Grundlagen der Elektrotechnik 2

Henrik Schulze und Günter Schweppe
Fachhochschule Südwestfalen
Standort Meschede

Vorbemerkungen

Die Lehrveranstaltung *Grundlagen der Elektrotechnik 2 (GE2)* gliedert sich ein in den *analogtechnischen Vorlesungszyklus*, der aus den Lehrveranstaltungen GE1, GE2, Elektronik 1, Elektronik 2 und Hochfrequenztechnik besteht. Wie der Name schon sagt, geht es hier um die elektrotechnischen *Grundlagen*, auf denen die folgenden, stärker auf die praktische Schaltungsentwicklung ausgerichteten Fächer aufbauen.

Vorausgesetzt wird dabei natürlich ein gründliches Verständnis der in GE1 vermittelten Grundlagen. Die Inhalte der Ingenieurmathematik 1 werden ebenfalls vorausgesetzt. Besonders wichtig sind hierbei die komplexen Zahlen. Für Elektrotechniker unverzichtbar ist es, dass das Rechnen mit komplexen Zahlen zur Routine wird. Aus der Ingenieurmathematik 2 wird zum einen etwas Differentialrechnung benötigt. An späterer Stelle bei den Ausgleichsvorgängen kommen auch Differentialgleichungen vor. In der Ingenieurmathematik 2 wird dieses Thema zeitlich parallel behandelt. Dies wird von den Verfassern als Vorteil gesehen, weil hierbei eine schöne Brücke zwischen Theorie und Praxis gebaut wird. Nichtsdestoweniger wurde Wert darauf gelegt, dass die Ausführungen hierzu in diesem Skript auch allein in sich verständlich sind, wenn man bereit ist, einige mathematische Tatsachen als gegeben hinzunehmen.

In Kapitel 1 dieses Buchs werden grundlegende Techniken und Rechenmethoden wiederholt bzw. ergänzt. Wegen der Wichtigkeit dieses Themas wird die komplexe Wechselstromrechnung einschließlich der komplexen Leistungen vom Gedankengang her vollständig begründet und hergeleitet. Hinzu kommen noch einige Grundbegriffe wie die Definition von Zählpfeilen in elektronischen Schaltungen, die Transformation linearer Strom- und Spannungsquellen sowie das Thema Leistungsanpassung.

Ortskurven werden in Kapitel 2 relativ kurz behandelt. Auch wenn Ortskurven nur noch selten dazu verwendet werden, quantitative Berechnungen zu vereinfachen (das lässt sich mit Hilfe geeigneter Software besser erledigen), so sind sie doch sehr hilfreich zur Veranschaulichung komplexer Größen, die von einem Parameter abhängen.

Kapitel 3 behandelt Resonanzen bei elektrischen Schwingkreisen aus Widerstand, Spule

und Kondensator. Hierbei wird die komplexen Wechselstromrechnung verwendet und nur der eingeschwungene Zustand untersucht.

In Kapitel 4 wird Drehstrom behandelt. Hier werden die bis dahin erarbeiteten Grundlagen angewendet und geübt. Deswegen ist dieses Thema nicht nur für Energietechniker wichtig, sondern auch für Kommunikationstechniker eine gute Übung.

Bei den in Kapitel 5 behandelten Ausgleichsvorgängen wird direkt mit zeitabhängigen elektrischen Größen gerechnet. Bei Einschwing- und Ausschwingvorgängen ist dies notwendig, weil mit den statischen Zeigern der komplexen Wechselstromrechnung nur der eingeschwungene Zustand beschrieben werden kann. Die Dynamik der zeitabhängigen Größen führt zwangsläufig auf Differentialgleichungen. Wir legen den Schwerpunkt auf (lineare) Differentialgleichungen 1. Ordnung, mit denen Schaltungen mit nur einem Energiespeicher (Spule bzw. Kondensator) beschrieben werden können. Hierfür lässt sich ein vereinfachtes Verfahren anwenden, bei dem man nicht mehr viel über das Aufstellen und Lösen von Differentialgleichungen nachdenken muss.

Kapitel 6 behandelt die Leitungstheorie und legt damit Grundlagen für die Hochfrequenztechnik, wo dieses Thema eine zentrale Rolle spielt. Koaxialkabel und Zweidrahtleitungen sind wichtig bei der Übertragung von Daten. Hierbei werden die Signale auf Wellen moduliert, und die Ausbreitungseigenschaften dieser Wellen hängen von den elektrischen Eigenschaften der Leitungen ab. In diesem Kapitel wird unter anderem gezeigt, wie sich der Wellenwiderstand der Leitung berechnet und wie sich die Dämpfung und die Wellenlänge ergibt.

Es gibt eine Reihe guter Literatur zu den Grundlagen der Elektrotechnik. Als Klassiker gilt *Moeller Grundlagen der Elektrotechnik* [1]. Dieses Werk gibt es schon seit Jahrzehnten, und es wird ständig überarbeitet und verbessert. Zum Üben und Vertiefen des Stoffes sehr gut geeignet sind die Bücher von Hagmann [2] und von Ose [5], die vor allem für den Gebrauch an Fachhochschulen gedacht sind und bei denen auf das praktische Rechnen von Beispielen viel Wert gelegt wird. Zum Thema Leitungstheorie ist noch der Klassiker von Küpfmüller [3] empfehlenswert. Dieses Buch ist allerdings auch mathematisch zum Teil etwas anspruchsvoller.

Inhaltsverzeichnis

1 Wechselströme, Pfeile und Quellen **9**

1.1 Definition der Effektivwerte 9
1.2 Komplexe Schwingungen und Wechselstromrechnung 12
1.3 Impedanzen der (passiven) Standard-Bauelemente 17
1.4 Anwendungsbeispiel: Kondensator und Widerstand (RC-Tiefpass) 22
1.5 Kirchhoffsche Gesetze, Pfeile und Zweipole 27
1.5.1 Kirchhoffsche Gesetze 27
1.5.2 Zählpfeile und Zweipole 30
1.6 Anmerkungen zur Berechnung von Impedanzen und Admittanzen 34
1.7 Elektrische Leistung bei Wechselströmen 35
1.7.1 Schein-, Wirk- und Blindleistung 35
1.7.2 Schein-, Wirk- und Blindwiderstand 40
1.8 Ersatzschaltungen für Spannungsquellen und Stromquellen 42
1.8.1 Ideale Quellen 42
1.8.2 Lineare Quellen 43
1.8.3 Einfache Modellierung von aktiven Zweipolen 46
1.9 Leistungsanpassung 51
1.9.1 Reelle Widerstände 51
1.9.2 Komplexe Widerstände 53
Aufgaben zu Kapitel 1 56

2 Inversion von Ortskurven: Kreis und Gerade **61**

2.1 Die Inversion einer vertikalen Geraden 61
2.2 Anwendung: Ortskurve für den RC-Tiefpass 63
2.3 Inversion einer horizontalen Geraden 65
2.4 Inversion einer allgemeinen Geraden 66
Aufgaben zu Kapitel 2 66

3 Resonanzen **67**

3.1 Allgemeine Bemerkungen zu Resonanzen . . . 67
3.2 Wichtige Begriffe und der LCR-Reihenschwingkreis . . . 67
3.3 Der LCR-Parallelschwingkreis . . . 87
Aufgaben zu Kapitel 3 . . . 91

4 Drehstrom **95**
4.1 Grundbegriffe . . . 95
4.2 Schaltungen der Quelle . . . 100
4.2.1 Sternschaltung der Quelle . . . 100
4.2.2 Dreieckschaltung der Quelle . . . 100
4.3 Verbraucherschaltungen . . . 102
4.3.1 Symmetrische Verbraucher-Sternschaltung mit Neutralleiter . . . 102
4.3.2 Symmetrische Verbraucher-Sternschaltung ohne Neutralleiter . . . 104
4.3.3 Asymmetrische Verbraucher-Sternschaltung mit Neutralleiter . . . 105
4.3.4 Asymmetrische Verbraucher-Sternschaltung ohne Neutralleiter . . . 107
4.3.5 Symmetrische Verbraucher-Dreieckschaltung . . . 111
4.3.6 Asymmetrische Verbraucher-Dreieckschaltung . . . 114
4.4 Leistungsmessung . . . 117
4.4.1 Ein-Wattmeter-Methode bei symmetrischer Last . . . 117
4.4.2 Aron-Schaltung . . . 118
4.4.3 Drei-Wattmeter-Methode . . . 120
Aufgaben zu Kapitel 4 . . . 122

5 Ausgleichsvorgänge **125**
5.1 Grundlagen und Beispiele . . . 125
5.1.1 Kondensator mit Gleichspannungsquelle . . . 125
5.1.2 Kondensator mit Wechselspannungsquelle . . . 128
5.1.3 Schaltgesetze . . . 131
5.2 Ausgleichsvorgänge 1. Ordnung . . . 136
5.2.1 RC-Reihenschaltung . . . 137
5.2.2 Reihen- und Parallelschaltung mit Spule und Widerstand . . . 143
5.2.3 Die Lösung für allgemeine Schaltungen mit einem Energiespeicher . 146
5.3 Ausgleichsvorgänge 2. Ordnung (Schwingkreise) . . . 164
5.3.1 Die Differentialgleichung für die Kondensatorspannung . . . 164
5.3.2 Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung für den Reihenschwingkreis und die freie Schwingung . . . 167
5.3.3 Das Einschalten einer Gleichspannung am LCR-Reihenschwingkreis 173

5.3.4 Das Einschalten einer Wechselspannung am LCR-Reihenschwingkreis 177
5.4 Die Berechnung von Ausgleichsvorgängen mit dem Superpositionsprinzip . 180
Aufgaben zu Kapitel 5 185

6 Leitungstheorie **189**
6.1 Das Modell einer Zweidrahtleitung als Ersatzschaltbild 189
6.2 Aufstellen der Leitungsgleichungen 190
6.3 Die Beschreibung von Wellen auf Leitungen 193
6.4 Betrachtungen zum Abschluss der Leitung 206
Aufgaben zu Kapitel 6 215

Anhang **217**

A Wie zeichnet man exponentielle Vorgänge? **219**

B Näherung der komplexen Wurzel **223**

C Lösungen zu den Aufgaben **225**

1 Wechselströme, Pfeile und Quellen

1.1 Definition der Effektivwerte

Eine allgemeine Wechselspannung mit fester Frequenz f als Funktion der Zeit t ist gegeben als

$$u(t) = \hat{u} \cos(\omega t + \varphi_u) \ . \tag{1.1}$$

Hierbei ist $\hat{u}$ die Amplitude (auch: Spitzenwert oder Scheitelwert), φ_u die Phase und

$$\omega = 2\pi f \tag{1.2}$$

die Kreisfrequenz der Wechselspannung.

Ein Wechselstrom der festen Kreisfrequenz ω kann geschrieben werden als

$$i(t) = \hat{i} \cos(\omega t + \varphi_i) \ . \tag{1.3}$$

Hierbei ist $\hat{i}$ die Amplitude (auch: Spitzenwert oder Scheitelwert) und φ_i die Phase des Wechselstromes.

Die physikalische Größe **Leistung** hängt immer quadratisch von der Amplitude ab. In der Elektrotechnik sind Spannung und Strom solche Amplituden. Zum Beispiel gelten für die zeitabhängige Leistung an einem Ohmschen Widerstand R die folgenden Beziehungen:

$$p(t) = \frac{u^2(t)}{R} \text{ bzw. } p(t) = i^2(t)\, R \tag{1.4}$$

Wenn man mittlere Leistungen ausrechnen will, benötigt man daher den *zeitlichen Mittelwert des Quadrates* (man sagt: den **quadratischen Mittelwert**) der Kosinusschwingung. Den Mittelwert über eine Periode $T = 1/f$ schreiben wir mit einem Querbalken $\overline{(\cdots)}$ über der betreffenden Größe $(\cdots)$. Mathematisch ist der zeitliche Mittelwert von

$\cos^2(\omega t)$ folgendermaßen definiert:

$$\overline{\cos^2(\omega t)} = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t \tag{1.5}$$

Eine Phasenverschiebung ändert diesen Mittelwert nicht, d.h. es gilt

$$\overline{\cos^2(\omega t)} = \overline{\cos^2(\omega t + \varphi)}\,. \tag{1.6}$$

Durch ein anschauliches Argument erkennt man ohne viel Mathematik, dass

$$\boxed{\overline{\cos^2(\omega t)} = \frac{1}{2}} \tag{1.7}$$

gilt. Denn der Graph von $\cos^2(\omega t)$ ist die schwarze Kurve in Abbildung 1.1. Die rote Fläche über der schwarzen Kurve in Abbildung 1.1 ist genauso groß wie die blaue Fläche

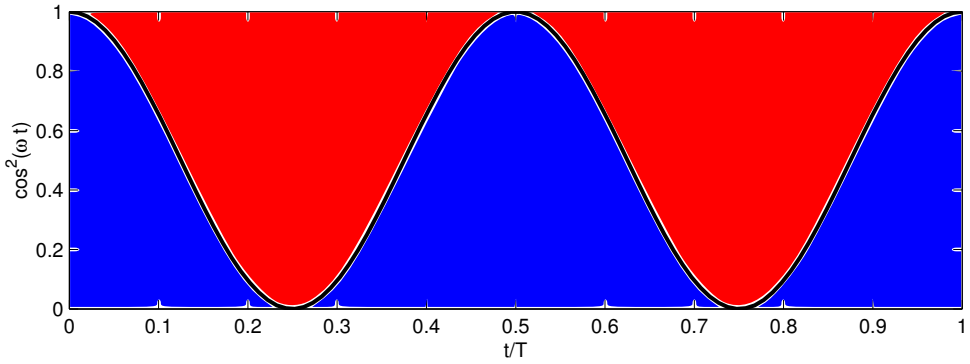


Abbildung 1.1: Veranschaulichung des Effektivwerts. Die schwarze Kurve zeigt $\cos^2(\omega t)$. Die rote Fläche über der Kurve ist gleich der blauen Fläche unter der Kurve. Deshalb gilt für den zeitlichen Mittelwert: $\overline{\cos^2(\omega t)} = \frac{1}{2}$

darunter. Beide zusammen ergeben ein Rechteck. Der Mittelwert der schwarzen Kurve ist also gleich der *halben* Rechteckfläche, geteilt durch dessen horizontale Grundseite. Dies ist die halbe Rechteckhöhe, also gleich $1/2$.

