Teorema Elementar Fermat Pereyra

Pereyra, P.H. [1]

pereyraph@gmail.com
www.pereyraph.com

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma demonstração elementar do Teorema de Fermat-Wiles, também conhecido como O Último Teorema de Fermat, utilizando um enunciado diferente mas equivalente e um método de parametrização.

Palavras-chave: Teorema de Ferma-Wiles. Ternas Pitagóricas. Último Teorema de Fermat. Equações Diofantinas. Teoria Elementar dos Números.

[1]Bacharel e Mestre em Matemática Aplicada e Computacional pela UFRGS, Doutorando na AIU Hawaii USA

1. INTRODUÇÃO:

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma demonstração elementar do Teorema de Fermat-Wiles, também conhecido como O Último Teorema de Fermat, utilizando um enunciado diferente mas equivalente e um método de parametrização.

O Teorema intrigou milhares de matemáticos, profissionais e amadores, durante séculos (desde 1665), por causa de uma peculiaridade: o propositor do mesmo, o matemático amador francês Pierre de Fermat alegou que possuía uma prova “maravilhosa” e supostamente elementar, porém não a escreveu devido a falta de espaço nas suas anotações. Tal prova jamais foi alcançada por ninguém que se propôs a obtê-la, até que em 1995 o matemático inglês Andrew Wiles obteve uma prova, porém com conceitos avançados e de difícil compreensão para a grande maioria dos matemáticos [1]. Estes acontecimentos geraram diferentes opiniões, alguns matemáticos acreditam que a suposta prova elementar de Fermat estaria errada ou incompleta, outros acreditam que existe uma prova elementar e mais elegante para o teorema. Para um relato histórico ver [2].

Sugere-se aqui uma leitura repetida para melhor fixar os raciocínios realizados.

2. TEOREMA

(A) *"A equação* $x^n + y^n = z^n$, $n \in N$, $n > 2$ *, não possui solução para x, y e z naturais (ou inteiros) não nulos"*

Consideremos o enunciado equivalente

(B) *"Se existem inteiros co-primos não nulos* (x, y, z) *tal que* $x^n + y^n = z^n$, $n \in N$ *para* $n > 1$*,então n = 2. "*

3. DEMONSTRAÇÃO

Pelo enunciado *(B)* consideramos que existe uma tripla primitiva (x, y, z co-primos, inteiros, não nulos,indeterminados) parametrizados por um inteiro $x \neq 0$, para $n > 1$, como

$$x^n + y^n = z^n \quad , y = x + a \,, \quad z = x + b \quad , n \in N \quad , \ x, y, z, a, b \in Z^* . \qquad (1)$$

Podemos reescrever (1) de uma forma equivalente como (já que o enunciado *(B)* garante $n > 1$)

$$x^n + y^n = z^n \Rightarrow x^{n-1}x + y^{n-1}(x + a) = z^{n-1}(x + b) \Rightarrow x\left(x^{n-1} + y^{n-1} - z^{n-1}\right) = \left(bz^{n-1} - ay^{n-1}\right), \qquad (2)$$

o que implica em que (1) obedece a equação diofantina [3] não linear $bz^{n-1} - ay^{n-1} \neq 0$. Do contrário podemos dizer que valeria a tripla

$$x^{n-1} + y^{n-1} = z^{n-1} \Rightarrow bz^{n-1} - ay^{n-1} = 0 \qquad , \qquad (3)$$

e não (1). Mas por (3) vemos que isto somente ocorre se a equação diofantina $bz^{n-1} - ay^{n-1} = 0$ possuir uma solução segundo a parametrização (1). Para isto tentamos resolver (3) , e como $mdc(y, z) = 1$, por (3) resulta que

$$b = sy^{n-1} \quad , a = sz^{n-1} \quad , \quad s \in Z^* , \qquad (4)$$

e por (1) que

$$s\left(z^{n-1} - y^{n-1}\right) = a - b = y - z . \qquad (5)$$

Agora, por fatoração elementar de polinômios, segue de (5) que $\left(z^{n-1} - y^{n-1}\right)$ sempre é múltiplo de $z - y$, o que nos leva a concluir que $bz^{n-1} - ay^{n-1} = 0$ possui uma solução única dada por (4), com $s = -1$, $n = 2$, válida para a tripla (3). Mas então temos que a tripla (3) existe e é determinada como

$$x + y = z . \qquad (6)$$

Logo, como a existência da tripla (3) foi deduzida da suposição da existência da tripla (1) pela equação (2) , e $n = 2$, segue que a tripla (1) considerada existente é determinada como

$$x^2 + y^2 = z^2 \ . \qquad (7)$$

Portanto, (1) "NUNCA" é uma proposição verdadeira para $n > 2$, *quod erat demonstrandum*.

