un objet dans deux miroirs formant un angle de 90° ? Est-ce qu'on peut le construire ?

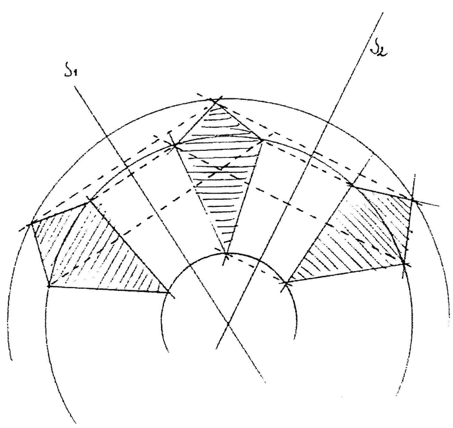
Rotation

Nous exerçons la rotation avec différents angles. Que découvrent les enfants lors d'une rotation de 180° par exemple ? et de 360° ? Que se passe-t-il si le centre de rotation se trouve à l'intérieur de la figure ?

On aborde aussi les « symétries de rotation ». Les enfants peuvent rechercher eux-mêmes ce que cela peut signifier. Des exercices avec des figures particulières, où rotations et symétries de rotation sont à découvrir, aident au développement de la faculté de représentation.

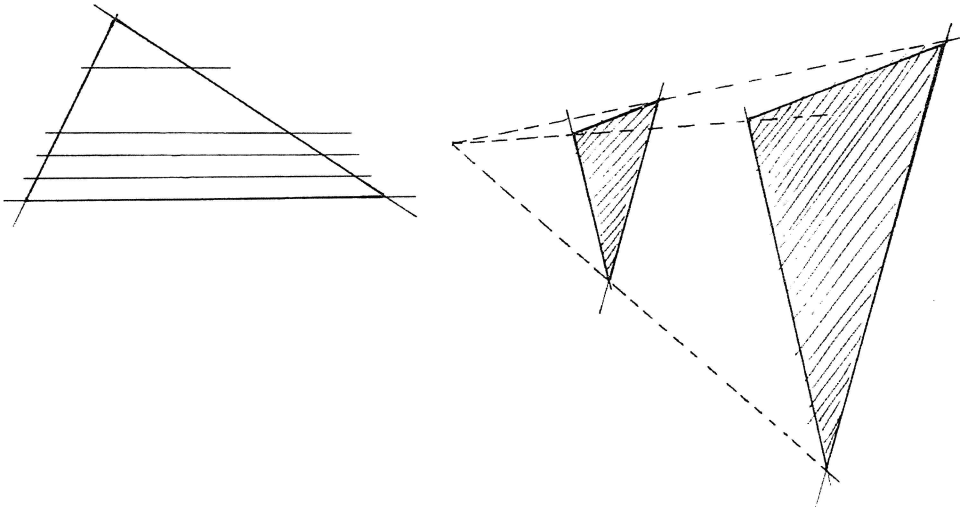
La relation entre rotation et symétrie axiale peut être découverte par les enfants si on leur propose des exercices dans lesquels on demande si la rotation peut également être réalisée par des symétries axiales.





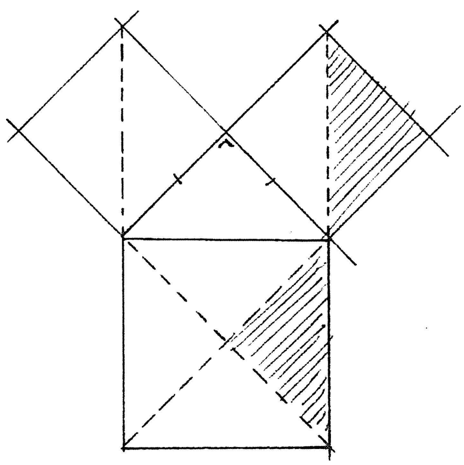
Agrandissement de figures

En 8e classe, nous élargissons le champ des transformations avec les homothéties (agrandissements ou réductions à partir d'un point). Le principe de la « similitude » est développé à partir de là. Le calcul des rapports est repris immédiatement. Par exemple avec des questions comme : « Comment se modifie l'aire d'un triangle lorsque celui-ci est agrandi d'un facteur trois ? »