Anmerkung: Man kommt zu diesem Ergebnis auch rechnerisch und braucht dazu nicht einmal ein Integral zu lösen. Denn es gilt bekanntlich:

$$\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$$

Dies gilt auch im Mittel:

$$\overline{\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)} = 1$$

Der Mittelwert einer Summe ist gleich der Summe der Mittelwerte. Deshalb gilt:

$$\overline{\cos^2(\omega t)} + \overline{\sin^2(\omega t)} = 1$$

Die quadratischen Mittelwerte von Sinus und Kosinus sind gleich:

$$\overline{\cos^2(\omega t)} = \overline{\sin^2(\omega t)}$$

Daraus folgt die Gleichung (1.7).

Mit Gleichung (1.1) bzw. Gleichung (1.3) ergibt sich aus Gleichung (1.7) für die Mittelwerte

$$\overline{u^2(t)} = \frac{1}{2}\hat{u}^2 \text{ bzw. } \overline{i^2(t)} = \frac{1}{2}\hat{i}^2 \tag{1.8}$$

und für die mittlere Leistung

$$P = \overline{p(t)} = \frac{1}{2}\frac{\hat{u}^2}{R} = \frac{1}{2}\hat{i}^2 R\,.$$

Der Faktor $1/2$ in diesen Formeln ist sehr unbequem und kann leicht vergessen werden. Man definiert deshalb beim Wechselstrom die **Effektivwerte** U und I (manchmal auch bezeichnet mit U_{eff} und I_{eff}) folgendermaßen:

$$\boxed{U = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{u}} \text{ und } \boxed{I = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i}}\,. \tag{1.9}$$

Damit ergeben sich folgende Formeln für die Leistung an einem Widerstand:

$$P = \frac{U^2}{R} \text{ bzw. } P = I^2 R \tag{1.10}$$

Diese Formeln lassen sich bequemer handhaben. Außerdem sehen sie (formal) genauso aus wie die entsprechenden Gleichungen in der Gleichstromtechnik.

Die Wechselspannung konstanter Frequenz wird dann geschrieben als

$$\boxed{u(t) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \varphi_u)} \tag{1.11}$$

und den Wechselstrom als

$$\boxed{i\left(t\right)=\sqrt{2}I\cos\left(\omega t+\varphi_i\right)}. \tag{1.12}$$

1.2 Komplexe Schwingungen und Wechselstromrechnung

In den obigen Formeln für Wechselstrom und Wechselspannung treten im Argument der Winkelfunktion Summen auf, was viele Berechnungen verkompliziert. Durch das Rechnen mit komplexen Exponentialfunktionen wird vieles einfacher.

Wegen der Eulerschen Formel

$$\boxed{\mathrm{e}^{j\alpha}=\cos\alpha+j\sin\alpha} \tag{1.13}$$

gilt

$$\cos\alpha=\mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{j\alpha}\right\},$$

und man kann man die Schwingung in Gleichung (1.11) schreiben als

$$u\left(t\right)=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}U\mathrm{e}^{j\left(\omega t+\varphi_u\right)}\right\}=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}U\mathrm{e}^{j\varphi_u}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}.$$

Die zu der reellen Schwingung $u\left(t\right)$ gehörige *komplexe Exponentialschwingung* wird in der Elektrotechnik durch *Unterstreichen* gekennzeichnet. Man schreibt

$$\underline{u}\left(t\right):=\sqrt{2}U\mathrm{e}^{j\varphi_u}\mathrm{e}^{j\omega t} \tag{1.14}$$

für diesen **zeitabhängig rotierenden Zeiger**. Die relevante Information über die Spannung (z.B. an einem elektronischen Bauteil wie Widerstand oder Spule oder Kondensator) steckt in dem Effektivwert U und der Phase φ_u. Man fasst beide zusammen und definiert den **zeitunabhängigen Zeiger** für den Effektivwert der Spannung:

$$\underline{U}=U\mathrm{e}^{j\varphi_u} \tag{1.15}$$

Es gilt also

$$\boxed{u\left(t\right)=\mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\underline{U}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}} \tag{1.16}$$

Abbildung 1.2 zeigt beide Zeiger. Das **reelle Zeitsignal** (die reelle Schwingung) $u\,(t)$

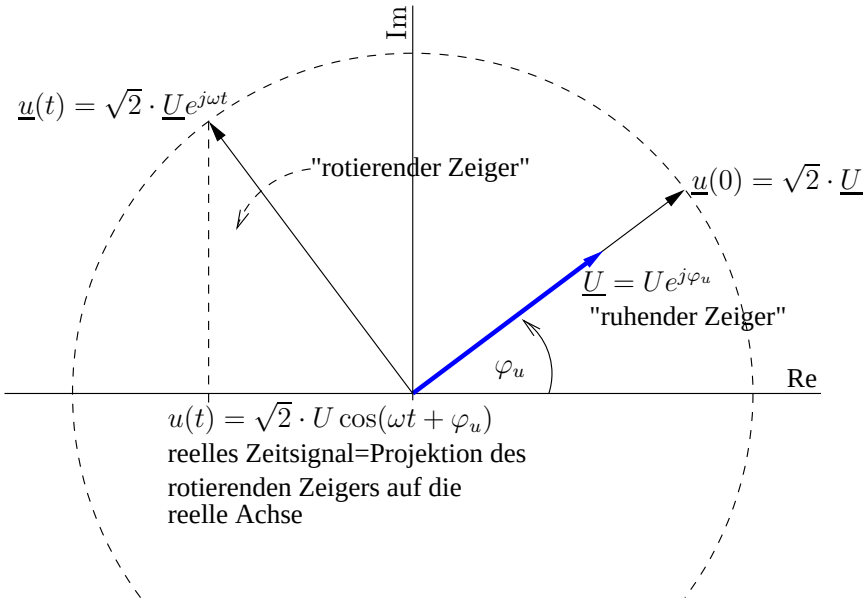


Abbildung 1.2: Rotierender und zeitunabhängiger Zeiger.

und der komplexe Zeiger $\underline{U}$ (in der Zeichnung blau dargestellt) enthalten die selbe Information und lassen sich umkehrbar eindeutig in einander umrechnen. Für praktische Berechnungen lässt sich der komplexe Zeiger $\underline{U}$ wesentlich besser handhaben. Deshalb werden praktisch alle Schaltungsberechnungen für Wechselspannungen fester Frequenz mit Zeigern durchgeführt.

Für den Strom wird genau das Gleiche gemacht, nur werden die Buchstaben entsprechend ersetzt. Tabelle 1.1 zeigt noch einmal die Beziehungen zwischen den Größen. Wenn nichts anderes gesagt ist, sind die entsprechenden Größen so wie in dieser Tabelle definiert.

Tabelle 1.1: Beziehungen zwischen Zeitsignalen und komplexen Zeigern

	Spannung	Strom
reelles Zeitsignal	$u\,(t) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\underline{U}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}$	$i\,(t) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\underline{I}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}$
komplexes Zeitsignal	$\underline{u}\,(t) = \sqrt{2}\underline{U}\mathrm{e}^{j\omega t}$	$\underline{i}\,(t) = \sqrt{2}\underline{I}\mathrm{e}^{j\omega t}$
reeller Effektivwert	$U = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{u}$	$I = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\hat{i}$
Zeiger (Effektivwert)	$\underline{U} = U\mathrm{e}^{j\varphi_u}$	$\underline{I} = I\mathrm{e}^{j\varphi_i}$

Exponentielle versus kartesische Darstellung

Meistens verwendet man für die Zeiger in der Elektrotechnik die exponentielle Darstellung. Man drückt also z.B. den Spannungszeiger

$$\underline{U} = U\mathrm{e}^{j\varphi_u} \tag{1.17}$$

durch Betrag U und Phase φ_u aus. Für das Zeitsignal gilt dann die Darstellung

$$\boxed{u(t) = \sqrt{2}\,U\cos\left(\omega t + \varphi_u\right)}\,. \tag{1.18}$$

Alternativ dazu gibt es natürlich auch die kartesische Darstellung

$$\underline{U} = U_\mathrm{r} + jU_\mathrm{i}\,, \tag{1.19}$$

wobei mit

$$U_\mathrm{r} = U\cos\varphi_u \text{ bzw. } U_\mathrm{i} = U\sin\varphi_u \tag{1.20}$$

der Real- bzw. Imaginärteil des Spannungszeigers bezeichnet wird. Abbildung 1.3 zeigt

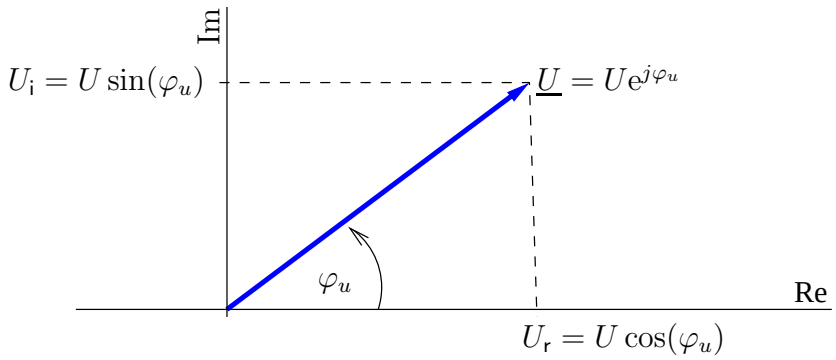


Abbildung 1.3: Kartesische und exponentielle Darstellung eines Zeigers.

diese Größen. Setzt man die kartesische Darstellung in Gleichung (1.16)

$$u\left(t\right) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\underline{U}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}$$

ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} u\,(t) &= \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\underline{U}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\,(U_\mathsf{r} + jU_\mathsf{i})\,(\cos\omega t + j\sin\omega t)\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\,(U_\mathsf{r}\cos\omega t - U_\mathsf{i}\sin\omega t + j\,(U_\mathsf{i}\cos\omega t + U_\mathsf{r}\sin\omega t))\right\} \end{aligned}$$

und damit

$$\boxed{u(t) = \sqrt{2}\,U_\mathsf{r}\cos\omega t - \sqrt{2}\,U_\mathsf{i}\sin\omega t}\,. \tag{1.21}$$

Man kann jede Wechselspannung also entweder wie in Gleichung (1.18) durch eine Kosinusschwingung mit Amplitude und Phase oder wie in Gleichung (1.21) durch die Überlagerung einer Kosinus- und einer Sinusschwingung ausdrücken.

Man beachte das *Minuszeichen* vor der $\sin\omega t$-Schwingung. Das bedeutet, dass eine reine Sinusschwingung mit *positivem Vorfaktor* wie z.B.

$$u(t) = 10\,\mathrm{V}\sin\omega t$$

zu einem rein imaginären Zeiger mit einem *negativen Vorzeichen* gehört. In diesem Beispiel lautet der Zeiger $\underline{U} = -j\frac{10\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \approx -j7.07\mathrm{V}$. Folgende Beispiele sollen das noch etwas vertiefen:

(a) Das Zeitsignal

$$u(t) = 10\,\mathrm{V}\,(\cos\omega t + \sin\omega t)$$

besitzt den Zeiger

$$\underline{U} = \frac{10\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}}\,(1-j) = 10\,\mathrm{V}\mathrm{e}^{-j45^\circ}\,.$$

Man kann das Zeitsignal deshalb auch schreiben als:

$$u(t) = \sqrt{2}\,10\,\mathrm{V}\cos\,(\omega t - 45^\circ)$$

(b) Das Zeitsignal

$$u_{12}(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}400\,\mathrm{V}\left(\sqrt{3}\cos\omega t - \sin\omega t\right)$$

besitzt den Zeiger

$$\underline{U}_{12} = 400\,\mathrm{V}\,\left(\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}j\right) = 400\,\mathrm{V}\mathrm{e}^{j30^\circ}\,.$$

Man kann das Zeitsignal deshalb auch schreiben als:

$$u_{12}(t) = \sqrt{2}\,400\,\mathrm{V}\cos\left(\omega t + 30^\circ\right)$$

Dies ist übrigens gerade die Leiterspannung $u_{12}(t)$ zwischen dem ersten und zweiten Außenleiter beim Drehstrom (siehe Kapitel 4).

(c) Das Zeitsignal

$$u_2(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}230\,\mathrm{V}\left(\sqrt{3}\sin\omega t - \cos\omega t\right)$$

besitzt den Zeiger

$$\underline{U}_2 = 230\,\mathrm{V}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}j\right) = 230\mathrm{V}\mathrm{e}^{-j120^\circ}\,.$$

Man kann das Zeitsignal deshalb auch schreiben als:

$$u_2(t) = \sqrt{2}\,230\,\mathrm{V}\cos\left(\omega t - 120^\circ\right)$$

Dies ist übrigens gerade die Sternspannung $u_2(t)$ zwischen dem zweiten Außenleiter und dem Neutralleiter beim Drehstrom (siehe Kapitel 4).

Linearität

Zwischen der reellen Schwingung und dem zugehörigen Zeiger besteht ein *linearer Zusammenhang*. Das heißt: Wenn man zwei Schwingungen $u_1\left(t\right)$, $u_2\left(t\right)$ der *selben Kreisfrequenz* ω zu

$$u\left(t\right) = au_1(t) + bu_2(t) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

überlagert, so ergibt sich der zugehörige Zeiger als die entsprechende Überlagerung

$$\underline{U} = a\underline{U}_1 + b\underline{U}_2\,.$$

Dies gilt selbstverständlich auch für die Umkehrung.

1.3 Impedanzen der (passiven) Standard-Bauelemente

Wir betrachten nun als Strom und Spannung nur Schwingungen bei einer festen Frequenz ω im **eingeschwungenen Zustand** und verwenden dafür die Notation aus Tabelle 1.1, d.h.

$$u(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{u}\,(t)\right\} \text{ mit } \underline{u}\,(t) = \sqrt{2}\,\underline{U}\,\mathrm{e}^{j\omega t} \tag{1.22}$$

und

$$i(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{i}\,(t)\right\} \text{ mit } \underline{i}\,(t) = \sqrt{2}\,\underline{I}\,\mathrm{e}^{j\omega t}\,. \tag{1.23}$$

Eingeschwungener Zustand bedeutet, dass die Variable t auf der ganzen reellen Zeitachse definiert ist und die Signale dort durch diese Schwingungen gegeben sind. Das (idealisierte) Signal schwingt also schon seit unendlicher langer Zeit und wird auch noch unendlich lange weiter schwingen. Einschaltvorgänge kommen hier nicht vor. Sie werden in dieser Vorlesung nur in Kapitel 5 behandelt.