4. CONSISTÊNCIA LÓGICA

A lógica da demonstração é baseada na abordagem do problema, como um problema na variável *n*, ou seja, *"se existem inteiros co-primos não nulos* (x, y, z) *tal que* $x^n + y^n = z^n$, $n \in N$ *para* $n > 1$*, quem é* n *?"* , ou seja, resolver a equação diofantina $x^n + y^n = z^n$ não linear para n , de maneira que (x, y, z) são indeterminados mas garantidos pela parametrização $y = x + a$, $z = x + b$. O problema se mostra determinado na variável n pela existência da solução para a equação diofantina $bz^{n-1} - ay^{n-1} = 0$ dada por (5), implicando que $n = 2$, e desta forma conclui-se que a tripla (3) existe e é determinada como $x + y = z$. Logo, como a existência da tripla (3) foi deduzida da suposição da existência da tripla (1) pela equação (2) , e $n = 2$, segue que a tripla (1) considerada existente é determinada como $x^2 + y^2 = z^2$.

Cabe ressaltar que as equações diofantinas $bz - ay = 0$ e $bz - ay \neq 0$ definem valores diferentes para as triplas (x, y, z), como podemos notar se consideramos (4) com $s = -1$, e então vale $y = -b$, $z = -a$, e por (6) que

$$x = b - a \quad , \tag{8}$$

e utilizando esta parametrização para a tripla (7) temos que vale

$$x^2 + b^2 = a^2 \Rightarrow x^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow x.x = -(b + a)(b - a) \quad , \tag{9}$$

o que resulta em uma contradição com (8), demonstrando de que não se trata de um problema para mesmos valores de (x, y, z) em triplas consecutivas de potências $n - 1$ e n , e sim generalizado para todas as triplas (x, y, z) válidas em cada potência.

Podemos dizer que o problema é indeterminado nas variáveis (x, y, z), é observar esta afirmação pela solução da equação diofantina $bz - ay = 0$ e da tripla $x + y = z$, considerando novamente (4) com $s = -1$, e então vale $y = -b$, $z = -a$, e por (1) a parametrização é dada por

$$y = x + a = x - z \quad , \quad z = x + b = x - y \quad . \tag{10}$$

Substituindo (10) em (6) resulta em

$$x + (x - z) = (x - y) \Rightarrow x - z = -y \Rightarrow x + y = z \quad , \tag{11}$$

ou seja, uma identidade, portanto a parametrização (10) e a tripla (6) são simultaneamente válidas para valores indeterminados de (x, y, z)

É importante assinalar que a existência da tripla (3) $x^{n-1} + y^{n-1} = z^{n-1}$ não é considerada válida a priori, já que não sabemos se a equação diofantina $bz^{n-1} - ay^{n-1} = 0$ possui solução para a variável n , ou seja, poderia não ter solução e a tripla (3) não existiria, ou ainda ter solução indeterminada e confirmar a existência da tripla (3) mas nada afirmar sobre o valor de n . Logo a tripla (3) não constitui mais um vínculo para o problema, e o único vínculo é dado pela tripla e a parametrização (1).

Numa abordagem numérica é óbvio que para as triplas $x+y=z$ e $x^2+y^2=z^2$ existem soluções determinadas para a parametrização (1). Podemos colocar como exemplo 3+4=7 $(x=3,\ a=1,\ b=4)$ e $3^2+4^2=5^2$ $(x=3,\ a=1,\ b=2)$, mas isto não aparece determinado de uma forma analítica nesta abordagem do teorema, e corresponde a outro problema, o problema bem conhecido de encontrar as triplas (x,y,z) que satisfazem $x+y=z$ e $x^2+y^2=z^2$.

Entretanto o teorema de Fermat-Wiles aparece como um problema determinado para a variável n nesta abordagem , implicando em que $n=2$, e este resultado mostra-se suficiente para sustentar a afirmação de Fermat.

5. CONCLUSÃO

Temos que a parametrização (1) implica na relação (2), que cria uma conexão entre triplas consecutivas de potências $n-1$ e n para uma dada parametrização, conexão esta que sempre existe; e sempre concluímos diretamente que a tripla (3) existe e é determinada como $x+y=z$, e consequentemente que a tripla considerada (1) é determinada como $x^2+y^2=z^2$, ou seja, não é possível a existência de outra tripla para $n>2$.

Segue desta abordagem analítica que o Teorema de Fermat-Wiles aparece como um problema determinado na variável n , ou seja , *"se existem inteiros co-primos não nulos* (x,y,z) *tal que* $x^n+y^n=z^n$, $n \in N$ *para* $n>1$*, então n = 2. "*

6. REFERÊNCIAS

[1] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*. Annals of Mathematics, Vol. 141, n. 3 (1995): 443-551.

[2] SINGH, Simon (1997). *Fermat´s Last Theorem*. Fourth Estate.

[3] LANDAU, Edmund. Teoria Elementar dos Números. Rio de Janeiro: Ed.Ciência Moderna, 2002