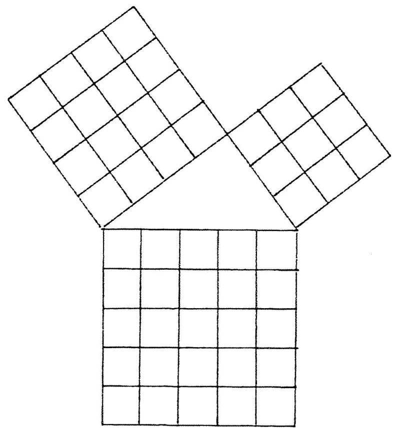


Théorème de Pythagore

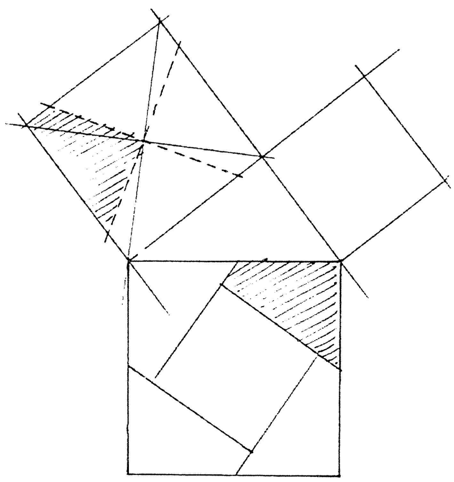
En 5e classe, les élèves ont appris comment les Égyptiens utilisaient la corde à 12 noeuds pour construire des angles droits. Ils ont ainsi fait connaissance avec ce théorème de manière informelle.
Depuis des siècles, il existe de nombreuses preuves géométriques superbes de ce théorème. Avec les enfants, nous pouvons arriver à plusieurs preuves « concrètes » (par découverte) du théorème de Pythagore.
On peut commencer avec un triangle rectangle isocèle. Après avoir dessiné et découpé la figure, on peut montrer, par superposition et mesure, que la surface du grand carré est aussi grande que la surface des deux petits carrés ensemble.



Voici un deuxième exemple. Nous nous rappelons d'abord la période où nous avons découvert les carrés des nombres en lien avec la formule de l'aire d'un carré. Ensuite, les enfants construisent un triangle rectangle avec des côtés de 5, 4 et 3 cm. Sur chaque côté, ils construisent un carré et mettent en évidence l'aire de ces carrés de la façon suivante :



Les enfants peuvent rechercher d'autres triangles rectangles avec des triplets spéciaux comme mesures des côtés : (6, 8, 10), (5, 12, 13), (8, 15, 17), et ainsi de suite.
Enfin, nous pouvons également prouver le théorème pour n'importe quel triangle rectangle. Une des possibilités est, par exemple, la preuve suivante.



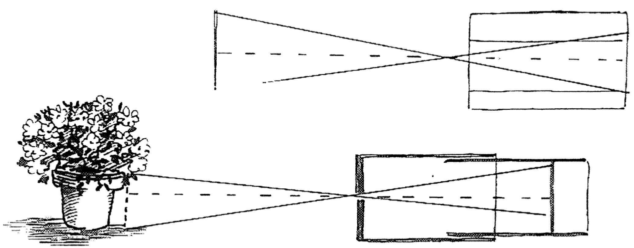
Ce qui est fait est à nouveau dessiné (ou collé). Ce que nous avons découvert est d'abord décrit en mots, puis formulé en concepts et enfin écrit avec les lettres, comme nous l'avons rencontré en travaillant les « formules ». De cette façon, nous arrivons également à la forme bien connue $a^2 + b^2 = c^2$ pour un triangle rectangle dont les côtés sont a, b et c.
La diversité des preuves qui existent pour ce théorème montre le côté ludique et créatif des mathématiques.
Dans les applications, nous pouvons également faire apparaître le théorème de Pythagore dans toutes sortes de problèmes de la vie quotidienne. Voici une feuille d'exercices à titre d'exemple :

Werkblad

I: De zon schijnt precies onder een hoek van 45° op het schoolplein. De grote populier werpt zijn schaduw op het plein.Hoe lang is nu de afstand tussen het topje van de boom en de top van de schaduw?