Unter (passiven) **Standard-Bauelementen** (oder **Standard-Bauteilen**) versteht man zusammenfassend Ohmsche Widerstände, Induktivitäten und Kapazitäten. Die Beziehungen zwischen Strom und Spannung an diesen Bauteilen lassen sich mit den komplexen Zeigern $\underline{I}$ und $\underline{U}$ einfacher beschreiben als mit den Zeitsignalen $i(t)$ und $u(t)$, weil dabei auf Ableitungen und Integrale verzichtet werden kann. Statt dessen kommt man mit einfachen Multiplikationen aus. Ein Standard-Bauteil ist durch seine **Impedanz** charakterisiert, die im Folgenden erklärt wird.

Induktivität L**:** Der Zusammenhang zwischen den Zeitsignalen für Strom und Spannung an einer Spule ist durch das Induktionsgesetz

$$u\,(t) = L\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i\,(t) \tag{1.24}$$

gegeben. Dieser Zusammenhang gilt auch für die rotierenden Zeiger für Strom und Spannung:

$$\underline{u}\,(t) = L\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \underline{i}\,(t)$$

Mit

$$\underline{u}\,(t) = \sqrt{2}\,\underline{U}\mathrm{e}^{j\omega t} \text{ und } \underline{i}\,(t) = \sqrt{2}\,\underline{I}\mathrm{e}^{j\omega t}$$

folgt

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,\underline{U}\mathrm{e}^{j\omega t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{2}\,L\underline{I}\mathrm{e}^{j\omega t}\right)\\ &= \sqrt{2}\,j\omega L\underline{I}\mathrm{e}^{j\omega t}\,.\end{aligned}$$

Der Faktor $\sqrt{2}\mathrm{e}^{j\omega t}$ kürzt sich heraus, und es folgt

$$\underline{U} = j\omega L\,\underline{I}\,.$$

Kapazität C: Es gilt[1]

$$i\,(t) = C\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u\,(t)\ . \tag{1.25}$$

Dieser Zusammenhang gilt auch für die rotierenden Zeiger:

$$\underline{i}\,(t) = C\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underline{u}\,(t)$$

Mit

$$\underline{i}\,(t) = \sqrt{2}\,\underline{I}\mathrm{e}^{j\omega t} \text{ und } \underline{u}\,(t) = \sqrt{2}\,\underline{U}\mathrm{e}^{j\omega t}$$

folgt

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,\underline{I}\mathrm{e}^{j\omega t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{2}\,C\underline{U}\mathrm{e}^{j\omega t}\right)\\ &= \sqrt{2}\,j\omega C\underline{U}\mathrm{e}^{j\omega t}\,.\end{aligned}$$

Der Faktor $\sqrt{2}\mathrm{e}^{j\omega t}$ kürzt sich heraus, und es folgt

$$\underline{I} = j\omega C\underline{U}$$

[1] Man kann dies auch als $u\,(t) = \frac{1}{C}\int i\,(t)\,\mathrm{d}t$ schreiben. Aber dann muss man über Integrationskonstanten sprechen. Die Schreibweise mit der Ableitung ist deshalb bequemer.

und damit

$$\underline{U} = \frac{1}{j\omega C}\,\underline{I}\,.$$

Widerstand R: Das Ohmsche Gesetz

$$u(t) = Ri(t) \tag{1.26}$$

gilt unverändert auch für die komplexen Zeiger:

$$\underline{U} = R\,\underline{I}$$

Gemeinsame Schreibweise mit Impedanz $\underline{Z}$: Für alle drei Typen von Bauelementen gilt also die Proportionalität

$$\boxed{\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}}, \tag{1.27}$$

zwischen den Zeigern von Strom und Spannung, wobei man für $\underline{Z}$ jeweils Folgendes einsetzen muss:

$$\boxed{\underline{Z}_{\mathsf{L}} = j\omega L} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\underline{Z}_{\mathsf{C}} = \frac{1}{j\omega C}} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\underline{Z}_{\mathsf{R}} = R} \tag{1.28}$$

Dort, wo bei den zeitabhängigen Größen Ableitungen auftreten, ergibt sich für die komplexen Zeiger eine Frequenzabhängigkeit in der Proportionalitätskonstanten $\underline{Z}$ in Gleichung (1.27). Diese Gleichung kann man als eine Verallgemeinerung des Ohmschen Gesetzes auffassen. Die jeweiligen komplexen Widerstände $\underline{Z}$ bezeichnet man als **Impedanzen**.

Bei der Spule ist wegen

$$\underline{U}_{\mathsf{L}} = j\omega L\,\underline{I}$$

der Strom $\underline{I}$ gegenüber der Spannung $\underline{U}_L$ um 90° in der Phase *verzögert*. Beim Kondensator dagegen eilt wegen

$$\underline{I} = j\omega C\,\underline{U}_{\mathsf{C}}$$

der Strom $\underline{I}$ der Spannung $\underline{U}_C$ um 90° voraus. Dieser Zusammenhang wird in Abbildung

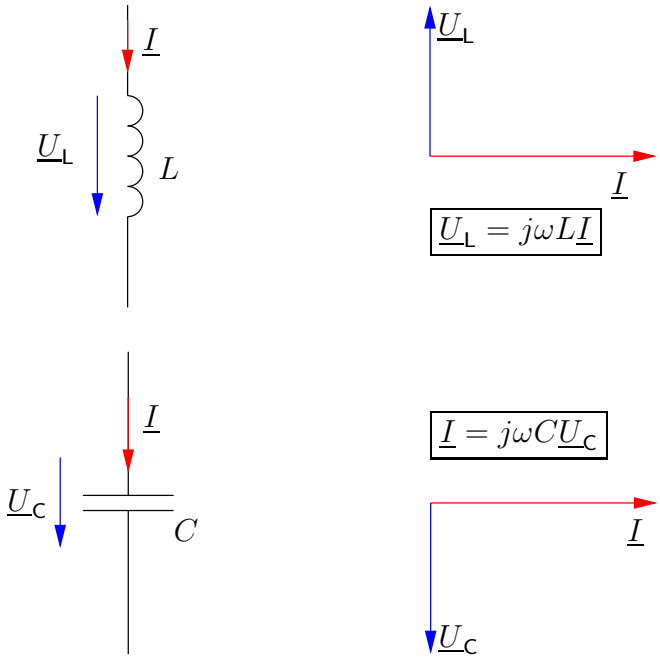


Abbildung 1.4: Merkbild für die Beziehung zwischen Strom und Spannung. Oben: Für die Spule. Unten: Für den Kondensator.

1.4 veranschaulicht. Die entsprechenden zugehörigen Zeitsignale sind in Abbildung 1.5 dargestellt.

Die Methoden der komplexen Wechselstromrechnung lassen sich für alle Wechselstromkreise (aus Standard-Bauteilen) im *eingeschwungenen Zustand* anwenden. Der Vorteil der Einführung komplexer Zeiger für Strom und Spannung und komplexer Widerstände (Impedanzen) und Leitwerte (Admittanzen) liegt darin, dass sich damit Wechselstromnetzwerke nach den selben formalen Regeln berechnen lassen wie Gleichstromnetzwerke. Wie weiter unten noch etwas ausführlicher begründet wird, lassen sich die Kirchhoffschen Gesetze sinngemäß auch für die komplexen Zeiger anwenden. Deshalb gelten für Parallel- und Serienschaltungen von Impedanzen die selben Regeln wie für Widerstände. Die Spannungen und Ströme berechnen sich dann ebenfalls nach den selben Regeln.

Den Kehrwert der Impedanz bezeichnet man als **Admittanz** und schreibt dafür

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}}. \tag{1.29}$$

Sie ist die komplexe Verallgemeinerung des Leitwertes.

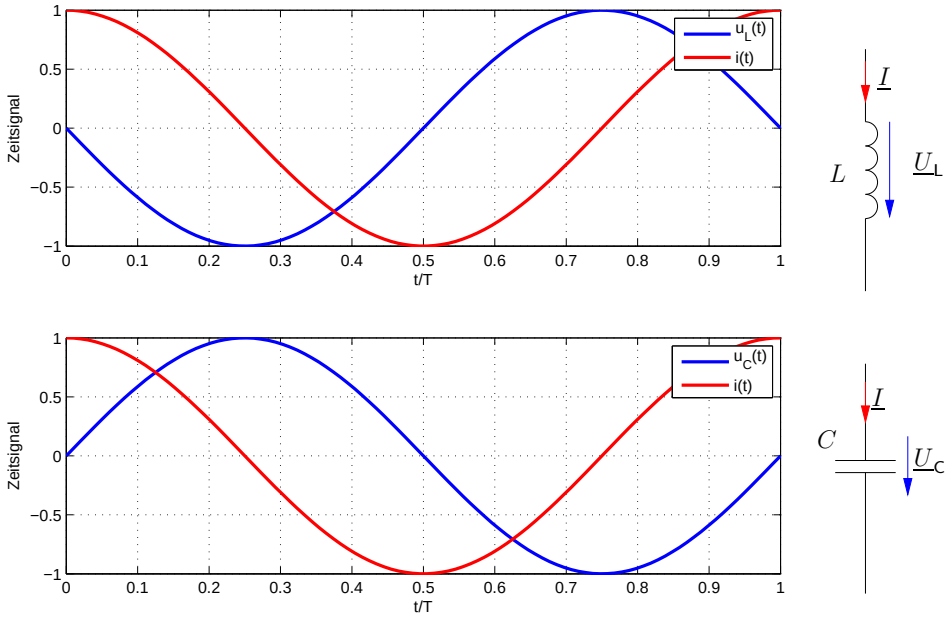


Abbildung 1.5: Die Phasenbeziehung zwischen Strom (rot) $i(t)$ und Spannung (blau) an Spule (oben) und Kondensator (unten). An der Spule kommt die Spannung vor dem Strom und am Kondensator nach dem Strom.

Im Unterschied zur Gleichstromrechnung sind die Spannungen $\underline{U}$ Ströme $\underline{I}$, die man bei der komplexer Wechselstromrechnung erhält, nicht die physikalisch realen Größen, sondern die entsprechenden Zeiger, die die physikalischen Größen $u\,(t)$ und $i\,(t)$ eindeutig charakterisieren. Diese physikalischen Schwingungen erhält man aus $\underline{U}$ und $\underline{I}$ mit Hilfe der Formeln in Tabelle 1.1.

Anmerkung zur Notation bei komplexen Größen

Wie bei Strom- und Spannungszeigern ist es üblich, bei Impedanzen und Admittanzen einfach den Unterstrich weg zu lassen, wenn man den Betrag meint:

$$Z = |\underline{Z}| \text{ und } Y = |\underline{Y}|$$

Die Notation in der Wechselstromrechnung ist sehr kompakt. Das Weglassen eines Unterstrichs ändert die Bedeutung. Leider ist dabei nicht immer dasselbe gemeint. Es gilt:

- Bei *ruhenden Zeigern* bedeutet das Weglassen des Unterstrichs die *Betragsbildung*.

Beispiel:

$$U = |\underline{U}|$$

- Bei *rotierenden Zeigern* bedeutet das Weglassen des Unterstrichs die *Realteilbildung*. Beispiel:

$$u(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{u}(t)\right\}$$

Es gibt (außerhalb dieser Notation) keine Notwendigkeit, komplexe Größen generell zu unterstreichen. In der Mathematik und Physik und ebenso in der Nachrichtentechnik ist dies auch nicht üblich. Nur die kompakte Notation der Wechselstromrechnung erfordert es an den beschriebenen Stellen. Deshalb werden im vorliegenden Skript komplexe Größen auch nur dort unterstrichen, wo das Weglassen des Unterstrichs die Bedeutung verändern würde.

1.4 Anwendungsbeispiel: Kondensator und Widerstand (RC-Tiefpass)

Wir betrachten die Schaltung in Abbildung 1.6 mit Kondensator und Widerstand (in Serie geschaltet) und einer Wechselspannungsquelle

$$u_{\mathsf{q}}(t) = \sqrt{2}\, U_{\mathsf{q}} \cos\left(\omega t + \varphi_{\mathsf{q}}\right) .$$

Gesucht sind der Strom $i(t)$ und die Spannung $u_{\mathsf{C}}(t)$ am Kondensator. Meistens beschriftet man die Schaltung nicht mit den zeitabhängigen Größen (Zeichnung oben), sondern mit den Zeigern (Zeichnung unten). Die Gesamtimpedanz der beiden in Reihe geschalteten Bauteile lautet

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} .$$

Für den Strom gilt dann

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_{\mathsf{q}}}{\underline{Z}} = \frac{\underline{U}_{\mathsf{q}}}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

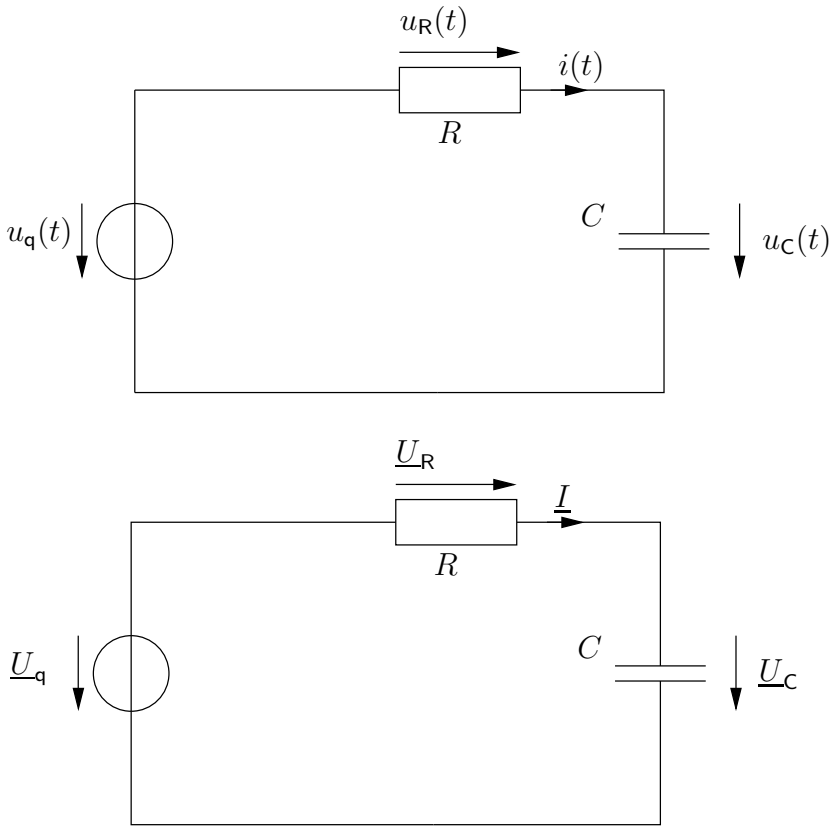


Abbildung 1.6: Schaltung aus Kondensator und Widerstand. Oben: Mit zeitabhängigen Größen beschriftet. Unten: Das selbe mit komplexen Zeigern beschriftet.