II: De schilder is aan het werk,; hij heeft een ladder helemaal uitgetrokken om bij de daklijst te komen. Wat moet je nu meten om te kunnen berekenen met behulp van de Stelling van Pythagoras hoe hoog de daklijst is?
Maak een schematische tekening bij je rekenwerk.
Vul de noodzakelijke gemeten waarde in en bereken dan de hoogte van de muur tot de daklijst.

* Pak de camera-obscura, die je maakte in de natuurkundeperiode. Kies een object om naar te kijken en maak een schematische tekening van het object en het beeld op het venster in de 'camera'. Zou je nu kunnen uitrekenen, met behulp van de Stelling van Pythagoras, hoe hoog het beeld van je object wordt? Wat moet je eerst meten alvorens je aan het rekenwerk kan beginnen?



I. Le soleil brille sous un angle de 45° sur la cour de l'école. Le grand peuplier projette son ombre sur la cour. Quelle est la distance entre le sommet de l'arbre et la pointe de l'ombre ?

II. Le peintre est au travail ; il a sorti une échelle qui arrive précisément jusqu'à la corniche du toit. Que dois-tu mesurer maintenant pour pouvoir calculer la hauteur du toit avec l'aide du théorème de Pythagore ? Avant de faire les calculs, fais un dessin schématique. Indique les valeurs qui doivent être mesurées, puis calcule la hauteur de la corniche.

∗ Prends la camera obscura que nous avons construit pendant la période de physique. Choisis un objet à regarder et fais un dessin schématique de l'objet et de l'image que l'on voit sur la fenêtre de la camera.

Peux-tu calculer, en utilisant le théorème de Pythagore, la hauteur de l'image de l'objet ? Que dois-tu mesurer avant de pouvoir commencer le calcul ?

Lieux de points

Ce matin, avec les élèves de 8e classe, nous sommes allés dans la grande salle pour nous mettre à la recherche de figures constituées de points qui répondent tous à une même propriété.

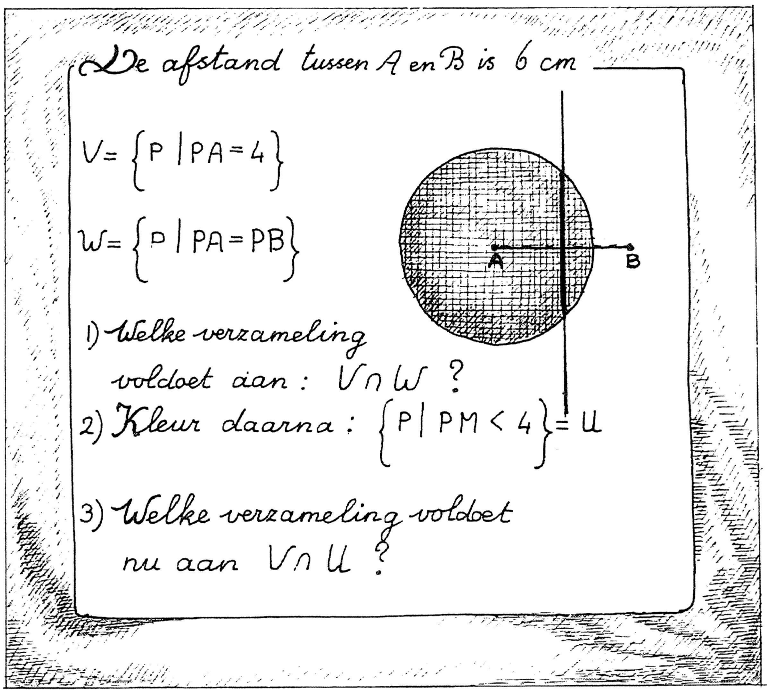
J'ai indiqué à tous les élèves –sauf à Élise– qu'ils devaient se tenir à 3 mètres d'elle. Après une certaine confusion et toutes sortes de mouvements, un cercle est apparu avec un rayon de 3 mètres et Elise comme centre. Ensemble, les enfants ont ainsi formé le lieu des points dont la distance à Elise est de 3 mètres.

Pascal et Émile sont maintenant deux points fixes et cherchent un endroit dans la salle pour s'y placer. Je demande ensuite aux autres de former l'ensemble des points qui se trouvent à égale distance de Pascal et d'Émile. Bien sûr, un certain nombre d'enfants se sont envolés vers le point entre Pascal et Émile, mais bientôt d'autres enfants ont remarqué que ce n'était pas indispensable pour respecter la condition. C'est ainsi qu'est apparue la médiatrice (faite d'enfants) du segment entre Pascal et Émile.

Une fois dans la salle de classe, nous avons commencé à chercher une notation qui serait aussi courte que possible dans les mots et avec des signes appropriés. Par exemple, pour le cercle : $\{P|PM = 3\}$[9].

Les constructions associées à ces questions sont également réalisées dans le cahier. Après cela, les enfants cherchent encore la construction de la parallèle se trouvant entre deux droits parallèles données et aussi les deux bissectrices de deux droites qui se coupent[10].

Ils font aussi des dessins d'intersections de plusieurs lieux de points.



La distance entre A et B vaut 6 cm

V est le lieu des points dont la distance à A vaut 4 cm[11].

W est le lieu des points qui se trouvent à la même distance de A et de B.

1) Quel est le lieu des points qui vérifient les deux propriétés ?

2) Colorie maintenant le lieu de points U dont la distance à A est plus petite que 4.

3) Quelle est le lieu des points communs à V et U ?

Dans cette période, nous pouvons aussi rencontrer l'ellipse comme lieu de points, comme l'ensemble des points dont la somme des distances à deux points fixes est constante, ainsi que l'hyperbole, la lemniscate, les cercles d'Apollonius. Ceux-ci sont trouvés par une différence constante, le produit et le quotient[12]. Il

9. Cette notation mathématique est certes utilisée en mathématiques et fut introduite dans les classes lors de la réforme des maths modernes, il y a maintenant quelques décennies. Mais il ne me semble pas utile de l'introduire ici. En France, elle est peu utilisée en classe maintenant. Par contre, exprimer ce lieu de points sous forme de phrase me paraît bien plus utile (NdT).

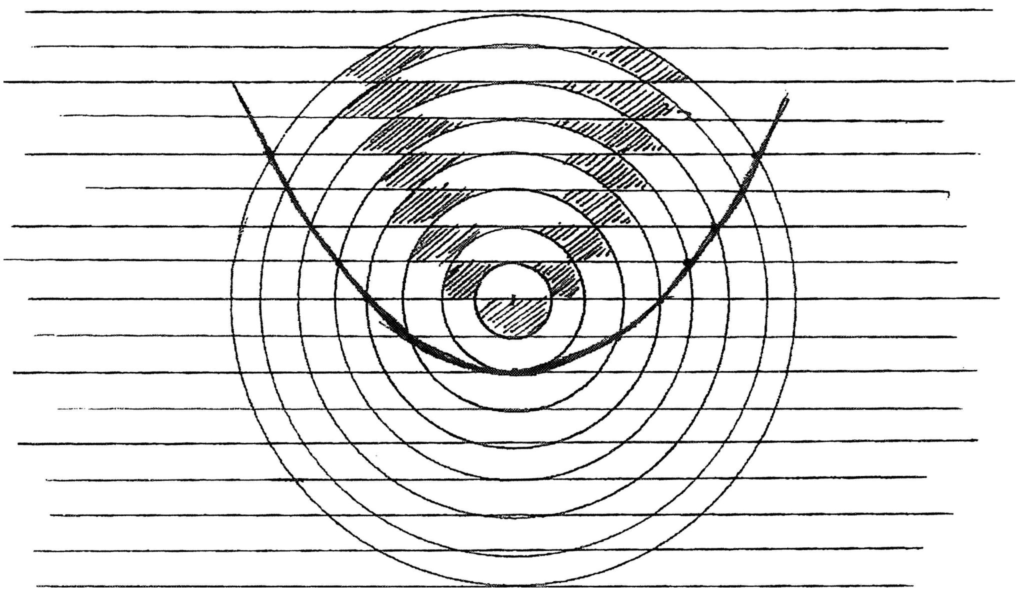
10. La question est maintenant : où se trouvent les points qui sont à la même distance des deux droites (NdT).