bzw.

$$\underline{I} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC}\underline{U}_q \,.$$

Die Spannung am Kondensator erhält man nach der Spannungsteiler-Regel:

$$\underline{U}_C = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}}\underline{U}_q$$

d.h.

$$\underline{U}_C = \frac{1}{1 + j\omega RC}\underline{U}_q. \tag{1.30}$$

Die Größe

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \tag{1.31}$$

nennt man die **Übertragungsfunktion** der Schaltung. Als Amplitude und Phase geschrieben lautet sie

$$H(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{j\phi}}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \text{ mit } \phi = -\arctan(\omega RC) \; . \tag{1.32}$$

Die Schaltung wirkt als **Tiefpass-Filter**: Bei niedrigen Frequenzen ist die Spannung $\underline{U}_\mathsf{C}$ gegenüber $\underline{U}_\mathsf{q}$ nur schwach gedämpft, bei hohen Frequenzen dagegen stark. Wie stark die Spannung mit der Frequenz abfällt, hängt von der Zeitkonstanten

$$\tau = RC \tag{1.33}$$

ab. Abbildung 1.7 (oben) zeigt den Verlauf von

$$\frac{U_\mathsf{C}^2}{U_\mathsf{q}^2} = |H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega RC)^2} \, . \tag{1.34}$$

Üblicherweise werden die quadratischen Spannungen aufgetragen, weil man sich für die Leistungen interessiert[2]. Bei $\omega\tau = 1$ ist $U_\mathsf{C}^2/U_\mathsf{q}^2 = 1/2$. Man nennt die zugehörige Frequenz

$$f_{3\mathrm{dB}} = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{1}{2\pi RC} \tag{1.35}$$

die **Halbwertsbreite** oder **3-dB-Bandbreite** oder auch **Grenzfrequenz**. Das untere Bild zeigt den Verlauf der Phasendifferenz ϕ mit

$$\varphi_\mathsf{C} - \varphi_\mathsf{q} \quad = \phi = \quad -\arctan(\omega RC) \; .$$

Bei der 3-dB-Bandbreite gilt $\phi = -45°$. Die 3-dB-Punkte sind in beiden Bildern rot markiert.

Das reelle Zeitsignal für die Spannung am Kondensator lautet

$$u_\mathsf{C}(t) = \sqrt{2}\mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{1 + j\omega RC} \underline{U}_\mathsf{q} \mathrm{e}^{j\omega t} \right\} \; . \tag{1.36}$$

[2]Man stelle sich einen Verbraucher vor, der parallel zum Kondensator geschaltet ist und dessen Impedanz so groß ist, dass die Last für die Eigenschaften der Schaltung (nahezu) keine Rolle spielt.

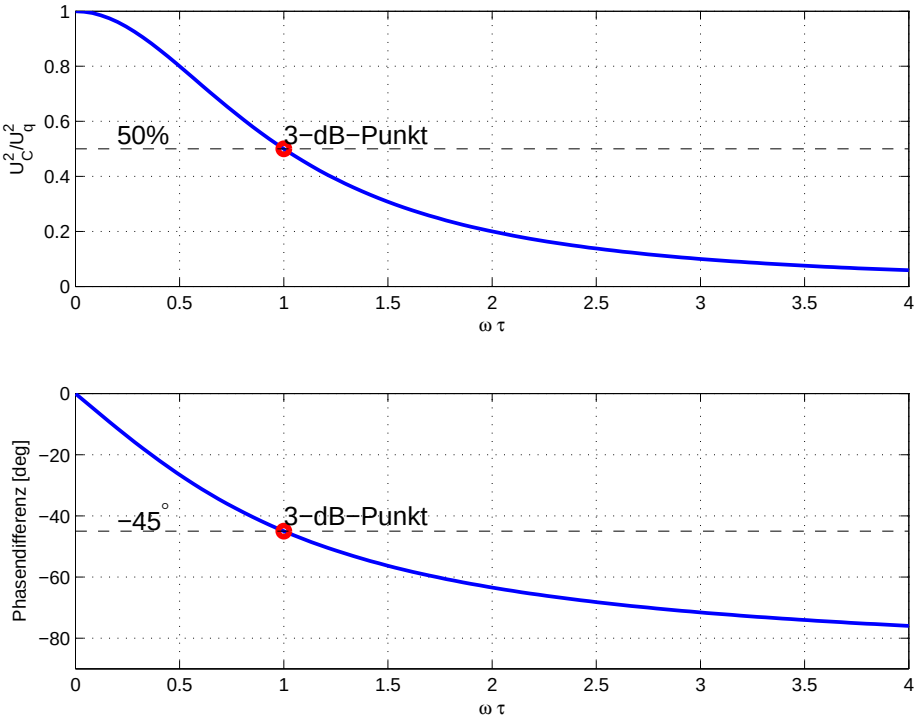


Abbildung 1.7: Frequenzgang der Kondensatorspannung bezogen auf die angelegte Quellspannung. Oben: Quadratischer Amplitudengang. Unten: Phasengang

Diese reelle Schwingung kann man auf zweierlei Weise darstellen.

1. Als Kosinus-Schwingung mit Amplitude und Phase. Dies ist die bevorzugte Darstellung in der Elektrotechnik. Hierzu schreiben wir

   $$\underline{U}_\mathsf{q} = U_\mathsf{q} \mathrm{e}^{j\varphi_\mathsf{q}}$$

   und

   $$\frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{\mathrm{e}^{j\phi}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \text{ mit } \phi = -\arctan(\omega RC)$$

   und setzen dies in Gleichung (1.36) ein. Wegen $\mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{j\phi}\mathrm{e}^{j\varphi_\mathsf{q}}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} = \cos(\omega t + \varphi_\mathsf{q} + \phi)$ folgt

   $$u_\mathsf{C}(t) = \frac{\sqrt{2}\,U_\mathsf{q}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \cos(\omega t + \varphi_\mathsf{q} + \phi)\ . \tag{1.37}$$

Diese Formel zeigt, was bei dieser Schaltung passiert: Die Spannung am Kondensator ist um den Faktor

$$\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}$$

gegenüber der angelegten Spannung gedämpft und um die Phase

$$-\phi = \arctan(\omega RC)$$

verzögert. Die Größe

$$H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{\mathrm{e}^{j\phi}}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}, \tag{1.38}$$

die beide Effekte zusammenfassend beschreibt, ist die **Übertragungsfunktion** des Filters.

2. Als Überlagerung einer Kosinus- und einer Sinus-Schwingung. Diese Darstellung ist in der Physik beliebt. Wir erhalten durch konjugiert komplexes Erweitern den Ausdruck

$$\frac{\sqrt{2}\,U_\mathsf{q}}{1+j\omega RC}\mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi_\mathsf{q})} = \frac{\sqrt{2}\,U_\mathsf{q}\,(1-j\omega RC)}{1+(\omega RC)^2}\left(\cos(\omega t+\varphi_\mathsf{q}) + j\sin(\omega t+\varphi_\mathsf{q})\right).$$

Nach Ausmultiplizieren und Bilden des Realteils ergibt sich

$$u_\mathsf{C}(t) = \frac{\sqrt{2}\,U_\mathsf{q}}{1+(\omega RC)^2}\left(\cos(\omega t+\varphi_\mathsf{q}) + \omega RC\sin(\omega t+\varphi_\mathsf{q})\right). \tag{1.39}$$

Der Begriff der ***Übertragungsfunktion*** ist von zentraler Bedeutung in der Nachrichtentechnik und wird der Systemtheorie noch in allgemeiner Form auftauchen. Für eine Schaltung aus Standard-Bauelementen R, C, L ist er wie folgt erklärt:

Der Begriff der Übertragungsfunktion

Es sei eine Schaltung aus Standard-Bauelementen R, C, L mit Eingangsspannung

$$u_\mathsf{q}(t) = \sqrt{2}\,U_\mathsf{q}\cos(\omega t+\varphi_\mathsf{q}), \quad \underline{U}_\mathsf{q} = U_\mathsf{q}\mathrm{e}^{j\varphi_\mathsf{q}}$$

gegeben. Gesucht ist eine Spannung $u(t)$ zwischen irgendwelchen Punkten in der Schaltung. Mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung berechnet man

$$u\,(t) = \sqrt{2}\,U\cos\left(\omega t + \varphi\right)\,, \quad \underline{U} = U\mathrm{e}^{j\varphi}\,.$$

Dann bezeichnet man die frequenzabhängige komplexe Größe

$$\boxed{H(\omega) = \frac{\underline{U}}{\underline{U}_{\mathsf{q}}}} \tag{1.40}$$

als **Übertragungsfunktion** des Systems. In Abbildung 1.8 ist die Übertragungsfunkti-

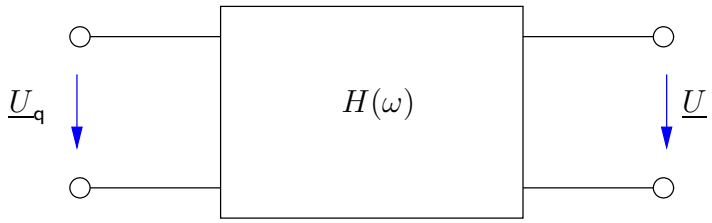


Abbildung 1.8: Symbolische Darstellung einer Übertragungsfunktion $H(\omega) = \underline{U}/\underline{U}_{\mathsf{q}}$ für die Spannung.

on symbolisch als eine *black box* dargestellt, an deren Eingangsklemmen die Spannung $\underline{U}_{\mathsf{q}}$ anliegt und an den Ausgangsklemmen die Spannung $\underline{U}$. Die Übertragungsfunktion beschreibt das Systemverhalten, d.h. die Beziehung zwischen dem *Input* $u_{\mathsf{q}}(t)$ und dem *Output* $u(t)$, ohne dabei die konkrete Realisierung der entsprechenden Schaltung festzulegen.

Der Einfachheit halber haben wir hier nur die Übertragungsfunktion für Spannungen betrachtet. Sinngemäß genauso ist natürlich auch eine Übertragungsfunktion Spannung/Strom, Strom/Spannung und Strom/Strom definiert.

1.5 Kirchhoffsche Gesetze, Pfeile und Zweipole

1.5.1 Kirchhoffsche Gesetze

Die Kirchhoffschen Gesetze gelten auch für die komplexen Zeiger. Man muss dabei nur die zeitabhängigen Spannungen $u\,(t)$ und Ströme $i\,(t)$ durch die entsprechenden Zeiger $\underline{U}$ und $\underline{I}$ ersetzen. Wir haben von dieser Tatsache stillschweigend schon im dem obigen

Beispiel mit dem RC-Tiefpass Gebrauch gemacht und wollen dies nachträglich noch etwas genauer begründen. Im Folgenden werden die beiden Kirchhoffschen Gesetze für die zeitabhängigen Größen sowie für die Zeiger formuliert.

Die Knotenregel

Für einen Knoten von idealen Leitern[3], in den die Ströme $i_k(t)$ $(k = 1, ..., n)$ hinein fließen, gilt

$$\sum_{k=1}^{n} i_k(t) = 0\,. \tag{1.41}$$

Hierbei ist die **Stromrichtung** zu beachten: Ein Strom wird positiv gezählt, wenn er in

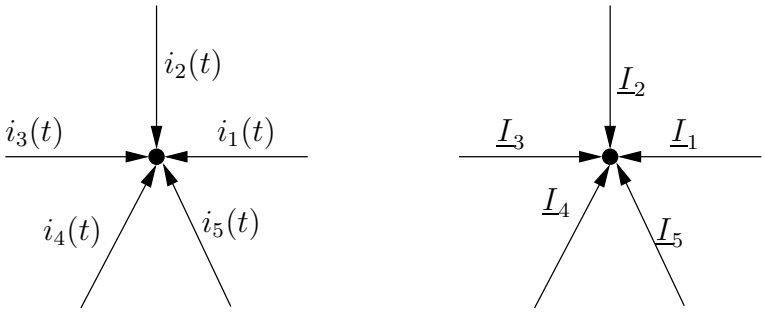


Abbildung 1.9: Knotenregel für die zeitlichen Schwingungen (links) und für die komplexen Zeiger (rechts).

den Knoten hinein fließt und negativ, wenn er heraus fließt[4]. Die positive Stromrichtung ist in Abbildung 1.9 durch die Pfeile markiert. Schreibt man die Ströme als

$$i_k(t) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\underline{I}_k \mathrm{e}^{j\omega t}\right\}\,,$$

so ergibt sich (aus der Linearität der Zeigerdarstellung) die Knotenregel für die Zeiger:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \underline{I}_k = 0} \tag{1.42}$$

[3] Ein idealer Leiter besitzt zum einen eine ideale Leitfähigkeit, d.h. den Widerstand Null. Zum andern kann er keine Ladungen speichern, besitzt also keine Kapazität. Er besitzt außerdem keine Induktivität. Deshalb besitzen zwei durch einen idealen Leiter verbundene Punkte immer das selbe elektrische Potential.

[4] Man könnte es natürlich auch genau anders herum definieren. Es muss nur einheitlich sein.