11. Voir note de bas de page 9

12. Dans le plan scolaire originel, cette période sur les *coniques* et les lieux de points est proposée pour la 8e classe, mais dans

est toujours surprenant pour les élèves d'expérimenter l'influence des quatre opérations de base dans ces constructions.

Enfin, nous consacrons notre attention à la parabole, où tous les points sont à la même distance d'un point fixe et d'une ligne droite.



En préalable à cette période de mathématiques, les enfants ont acquis toutes sortes d'expériences pour déterminer des « lieux » au cours des années précédentes. Non seulement dans d'autres périodes, telles que la géographie (astronomie) et la physique, mais aussi dans les cours d'eurythmie et peut-être pendant les chasses au trésor nocturnes durant des voyages de classe. Il s'y est avéré que ceux qui savaient bien s'orienter spatialement et dont les capacités de représentation étaient bien développées pouvaient se déplacer librement, selon leur propre manière de voir, vers un point fixe (but).

Maintenant que les élèves de la huitième classe sont complètement pubères, nous voyons la rigidité et l'immobilité aller de pair avec l'émergence de la mobilité dans la pensée. La particularité des cours de géométrie à cet âge est que les enfants expérimentent comment le mouvement se relie à un endroit sur la terre, puis s'arrête. Ce n'est que par la pensée que les figures bougent à nouveau.

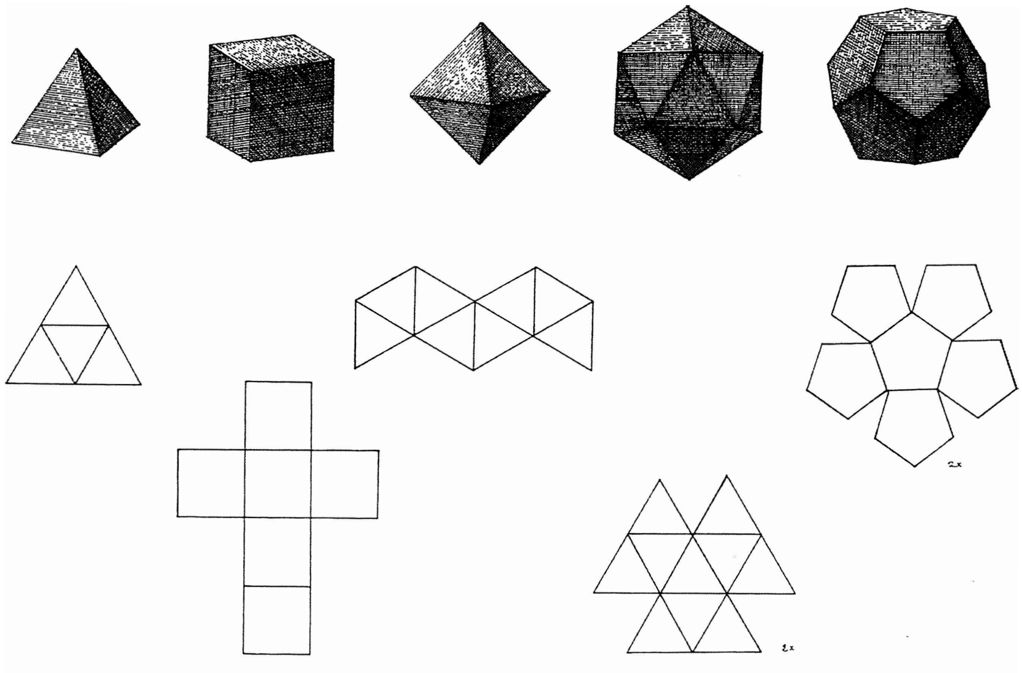
La recherche de lieux de points pourra être étendue. En lien avec le monde des nombres et à la ligne des nombres, la position d'un point en tant que paire de coordonnées dans le plan apparaîtra naturellement.

Corps platoniciens

À la fin de la 8e classe, les enfants fabriquent les corps platoniciens en carton coloré [13]. Peut-être les a-t-on d'abord moulés en argile, après quoi les élèves recherchent eux-mêmes ce qui apparaîtra à partir d'un développement (où doit-on placer les rubans adhésifs ?). Après cela, les propriétés peuvent être rassemblées dans un tableau.

beaucoup d'écoles Waldorf, elle se fait maintenant en 9e classe. Il est bien sûr utile de se coordonner avec le professeur de mathématiques de 9e (NdT).

13. Comme pour les coniques, les corps platoniciens sont abordés dans certaines écoles en 9e classe (NdT).



Figuren	Aantal vlakken	Aantal hoeken	Aantal ribben	Grootte v/d hoeken van de zijvlakken
Tetraeder				
Kubus				
Octaeder				
Pentagon dodecaeder				
Ikosaeder				

Figures	*Nombre de faces*	*Nombre de sommets*	*Nombre d'arêtes*	*Mesure des angles des faces*
Tétraèdre				
Cube				
Octaèdre				
Dodécaèdre				
Ikosaèdre				

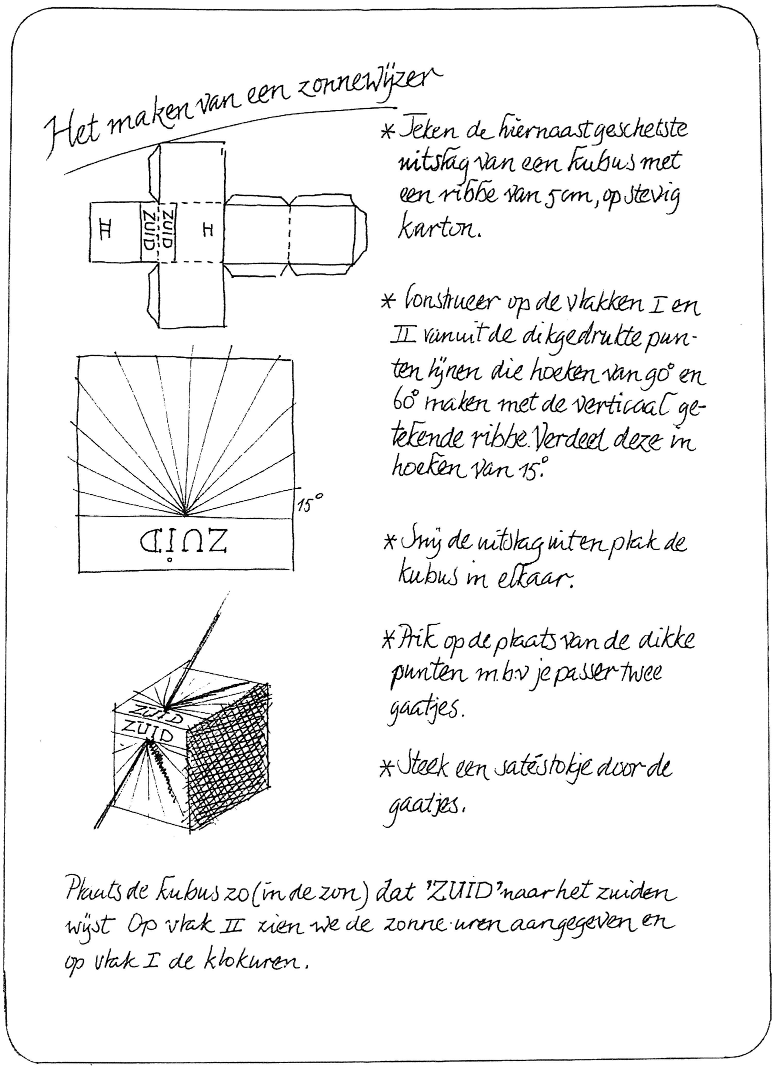
Une introduction à la géométrie de l'espace de neuvième classe, que les élèves n'oublient jamais !