Die Maschenregel

Für eine geschlossene Schleife (*Masche* genannt) in einem elektrischen Netzwerk gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(t) = 0 \tag{1.43}$$

Hierbei sind die $u_k(t)$ $(k = 1, ..., n)$ die einzelnen Teilspannungen, die sich beim Umlauf der Masche in einer festgelegten Richtung ergeben[5]. Die Maschenregel ist in Abbildung 1.10 für $n = 3$ veranschaulicht. Zwischen den Punkten 1, 2 und 3 (sogenannten Klemmen)

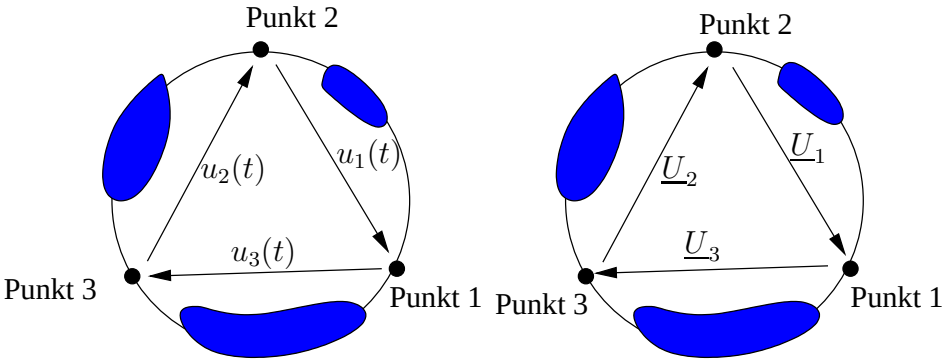


Abbildung 1.10: Maschenregel für die zeitlichen Schwingungen (links) und für die komplexen Zeiger (rechts).

befinden sich irgendwelche Bauteile oder auch Quellen, welche blau gezeichnet sind. Die Spannung $u_1(t)$ ist die Spannung von Punkt 2 gegenüber Punkt 1 usw. Schreibt man die Spannungen als

$$u_k(t) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\underline{U}_k \mathrm{e}^{j\omega t}\right\},$$

so lautet die Maschenregel für die Zeiger:

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} \underline{U}_k = 0} \tag{1.44}$$

[5]Etwas formaler kann man diese so definieren: Man legt zunächst die Richtung fest, in der die Schleife durchlaufen wird. Dann werden n (beliebige) Punkte in der Masche in der Reihenfolge dieser festgelegten Richtung nummeriert (vgl. Abbildung 1.10). Dann ist $u_1(t)$ die Spannung des Punktes 2 gegenüber dem Punkt 1, ist $u_2(t)$ die Spannung des Punktes 3 gegenüber dem Punkt 2 usw. Schließlich ist $u_n(t)$ die Spannung des Punktes 1 gegenüber dem Punkt n.

Eine mathematische Anmerkung zur Verwendung der komplexen Wechselstromrechnung

Warum folgt Gleichung (1.42) aus Gleichung (1.41) bzw. Gleichung (1.44) aus Gleichung (1.43)? Für die Maschenregel sieht man das folgendermaßen:

Für

$$u(t) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\underline{U}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\}$$

gilt allgemein:

$$u(t) = 0 \text{ für alle } t \;\Leftrightarrow\; \underline{U} = 0$$

Setze jetzt

$$u(t) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t)\ .$$

Der entsprechende Zeiger lautet (wegen der Linearität)

$$\underline{U} = \sum_{k=1}^{n} \underline{U}_k\,.$$

Also gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} u_k(t) = 0 \text{ für alle } t \;\Leftrightarrow\; \sum_{k=1}^{n} \underline{U}_k = 0$$

Für die Ströme bei der Knotenregel wird genauso argumentiert.

1.5.2 Zählpfeile und Zweipole

In den Abbildungen 1.9 und 1.10 wurden **Pfeile** eingezeichnet. Dies ist sehr wichtig, denn die Pfeile legen das Vorzeichen für Strom und Spannung fest. Hier soll noch einmal wiederholend erläutert werden, wie diese zu verstehen sind und wie die genaue Definition der **Zählpfeile** lautet.

Eine sehr ausführliche Behandlung dieses Themas findet sich in dem Werk von Moeller [1], worauf sich auch die folgende Darstellung stützt.

Die (reellen) Spannungen und Ströme in einer Schaltung sind vorzeichenbehaftete Größen. Man muss dabei eine Festlegung treffen, wann das Vorzeichen positiv zu zählen ist und wann negativ. Dies legt man durch die Pfeile fest. Der Strompfeil wie in Abbildung 1.11 (links) sagt also nichts über die tatsächliche Stromrichtung[6] aus, sondern nur, dass

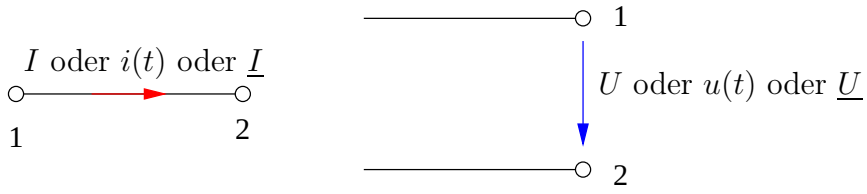


Abbildung 1.11: Zählpfeile für Strom (links) und Spannung (rechts).

der Strom als positiv zu zählen ist, wenn er von Klemme 1 nach Klemme 2 fließt und negativ, wenn er von Klemme 2 nach Klemme 1 fließt. Dabei kann es sich um einen Gleichstrom I oder einen Wechselstrom $i(t)$ handeln. Bei letzterem kommen beide Vorzeichen vor, und $i(t_1) > 0$ bedeutet gerade, dass zu diesem Zeitpunkt t_1 der Strom von 1 nach 2 fließt. Bei einem Wechselstrom mit konstanter Frequenz wird an den Strompfeil anstatt $i(t)$ meist $\underline{I}$ entsprechend Tabelle 1.1 geschrieben. Der Pfeil in Abbildung 1.11 (rechts) bedeutet, dass die Spannung als positiv zu zählen ist, wenn sich Klemme 1 auf einem höheren elektrischen Potential befindet als Klemme 2.

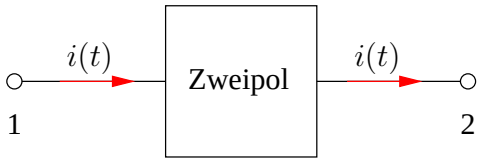


Abbildung 1.12: Ein Zweipol, in den der Strom $i(t)$ hinein fließt und wieder hinaus fließt. Als Spezialfall kann dies natürlich auch ein Gleichstrom sein.

Ein **Zweipol** ist, wie in Abbildung 1.12 gezeigt, eine *black box* zwischen zwei Klemmen, in die der selbe Strom hinein fließt und wieder hinaus fließt. Dies ist ein Sammelbegriff oder auch eine Abstraktion für eine elektrische Schaltung, die sich zwischen den beiden Klemmen befindet. Dabei ist nicht gesagt, ob der Zweipol elektrische Energie aufnimmt oder abgibt oder auch manchmal das eine und manchmal das andere tut[7]. Es ist *Definitionssache*, ob man einen Zweipol als Erzeuger oder Verbraucher auffasst. Dies wird durch die Zählpfeile ausgedrückt: Man spricht von einen **Erzeuger-Zählpfeilsystem**,

[6] Mit der tatsächlichen Stromrichtung ist natürlich immer die tatsächliche *technische* Stromrichtung gemeint.
[7] Man denke an Akkus oder Kondensatoren.

wenn Strom und Spannungspfeil entgegengesetzte Richtung haben, so wie es in Abbildung 1.13 (links) gezeigt ist. Wenn sie beide die gleiche Richtung haben wie in Abbildung

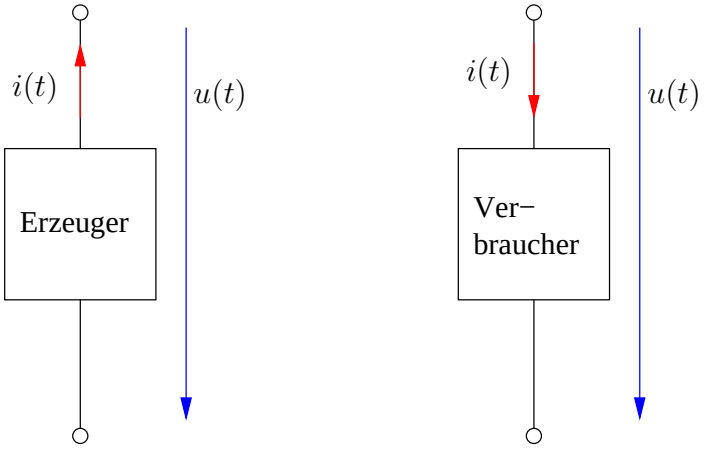


Abbildung 1.13: Zählpfeilsysteme: Erzeuger (links) und Verbraucher (rechts).

1.13 (rechts), so spricht man von einem **Verbraucher-Zählpfeilsystem**. Diese Definitionen passen zu der Vorstellung von Erzeuger und Verbraucher. Üblicherweise – aber nicht notwendig – verwendet man für die passiven Standard-Bauelemente L, C, R das Verbraucher-Zählpfeilsystem wie in Abbildung 1.14 gezeigt. Beim Kondensator ist dann z.B. beim Aufladen $i(t) > 0$, und bei Entladen gilt $i(t) < 0$. Wenn man den Kondensator als Erzeuger (z.B. als Spannungsquelle) auffassen würde, wäre die Vorzeichenkonvention anders herum. Bei der Induktivität gilt Entsprechendes. Wenn man diese als Erzeuger (z.B. als Stromquelle) auffasst, erhält man ein Minuszeichen im Induktionsgesetz. Über dieses Vorzeichen wird in der Schulphysik viel diskutiert. Man spricht dort von der Lenzschen Regel.

In der RC-Schaltung in Abbildung 1.6 wird für die Spannungsquelle das Erzeuger- Zählpfeilsystem verwendet und für Kondensator und Widerstand das Verbraucher- Zählpfeilsystem. Dort zeigen die Spannungspfeile für Erzeuger und Verbraucher innerhalb der Masche in *verschiedene Richtungen*. Das ist aber reine Konventionssache. Wenn man die Maschenregel in der Form (1.43) anwenden will, *muss* man für die ganze Masche eine *einheitliche Richtung* festlegen. Das heißt: Die Zweipole in der Masche (das sind die blauen Wolken in Abbildung 1.10) sind entweder einheitlich alle als Verbraucher gezählt oder einheitlich alle als Erzeuger. Ersteres würde in Abbildung 1.10 bedeuten, dass die Stromrichtung im Uhrzeigersinn festgelegt wird, und letzteres entspricht einer Stromrichtung gegen den Uhrzeigersinn. Übrigens verwenden Programme zur Schaltungssimulation häufig für *alles* (d.h. auch die Quellen) das Verbraucher-Zählpfeilsystem, weil damit die

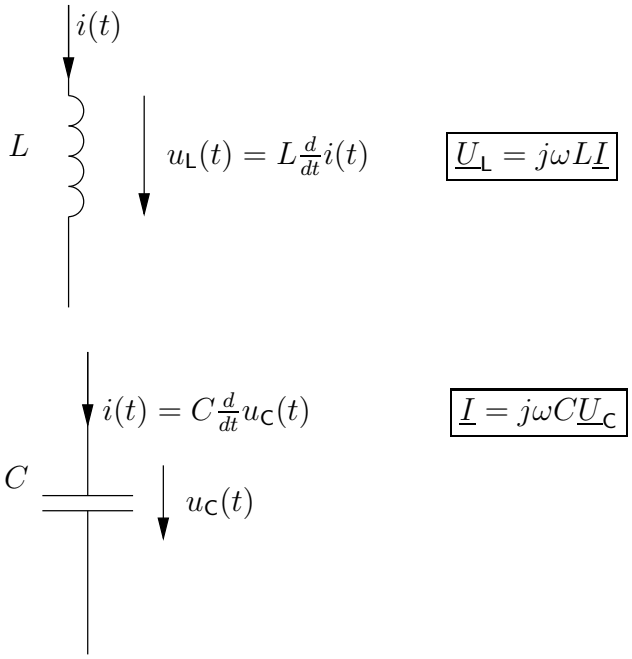


Abbildung 1.14: Verbraucher- Zählpfeilsystem für Induktivität (oben) und Kapazität (unten)

mathematische Behandlung einheitlich wird und sich die Maschenregel besser formulieren lässt.

Wenn – wie in Abbildung 1.15 gezeigt – an einem Verbraucher-Zweipol die Spannung $\underline{U}$ anliegt und der Strom $\underline{I}$ hinein fließt, so nennt man

$$\underline{Z}_{\mathsf{E}} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}\,. \tag{1.45}$$

die **Eingangsimpedanz** (d.h. der komplexe **Eingangswiderstand**) $\underline{Z}_{\mathsf{E}}$ des Verbraucher-Zweipols.

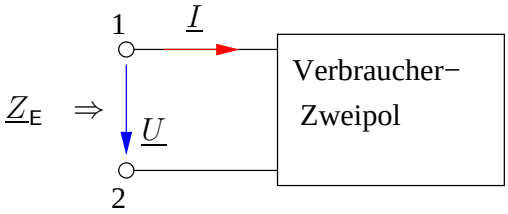


Abbildung 1.15: Veranschaulichung der Eingangsimpedanz eines Verbraucher-Zweipols.

1.6 Anmerkungen zur Berechnung von Impedanzen und Admittanzen

Wie man in der Gleichstromtechnik den Gesamtwiderstand einer Schaltung aus Ohmschen Widerständen mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze und des Ohmschen Gesetzes ausrechnet, wurde in *Grundlagen der Elektrotechnik 1* behandelt. Dort wurde behandelt, wie man den Gesamtwiderstand bei Parallel- und Reihenschaltung von Widerständen berechnet. Ebenso wurde dort die Spannungsteilerregel und die Stromteilerregel hergeleitet.

Die Berechnung einer Schaltung aus beliebigen Impedanzen erfolgt nach den selben Regeln wie bei Ohmschen Widerständen, nur sind die Größen jetzt komplex. Die Kirchhoffschen Gesetze gelten genauso für die komplexen Ströme und Spannungen wie für die Gleichströme und -spannungen. An die Stelle der Widerstände treten die Impedanzen, und an die Stelle des Ohmschen Gesetzes $U = RI$ tritt die Beziehung

$$\boxed{\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}}. \tag{1.46}$$

Merke: Die Gesamtimpedanz $\underline{Z}$ einer Schaltung aus passiven Standard-Bauelementen ist das Verhältnis von Klemmenspannung $\underline{U}$ zu Klemmenstrom $\underline{I}$ an dieser Schaltung. Die Schaltung ist hierbei als Zweipol im Verbraucher-Zählpfeilsystem aufzufassen. Die Gesamtimpedanz $\underline{Z}$ berechnet sich dann aus den Einzelimpedanzen der darin verwendeten Bauteile mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze, d.h. mit den gleichen Regeln für Parallel- und Reihenschaltung wie bei Ohmschen Widerständen.

In kartesischer Darstellung schreibt man die Impedanz als

$$\boxed{\underline{Z} = R + jX} \tag{1.47}$$

und bezeichnet den Realteil R als **Wirkwiderstand** oder **Resistanz** und den Imaginärteil X als **Blindwiderstand** oder **Reaktanz**. Wie an späterer Stelle gezeigt wird, ist allein der *Wirkwiderstand* für die Energieumsetzung *wirksam* – daher der Name.

Bei Parallelschaltungen ist es meist einfacher, mit den **Admittanzen** (Leitwerten) zu rechnen als mit den Impedanzen. Durch die Admittanz $\underline{Y} = \underline{Z}^{-1}$ ausgedrückt lautet die Beziehung (1.46):

$$\boxed{\underline{I} = \underline{Y}\,\underline{U}}. \tag{1.48}$$

In kartesischer Darstellung schreibt man die Admittanz als

$$\boxed{\underline{Y} = G + jB}. \tag{1.49}$$

Auch hier wird der Realteil G als **Wirkwert** oder **Konduktanz** und der Imaginärteil B als **Blindleitwert** oder **Suszeptanz** bezeichnet. Beide Größen lassen sich aus R und X in Gleichung (1.47) folgendermaßen durch konjugiert komplexes Erweitern berechnen:

$$\begin{aligned} \underline{Y} &= \frac{1}{R + jX} \\ &= \frac{R - jX}{R^2 + X^2} \end{aligned}$$

Vergleich mit Gleichung (1.49) liefert

$$\boxed{G = \frac{R}{R^2 + X^2}} \text{ und } \boxed{B = \frac{-X}{R^2 + X^2}}. \tag{1.50}$$

Auf dem gleichen Wege erhält man die Umkehrung:

$$\boxed{R = \frac{G}{G^2 + B^2}} \text{ und } \boxed{X = \frac{-B}{G^2 + B^2}}. \tag{1.51}$$

1.7 Elektrische Leistung bei Wechselströmen

1.7.1 Schein-, Wirk- und Blindleistung

Wir betrachten einen elektrischen Zweipol im *Verbraucher-Zählpfeilsystem*, wie er in Abbildung 1.16 gezeigt ist. Die zeitabhängige anliegende Spannung ist gegeben als

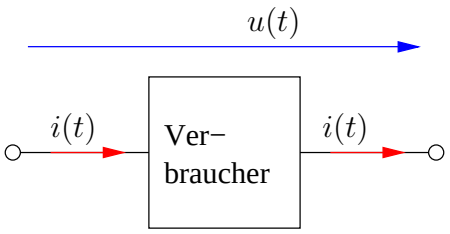


Abbildung 1.16: Verbraucher-Zweipol.

$$u\,(t) = \mathrm{Re}\,\{\underline{u}\,(t)\} \;\text{ mit }\; \underline{u}\,(t) = \sqrt{2}\underline{U}\mathrm{e}^{j\omega t} \tag{1.52}$$

und der Strom

$$i\,(t) = \mathrm{Re}\,\{\underline{i}\,(t)\} \text{ mit } \underline{i}\,(t) = \sqrt{2}\underline{I}\mathrm{e}^{j\omega t}\,. \tag{1.53}$$

Für die *zeitabhängige elektrische Leistung*, die der Zweipol *aufnimmt*, gilt allgemein:

$$p\,(t) = u\,(t)\,i\,(t)\,. \tag{1.54}$$

Betrachtet man den Zweipol dagegen im *Erzeuger-Zählpfeilsystem*, so beschreibt diese Formel die *abgegebene elektrische Leistung*.

Wir schreiben die beiden Gleichungen (1.52) und (1.53) als

$$u\,(t) = \frac{1}{2}\left(\underline{u}\,(t) + \underline{u}^*\,(t)\right) \text{ und } i\,(t) = \frac{1}{2}\left(\underline{i}\,(t) + \underline{i}^*\,(t)\right)$$

und setzen dies in Gleichung (1.54) ein:

$$\begin{aligned} p\,(t) &= \frac{1}{4}\left(\underline{u}\,(t) + \underline{u}^*\,(t)\right)\left(\underline{i}\,(t) + \underline{i}^*\,(t)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\underline{u}\,(t)\,\underline{i}\,(t) + \underline{u}^*\,(t)\,\underline{i}^*\,(t) + \underline{u}\,(t)\,\underline{i}^*\,(t) + \underline{u}^*\,(t)\,\underline{i}\,(t)\right) \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\{\underline{u}\,(t)\,\underline{i}\,(t)\} + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\{\underline{u}\,(t)\,\underline{i}^*\,(t)\} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich:

$$p\,(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{U}\,\underline{I}\mathrm{e}^{j2\omega t}\right\} + \mathrm{Re}\,\{\underline{U}\,\underline{I}^*\} \tag{1.55}$$

Der erste Term ist eine harmonische Schwingung der *doppelten Frequenz*, und der zweite Term ist konstant. Die zeitabhängige Leistung oszilliert also um einen Mittelwert

$$\boxed{P = \mathrm{Re}\,\{\underline{U}\,\underline{I}^*\}}. \tag{1.56}$$

Diese *mittlere* Leistung beschreibt die *physikalisch wirksame* Umsetzung von elektrischer Energie in eine nicht-elektrische Energieform (z.B. thermische oder mechanische Energie). Man bezeichnet sie deshalb als **Wirkleistung**. Die Maßeinheit der Leistung ist *Watt* [W]. Die oszillierende zeitabhängige Leistung $p(t)$ ist die Leistung, die von dem (Verbraucher-) Zweipol zur Zeit t aufgenommen wird. Diese Größe ist zu bestimmten Zeiten positiv und zu anderen negativ. Bei $p(t) > 0$ nimmt der Zweipol elektrische Leistung auf, bei $p(t) < 0$ gibt er elektrische Leistung ab.

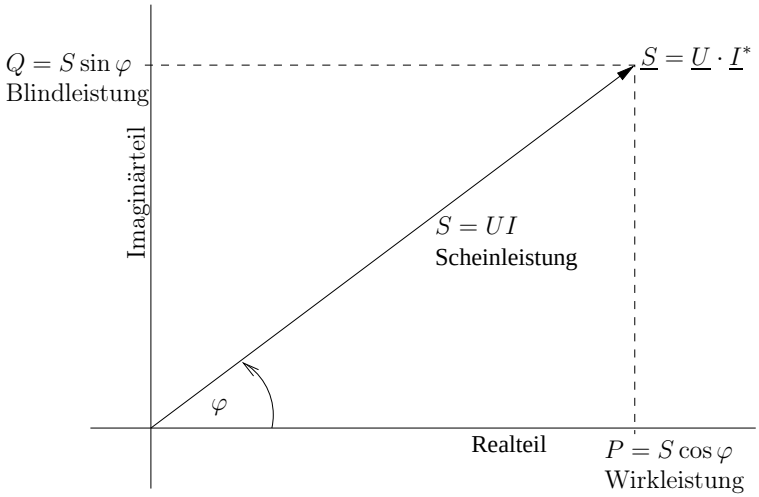


Abbildung 1.17: Veranschaulichung von Scheinleistung S, Wirkleistung P und Blindleistung Q in der Gaußschen Zahlenebene.

Die Wirkleistung P ist der Realteil der komplexen Größe

$$\boxed{\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^* = UI\mathrm{e}^{j(\varphi_u - \varphi_i)}}\,. \tag{1.57}$$

Ihr Betrag

$$\boxed{S = UI} \tag{1.58}$$

wird als **Scheinleistung** bezeichnet. Man gibt diese in *Voltampere* [VA] und nicht in Watt an, um sie von der Wirkleistung zu unterscheiden. Die Größe $\underline{S}$ heißt **komplexe (Schein-) Leistung**. Ihren Phasenwinkel bezeichnen wir mit

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i\,. \tag{1.59}$$

Es gilt also

$$\boxed{\underline{S} = S\mathrm{e}^{j\varphi}}\,. \tag{1.60}$$

Für den Realteil der komplexen Scheinleistung, die Wirkleistung, gilt dann

$$\boxed{P = S\cos\varphi}\,. \tag{1.61}$$

Den entsprechenden Imaginärteil

$$\boxed{Q = S \sin \varphi} \tag{1.62}$$

bezeichnet man als **Blindleistung**. Man gibt diese in *voltampère réactif* [var] an, um sie von der Wirkleistung und der Scheinleistung zu unterscheiden.. Eine positive Blindleistung nennt man **induktiv**, eine negative **kapazitiv**. Die Blindleistung hat keine Auswirkung auf die physikalisch wirksame Energieumsetzung des Zweipols[8]. Sie beschreibt nur die elektrische Energie (pro Zeit), die der Zweipol periodisch aufnimmt und wieder abgibt. Abbildung 1.17 zeigt diese Größen in der komplexen Ebene. Zwischen Schein-, Wirk- und Blindleistung besteht die Beziehung

$$\boxed{S^2 = P^2 + Q^2} \tag{1.63}$$

Um die Zeitabhängigkeit der Augenblicksleistung zu veranschaulichen, schreiben wir Gleichung (1.55) als

$$\boxed{p\,(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{S} + S\mathrm{e}^{j(2\omega t+\psi)}\right\}} \text{ mit } \psi = \varphi_u + \varphi_i\,. \tag{1.64}$$

In der geschweiften Klammer steht die komplexe Augenblicksleistung

$$\underline{p}\,(t) = \underline{S} + S\mathrm{e}^{j(2\omega t+\psi)}\,, \tag{1.65}$$

die in Abbildung 1.18 dargestellt ist. Der erste Term $\underline{S}$ ist ein ruhender komplexer Zeiger (schwarz), um dessen Spitze der zeitabhängige Zeiger $S\mathrm{e}^{j(2\omega t+\psi)}$ (rot dargestellt) mit der doppelten Frequenz rotiert. Beide Zeiger besitzen die selbe Länge S. Die Projektion der Zeigersumme auf die reelle Achse ist die reelle, physikalische Augenblicksleistung:

$$p\,(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{p}\,(t)\right\} = u(t)i(t)$$

Die durch Gleichung (1.64) gegebene zeitabhängige Leistung lässt sich auch folgender-

[8] Die Blindleistung hat aber sehr wohl einen Einfluss auf die thermische Energieumsetzung in den Versorgungsleitungen: Bei einer reinen Blindleistung wird von Verbraucher keine Energie verbraucht, obwohl hohe Ströme fließen, die in den Versorgungsleitungen zu einer thermischen Verlustleistung führen. Deswegen haben Großverbraucher einen Stromzähler, der nicht nur die Wirkleistung, sondern auch die Blindleistung misst.

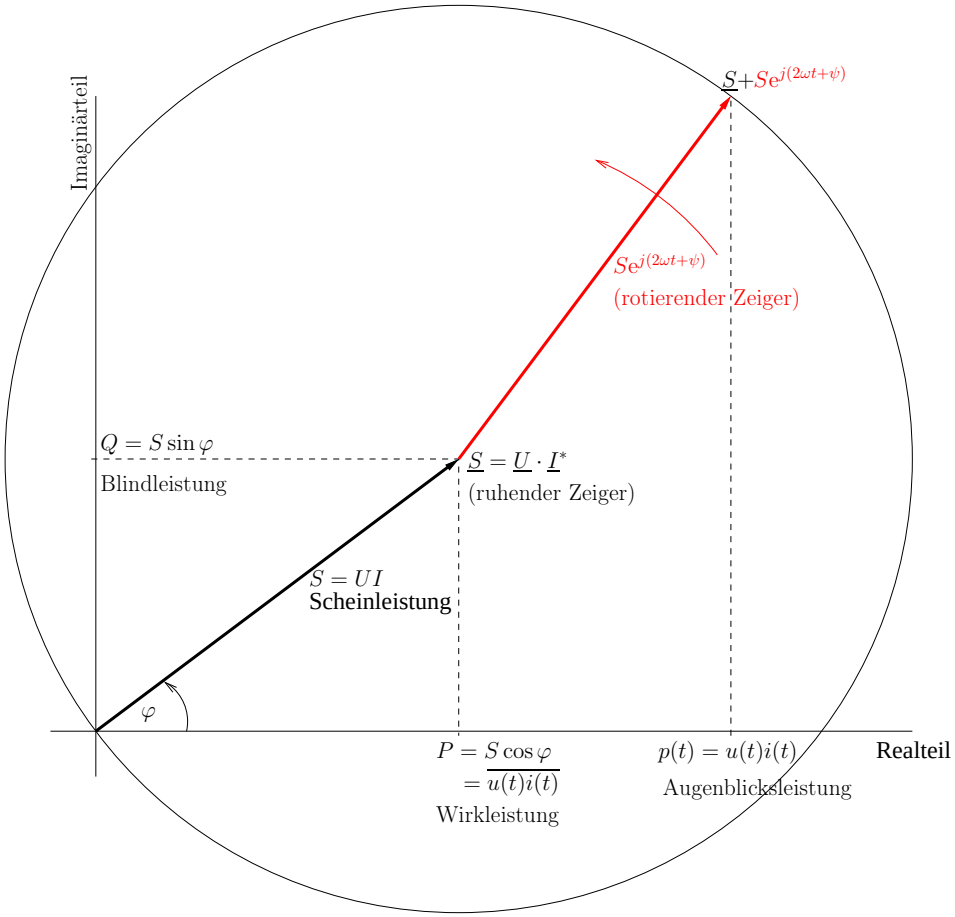


Abbildung 1.18: Veranschaulichung der zeitabhängigen Leistung durch einen rotierenden Zeiger.

maßen schreiben:

$$p\left(t\right) = UI\left(\cos\varphi + \cos(2\omega t + \psi)\right) \text{ mit } \varphi = \varphi_u - \varphi_i \text{ und } \psi = \varphi_u + \varphi_i$$

Man kann dies auch ohne komplexe Rechnung direkt aus

$$p\left(t\right) = u\left(t\right)i\left(t\right) = \sqrt{2}U\cos(\omega t + \varphi_u)\cdot\sqrt{2}I\cos(\omega t + \varphi_i)$$

und der Formel

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

herleiten. Allerdings erschließt sich dabei nicht direkt die oben gezeigte Veranschaulichung der Leistung durch Zeiger in der komplexen Ebene.