5 Activités intégrées

Des activités mathématiques peuvent être intégrées dans toutes sortes de périodes tout au long de l'école. Par exemple, en relation à une actualité, une fête, un voyage, ou une fenêtre cassée par un élève et dont la réparation doit être payée... Dans ces cas, les élèves appliquent leurs mathématiques dans des situations concrètes. C'est que nous appelons *activités mathématiques intégrées*. Les cours de calcul peuvent également être vivifiés par de telles activités, que ce soit pour remplacer des heures ennuyeuses d'exercices ou pour faire apparaître que les maths ont une utilité pratique. Chaque école devrait pouvoir rassembler un certain nombre de d'activités intégrées sur des fiches de travail. Quelque chose comme cela serait aussi très utile en cas de remplacement d'un professeur. Et cela profitera aux facultés mathématiques des élèves s'il y a dans chaque classe un bac avec de telles fiches adaptées à l'âge.

Suggestions d’activités intégrées

Exemple 1 à partir de la période d’astronomie de 7e classe : le cadran solaire.



<u>*Construction d’un cadran solaire*</u>

- *Dessine sur un carton bien rigide le développement d’un cube comme celui qui est esquissé ici, avec des arêtes de 5 cm.*
  [ZUID = SUD]
- *Dessine, à partir du gros point sur les faces I et II, des lignes qui font des angles tous les 15° avec la ligne horizontale (entre 0° à 180°).*
- *Découpe le développement et construis le cube.*
- *Perce deux trous sur les gros points des faces I et II, par exemple avec ton compas.*
- *Place un batonnet (par exemple pour brochettes) dans le cube par les deux trous.*

Place le cube au soleil de telle manière que SUD soit orienté vers le sud. Sur la face II, on peut indiquer les heures solaires, et sur la face I, les heures de l’horloge.

Exemple 2 tiré de la période d’histoire romaine « La table de Peutinger ».

La table de Peutinger est une copie du XIIIe siècle d’une ancienne carte romaine. Les distances entre les villes romaines d’alors sont notées en chiffres romains qui indiquent le nombre de lieues. La lieue est une unité de mesure gauloise qui correspond à environ 2 220 mètres.

Ensemble, nous avons regardé la distance entre NOVIOMAGI (Nijmegen) et CEUCLIUM (Cuyk). Selon la Carte de Peutering, c’est III lieues. Après conversion, cela fait donc $3 \times 2220 = 6660$ mètres. C’était approximativement correct quand nous l’avons comparé à la carte ANWB.

« Prends un grand compas et essaie de découvrir par toi-même à quel endroit peut correspondre le nom BLARIACO qui se trouve sur la Meuse à XXV lieues de NOVIOMAGI. Si tu n’as pas d’idée pour commencer, utilise une ou plusieurs des suggestions ci-dessous. »

(*Suggestion* 1 : Pense à ce que tu peux FAIRE avec un compas.)

(*Suggestion* 2 : Utilise une carte routière, le centre de Nijmegen et un grand compas.)

(*Suggestion* 3 : Regarde l’échelle sur la carte et prends en compte la relation entre lieues et kilomètres.)

Exemple 3 après la période de météorologie

Regarde la température extérieure tous les matins à 8h25.

Note le résultat dans un tableau, n'oublie pas la date.

À la fin du mois, fais apparaître tes observations dans un graphique.

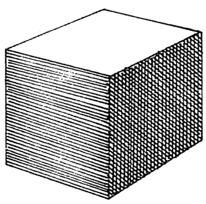
Et ensuite réponds aux questions suivantes :

* Qu'avons-nous fait le jour le plus chaud de ce mois ?
* Entre quels jours la différence de température a-t-elle été la plus grande ? Te rappelles-tu quelque chose au sujet de la météo de ces jours-là ?
* ... (Pense encore à quelque chose toi-même.)

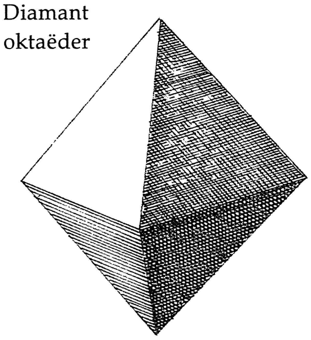
Exemple 4 pendant ou après la période de minéralogie : « Formes cristallines »

Différentes formes cristallines sont examinées et dessinées. Pour cela, des formes géométriques particulières sont une aide à l'organisation et à la reconnaissance.