1.7.2 Schein-, Wirk- und Blindwiderstand

Wir betrachten die komplexe Scheinleistung der Impedanz $\underline{Z}$. Es gilt:

$$\boxed{\underline{S} = \underline{U}\,\underline{I}^*} \tag{1.66}$$

Mit

$$\underline{U} = \underline{Z}\,\underline{I}$$

und $\underline{I}^*\underline{I} = I^2$ ergibt sich

$$\boxed{\underline{S} = \underline{Z}I^2} \tag{1.67}$$

Die komplexe Impedanz $\underline{Z}$ und die komplexe Scheinleistung $\underline{S}$ unterscheiden sich also nur um den reellen Proportionalitätsfaktor I^2. Das hat zur Folge, dass sie den selben Phasenwinkel φ besitzen, der durch Gleichung (1.59) gegeben ist. Mit der Bezeichnung

$$Z = |\underline{Z}| \tag{1.68}$$

für den sogenannten **Scheinwiderstand** gilt also:

$$\underline{Z} = Z\mathrm{e}^{j\varphi} \tag{1.69}$$

Merke: Die Phase φ der komplexen Scheinleistung ist identisch mit die Phase der komplexen Impedanz. Es gilt:

$$\boxed{\underline{S} = UI\mathrm{e}^{j\varphi}} \tag{1.70}$$

Schreibt man die Impedanz in kartesischer Darstellung als

$$\underline{Z} = R + jX\,, \tag{1.71}$$

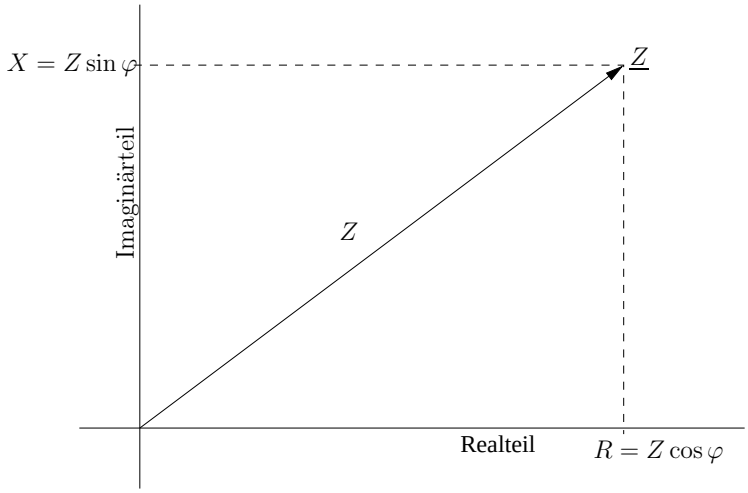


Abbildung 1.19: Veranschaulichung von Scheinwiderstand Z, Wirkwiderstand R und Blindwiderstand X in der Gaußschen Zahlenebene.

so ist der Realteil dieser Impedanz ist gegeben als

$$R = Z \cos\varphi\,. \tag{1.72}$$

Dieser wird als **Wirkwiderstand** oder **Resistanz** bezeichnet, weil nur dieser allein für die Wirkleistung (und damit für den Energieverbrauch) verantwortlich ist. Denn aus der Realteilbildung von Gleichung (1.67) ergibt sich:

$$\boxed{P = RI^2} \tag{1.73}$$

Der Wirkwiderstand ist als *Ohmscher Anteil* der Impedanz $\underline{Z}$ zu interpretieren,– daher die Bezeichnung mit dem Buchstaben R. Der Imaginärteil der Impedanz

$$X = Z \sin\varphi \tag{1.74}$$

wird als **Blindwiderstand** oder **Reaktanz** bezeichnet. Er ist für die Blindleistung verantwortlich. Es gilt:

$$\boxed{Q = XI^2} \tag{1.75}$$

Alternativ zu Gleichung (1.67) kann man die komplexe Scheinleistung auch folgenderma-

ßen schreiben:

$$\boxed{\underline{S} = \frac{1}{\underline{Z}^*} U^2} \tag{1.76}$$

1.8 Ersatzschaltungen für Spannungsquellen und Stromquellen

Bei der folgenden Darstellung wird mit Wechselspannungsquellen und Impedanzen gearbeitet. Die selben Überlegungen gelten sinngemäß auch für Gleichspannungsquellen und Ohmsche Widerstände.

1.8.1 Ideale Quellen

Ideale Spannungs- und Stromquellen gibt es in der Realität nicht. Aber sie sind eine sinnvolle Idealisierung, um daraus die im Folgenden beschriebenen linearen Quellen zu konstruieren, welche oft ein brauchbares Modell für die Realität sind. Ideale Quellen sind

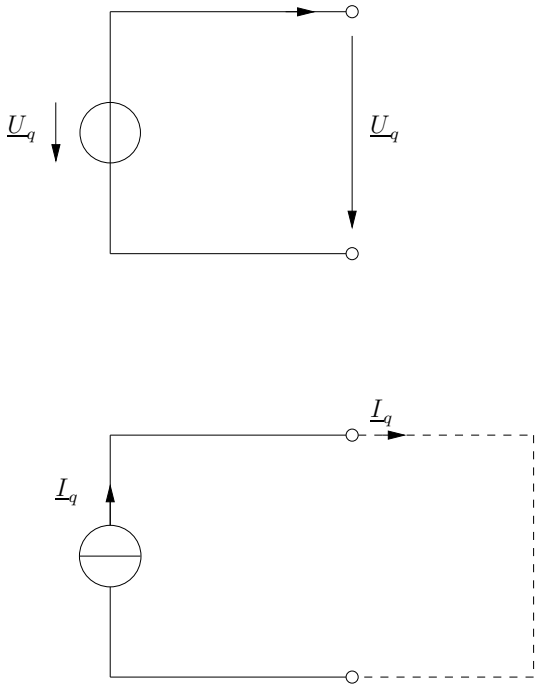


Abbildung 1.20: Ideale Spannungsquelle (oben) und ideale Stromquelle (unten).

folgendermaßen definiert:

- Eine **ideale (Wechsel-) Spannungsquelle** liefert immer eine gegebene Spannung $u_\mathsf{q}(t)$ bzw. $\underline{U}_\mathsf{q}$, und zwar unabhängig von der Belastung an den Klemmen.
- Eine **ideale (Wechsel-) Stromquelle** liefert immer einen gegebenen Strom $i_\mathsf{q}(t)$ bzw. $\underline{I}_\mathsf{q}$, und zwar unabhängig von der Belastung an den Klemmen.

Das Schaltbild für eine ideale (Wechsel-) Spannungsquelle ist in Abbildung 1.20 oben gezeigt und unten das Schaltbild für eine ideale (Wechsel-) Stromquelle. Üblicherweise verwendet man für diese Quellen das Erzeuger-Zählpfeilsystem.

Aus der Definition folgt, dass man im Ersatzschaltbild *eine ideale Spannungsquelle nicht kurzschließen* und *eine ideale Stromquelle nicht im Leerlauf* betreiben darf, da dies zwangsläufig zu einem Widerspruch mit den obigen Definitionen führen würde.

1.8.2 Lineare Quellen

Lineare Strom- und Spannungsquellen gibt es zwar streng genommen in der Wirklichkeit auch nicht (jedenfalls nicht exakt), aber sie stellen oft in der Nähe eines bestimmten Arbeitspunktes ein sehr gutes Modell dar. Lineare Quellen sind dadurch definiert, dass Strom und Spannung *linear* voneinander abhängen, also der Zusammenhang die Gestalt einer Geradengleichung hat[9].

Eine lineare Spannungsquelle (Abbildung 1.21 oben) besteht aus einer idealen Spannungsquelle und einer in Reihe geschalteten Impedanz $\underline{Z}_\mathsf{i}$, die man als **Innenwiderstand** bezeichnet. Den Innenwiderstand muss man sich als eine Modellgröße vorstellen, in der möglicherweise die Auswirkung vieler Bauteile zusammengefasst dargestellt wird. An den Klemmen liegt die Spannung $\underline{U}$, und belastet wird die Quelle mit einer Lastimpedanz $\underline{Z}_\mathsf{Last}$. Den Innenwiderstand kann man durch Messungen an den Klemmen messen: Im Leerlaufbetrieb misst man die Leerlaufspannung

$$\underline{U}_\mathsf{LL} = \underline{U}_\mathsf{q} \tag{1.77}$$

und im Kurzschlussbetrieb den Kurzschlussstrom

$$\underline{I}_\mathsf{KS} = \frac{1}{\underline{Z}_\mathsf{i}} \underline{U}_\mathsf{q} \,. \tag{1.78}$$

[9] Natürlich ist das nur bei reellen Größen auch geometrisch eine Gerade.

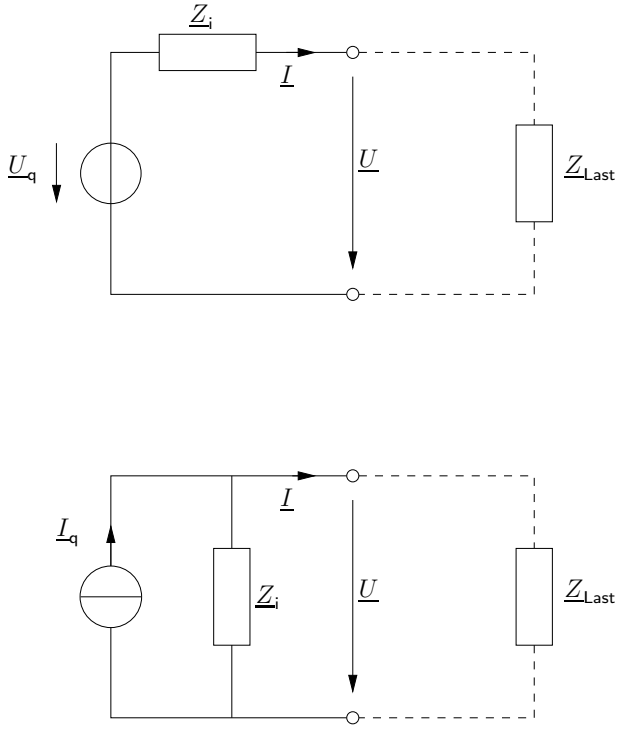


Abbildung 1.21: Spannungsquelle mit Innenwiderstand (oben) und die dazu äquivalente Stromquelle (unten) mit Innenwiderstand $\underline{Z}_\mathsf{i}$.

Für den Innenwiderstand der linearen Spannungsquelle folgt aus diesen beiden Gleichungen:

$$\boxed{\underline{Z}_\mathsf{i} = \frac{\underline{U}_\mathsf{LL}}{\underline{I}_\mathsf{KS}}} \tag{1.79}$$

Es gilt der lineare Zusammenhang zwischen Strom $\underline{I}$ und Spannung $\underline{U}$ an der Last:

$$\boxed{\underline{U} = \underline{U}_\mathsf{LL} - \underline{Z}_\mathsf{i}\underline{I}} \tag{1.80}$$

Eine lineare Stromquelle (Abbildung 1.21 unten) besteht aus einer idealen Stromquelle und einem parallel geschalteten (komplexen) Innenwiderstand $\underline{Z}_\mathsf{i}$. Im Leerlaufbetrieb gilt

$$\underline{U}_\mathsf{LL} = \underline{Z}_\mathsf{i}\underline{I}_\mathsf{q} \tag{1.81}$$

und im Kurzschlussbetrieb

$$\underline{I}_{\mathsf{KS}} = \underline{I}_{\mathsf{q}}\,. \tag{1.82}$$

Für den Innenwiderstand der linearen Stromquelle folgt aus diesen beiden Gleichungen:

$$\boxed{\underline{Z}_{\mathsf{i}} = \frac{\underline{U}_{\mathsf{LL}}}{\underline{I}_{\mathsf{KS}}}} \tag{1.83}$$

Dies ist die selbe Formel wie für die lineare Spannungsquelle. Es gilt der lineare Zusammenhang zwischen Strom $\underline{I}$ und Spannung $\underline{U}$ an der Last:

$$\boxed{\underline{I} = \underline{I}_{\mathsf{KS}} - \frac{1}{\underline{Z}_{\mathsf{i}}}\underline{U}} \tag{1.84}$$

Die Formeln (1.79) und (1.83) für den Innenwiderstand sind identisch, und die beiden linearen Gleichungen (1.80) und (1.84) sind äquivalent. Deshalb sind die Schaltungen äquivalent. In Abbildung 1.22 ist der lineare Zusammenhang zwischen Strom und Spannung *symbolisch* durch Geraden dargestellt. Symbolisch deshalb, weil man solche Geraden nur für reelle Größen zeichnen kann. Zur Veranschaulichung sind die Bilder trotzdem hilfreich. Das linke Bild stellt die Geradengleichung (1.80) dar, und das rechte die Geradengleichung (1.84).

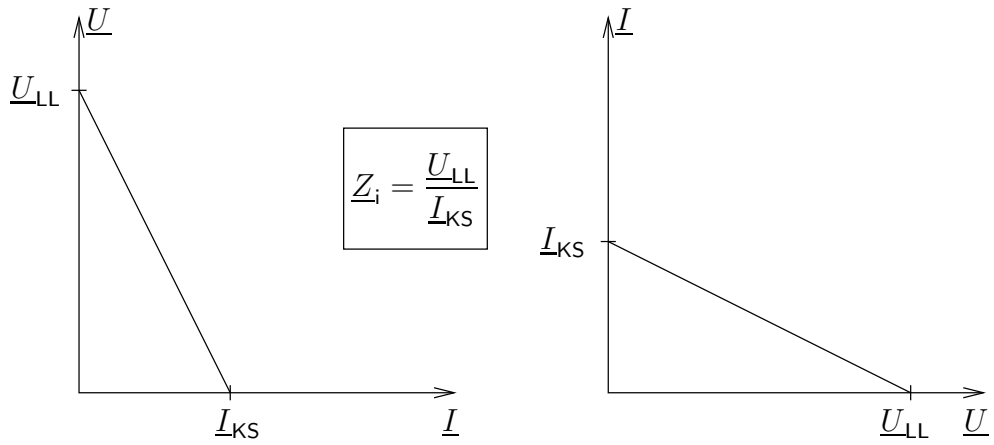


Abbildung 1.22: Linearer Zusammenhang zwischen Strom $\underline{I}$ und Spannung $\underline{U}$ an der Last in Abbildung 1.21. Links: Spannung als Funktion des Stroms. Rechts: Strom als Funktion der Spannung.