Keukenzout (Haliet)
kubus



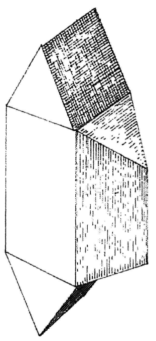
Diamant
oktaëder



Sel de cuisine (Halite)
Cube

Diamant
Octaèdre

Veldspaat
primatisch



Feldspath
Prismatique

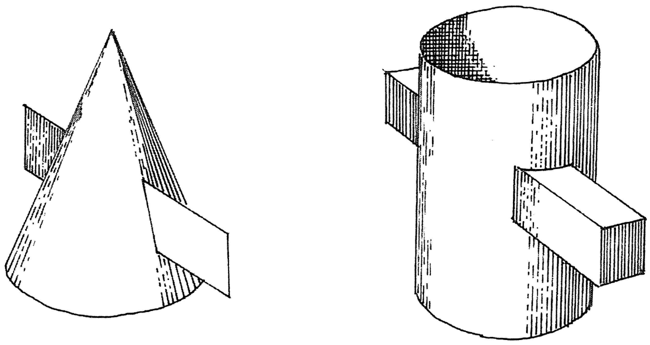
Exemple 5 à partir du dessin d'observation en 7e classe : « Pénétrations »

Dans le programme de dessin de la 7e classe, en plus des dessins d'observation, on trouve des dessins particuliers appelés « pénétrations ». En plus de dessiner des ustensiles ronds, droits, cubiques, les enfants dessinent des figures en 3D avec des effets de pénétration et d'ombre.

De tels dessins peuvent donner lieu au problème suivant :

On voit ci-dessous deux pénétrations, une pyramide ronde traversée par une surface et un cylindre traversé par une poutre.

Dessine ce que tu verrais si ces objets tournaient de 90°.



Choisis toi-même un objet à dessiner. Si possible, dessine aussi quelque chose qui le traverse.

Exemple 6 durant les heures hebdomadaires de calcul

Voici deux activités pour une heure de cours. Ces exercices peuvent être faits en groupes ou individuellement.

1. « Quelle offre choisir ? »

   Nous avons besoin d'un laveur de vitres. Deux laveurs de vitres ont fourni un devis à l'école.

   Offre I.

   Pour toutes les fenêtres, le prix de 3,40€ par m^2 s'applique.

   Offre II.

   Les fenêtres situées à moins de trois mètres de hauteur coûtent 3,00€ par m^2. Pour les fenêtres situées au-dessus de la limite des trois mètres, un prix de 4,20€ par m^2 s'applique.

   Quel nettoyeur de fenêtre recommandez-vous ? Pourquoi ?

2. « Peinture »

   Toutes les portes intérieures de notre école doivent être peintes deux fois. Avec un pot de peinture de 0,75 litre on peut peindre dix mètres carrés.

   Combien de litres de peinture faut-il acheter ? Combien de pots de peinture sont nécessaires ?

   Calculez-le pour nous.

L'avantage des activités intégrées dans les heures hebdomadaires de calcul est que vous avez un peu plus de temps en tant qu'enseignant pour voir comment les élèves font face à la tâche et comment ils parviennent à leurs réponses. Voici un exemple de la façon dont un enseignant a procédé.

Durant l'exercice décrit ci-dessus, je suis passé devant la table de Niels et j'ai vu comment il avait dessiné toutes les portes qu'il pouvait imaginer dans l'école avec une grande précision. « Est-ce que je peux voir s'il y a une porte derrière la petite pièce ?» C'était juste, et juste au moment où Niels est revenu, Anne a montré qu'elle connaissait *la réponse. J'ai été surpris par une feuille « cochonnée » avec quelques nombres gribouillés et au milieu la réponse calculée, triomphalement encerclée.*

À ce moment, j'ai décidé de faire une feuille de travail spéciale pour Anne ainsi que pour Niels pour la semaine prochaine. Niels aura une mission dans laquelle sa faculté de représentation sera suffisante pour faire aussi un certain nombre d'étapes mentalement. Pour Anne, je chercherai un contexte dans lequel l'activité intégrée est suffisamment cachée pour qu'elle ait besoin d'un cadre plus large que le jonglage avec les nombres pour parvenir à une solution. Elle n'a en effet pas pu me dire comment elle était parvenue à sa réponse pour la peinture.