1.8.3 Einfache Modellierung von aktiven Zweipolen

Eine beliebige Schaltung aus idealen Spannungs- und Stromquellen, kombiniert mit den linearen passiven Standard-Bauelementen (Ohmsche Widerstände, Induktivitäten, Kapazitäten), bildet einen **aktiven Zweipol**. An den Klemmen muss (wegen der Linearität der Bauelemente) ein linearer Zusammenhang der Gestalt (1.80) bzw. (1.84) zwischen Spannung und Laststrom vorliegen. Das heißt, der aktive Zweipol ist (wahlweise) äquivalent zu einer linearen Spannungsquelle oder einer linearen Spannungsquelle. Dies ist in Abbildung 1.23 dargestellt. Man muss jetzt nur noch den Ersatz-Innenwiderstand

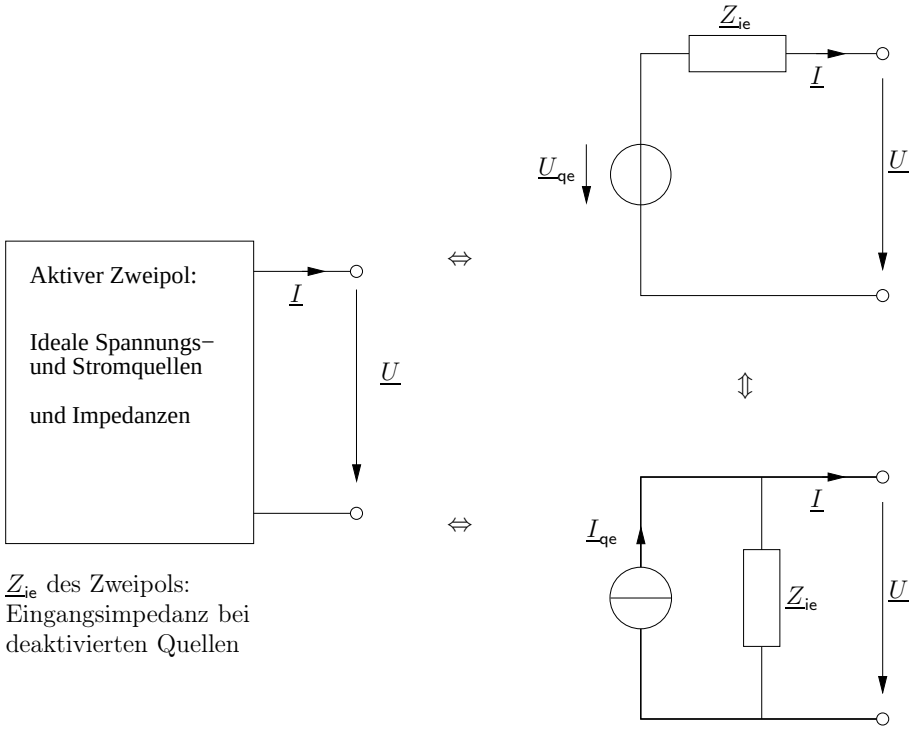


Abbildung 1.23: Ersatzschaltungen für Spannungs- und Stromquellen. Links: Allgemeine lineare Quelle. Rechts oben: Lineare Ersatz-Spannungsquelle. Rechts unten: Lineare Ersatz-Stromquelle.

$\underline{Z}_{\mathsf{ie}}$ sowie die ideale Ersatz-Quellenspannung $\underline{U}_{\mathsf{qe}}$ bzw. den idealen Ersatz-Quellenstrom $\underline{I}_{\mathsf{qe}}$ finden und kann dann den aktiven Zweipol durch eine der beiden viel einfacheren Schaltungen auf der rechten Seite der Abbildung ersetzen. Wie man dies macht, wird im Folgenden beschrieben:

Ermittlung des Innenwiderstandes (Vertauschung von Last und Quelle): Den Ersatzinnenwiderstand erhält man, in dem man innerhalb der (bekannten) Schaltung des Zweipols alle Quellen deaktiviert. Das heißt, alle idealen Spannungsquellen werden durch einen Kurzschluss ersetzt und alle Stromquellen durch einen Leerlauf[10]. Dann ergibt sich der Ersatz-Innenwiderstand als die Eingangsimpedanz dieses passiven Zweipols.

Ermittlung der Ersatz-Quellenspannung: Da sich der aktive Zweipol links in der Abbildung verhalten soll wie die Ersatzschaltung rechts oben, ist die Ersatz-Quellenspannung $\underline{U}_{\mathsf{qe}}$ gerade die Leerlaufspannung an den Klemmen. Diese lässt sich mit den Kirchhoffschen Gesetzen oder mit der Spannungsteilerregel meist leicht berechnen.

Ermittlung des Ersatz-Quellenstromes: Da sich der aktive Zweipol links in der Abbildung verhalten soll wie die Ersatzschaltung rechts unten, ist der Ersatz-Quellenstrom $\underline{I}_{\mathsf{qe}}$ gerade der Kurzschlussstrom (bei Kurzschluss der Klemmen). Auch dieser lässt sich mit den Kirchhoffschen Gesetzen oder mit der Stromteilerregel meist leicht berechnen.

Das folgende konkrete Beispiel einer einfachen Schaltung soll die oben beschriebene allgemeine Vorgehensweise illustrieren.

Ein einfaches Rechenbeispiel: Wir betrachten die Schaltung oben links in der Abbildung 1.24 und möchten diese durch eine einfache lineare Spannungsquelle (oben rechts) oder Stromquelle (unten links) ersetzen. Um den Innenwiderstand zu berechnen, wird die Spannung $\underline{U}_{\mathsf{q}}$ durch einen gedachten Kurzschluss ersetzt. Dann sind von den Klemmen aus gesehen die beiden Impedanzen parallel geschaltet. Der Ersatz-Innenwiderstand lautet also:

$$\underline{Z}_{\mathsf{ie}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Bei ausgeschalteten Quellen ist dies der Eingangswiderstand des Zweipols. Die ideale Spannungsquelle der rechten Schaltung ist gegeben durch

$$\underline{U}_{\mathsf{qe}} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} \underline{U}_{\mathsf{q}} \,.$$

[10] Zur Erinnerung: Eine Spannungsquelle mit konstant 0 V ist ein Kurzschluss, und eine Stromquelle mit konstant 0 A ist ein Leerlauf.

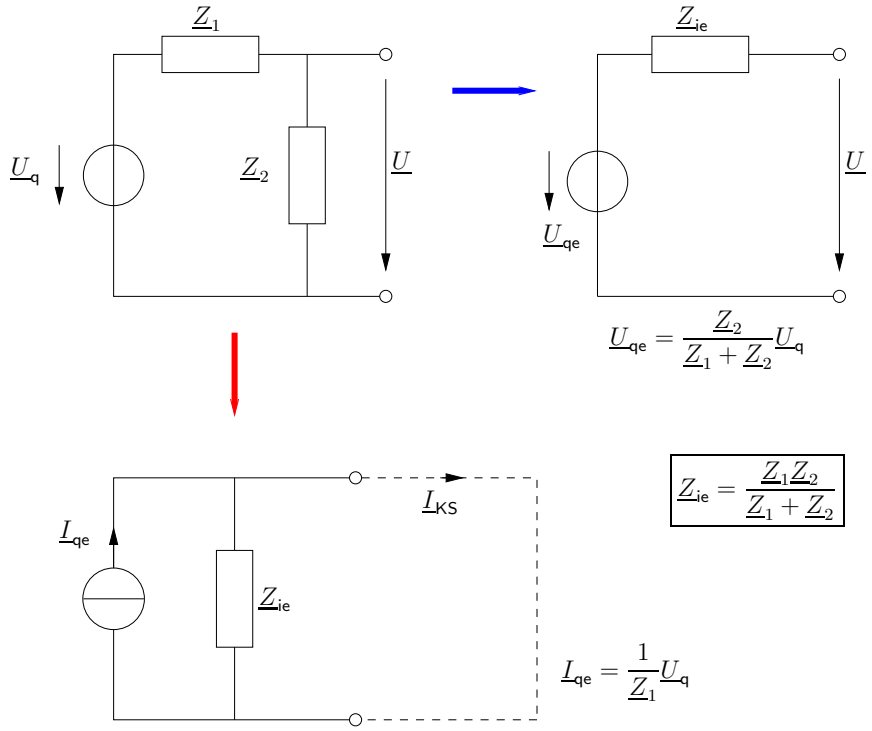


Abbildung 1.24: Beispiel einer Schaltung (oben links) für die Ersatzschaltungen mit linearer Spannungsquelle (oben rechts) und linearer Stromquelle (unten) konstruiert werden.

Dies ist die Leerlaufspannung $\underline{U}$ der Schaltung links oben, die sich aus der Spannungsteilerregel ergibt. Alternativ kann man mit

$$\underline{I}_{KS} = \frac{1}{\underline{Z}_1}\underline{U}_q \text{ und } \underline{U}_{LL} = \underline{U}_{qe}$$

den obigen Ersatz-Innenwiderstand auch so berechnen:

$$\underline{Z}_{ie} = \frac{\underline{U}_{LL}}{\underline{I}_{KS}} = \frac{\frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\underline{U}_q}{\frac{1}{\underline{Z}_1}\underline{U}_q} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

Man kann dieselbe Schaltung auch durch eine Ersatz-Stromquelle mit

$$\underline{I}_{qe} = \frac{1}{\underline{Z}_{ie}}\underline{U}_{qe} = \frac{1}{\underline{Z}_1}\underline{U}_q$$

und dem selben Innenwiderstand $\underline{Z}_{ie}$ in Parallelschaltung modellieren, siehe Abbildung 1.24 unten.

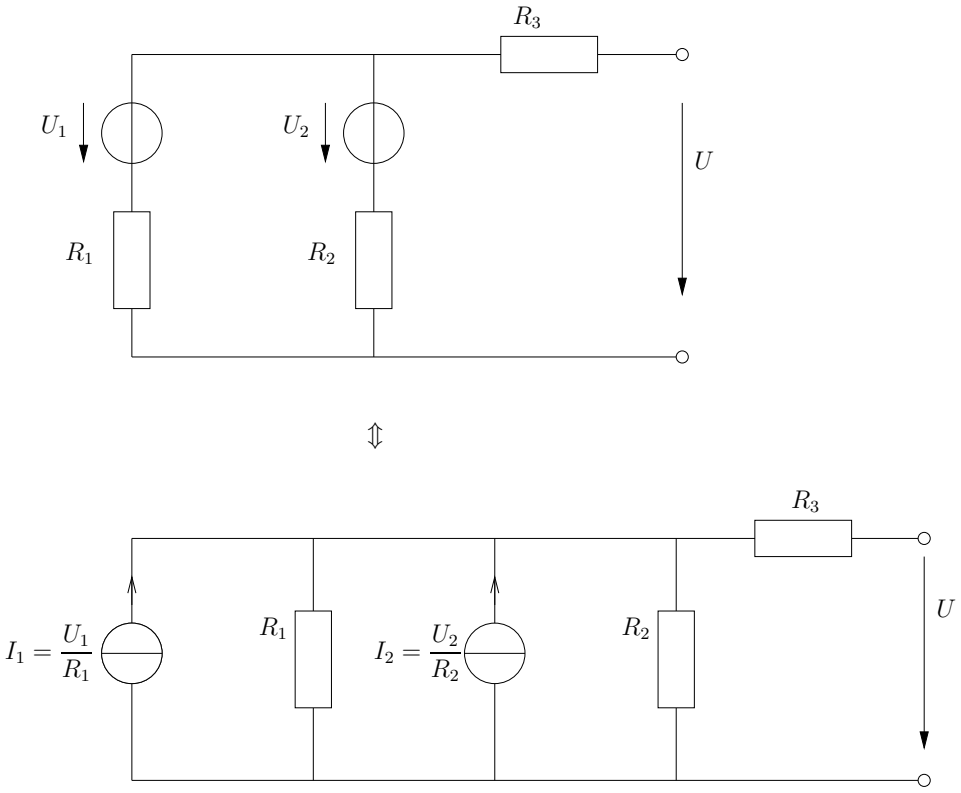


Abbildung 1.25: Eine Schaltung mit parallelen Spannungsquellen (oben) und die äquivalente Ersatzspannungsquelle (unten).

Ein Beispiel mit zwei parallelen Spannungsquellen: Wir betrachten die Schaltung in Abbildung 1.25 (oben) mit Ohmschen Widerständen und zwei parallel geschalteten Gleichspannungsquellen. Durch Umwandlung der beiden linearen Spannungsquellen mit Innenwiderständen R_1 und R_2 erhält man das untere Bild mit zwei linearen Stromquellen, die von idealen Stromquellen

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} \text{ und } I_2 = \frac{U_2}{R_2}$$

gespeist werden. Durch die (gedachte) Deaktivierung der Quellen im Bild oben oder unten und ergibt sich der Innenwiderstand an den Klemmen:

$$R_{\mathsf{ie}} = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1 + R_2}$$

Für die Leerlaufspannung $U_{\mathsf{LL}} = U_{\mathsf{qe}}$ im unteren Bild spielt R_3 keine Rolle. Der Gesamtstrom im Leerlauf ist

$$\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) U_{\mathsf{LL}}$$

Daraus folgt

$$U_{\mathsf{qe}} = \frac{\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{U_1 R_2 + U_2 R_1}{R_1 + R_2}$$

Damit ergibt sich die lineare Ersatz-Spannungsquelle in Abbildung 1.26. Eine lineare

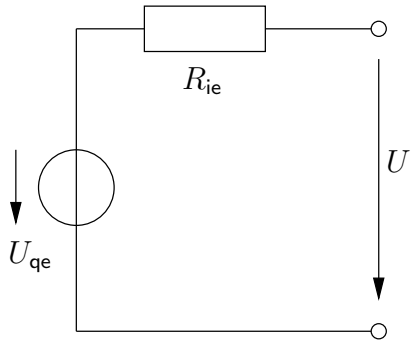


Abbildung 1.26: Ersatz-Spannungsquelle für die Schaltung in Abbildung 1.25 unten.

Ersatzstromquelle lässt sich auch konstruieren. Sie besitzt den idealen Ersatz-Quellstrom

$$I_{\mathsf{qe}} = \frac{U_{\mathsf{qe}}}{R_{\mathsf{ie}}} = \frac{U_1 R_2 + U_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

und den selben Innenwiderstand R_{ie}.

Vorsicht bei der Berechnung der Leistung der Quelle:

Wie wir gezeigt haben, lassen sich lineare Strom- und Spannungsquellen in einander transformieren und zeigen dabei den gleichen (linearen) Zusammenhang zwischen Strom und Spannung an den Klemmen, wo der Verbraucher angeschlossen wird. Das bedeutet aber *nicht*, dass die idealen Ersatzquellen U_{qe} und I_{qe} dieselbe Leistung abgeben. Am einfachsten kann man das an Hand der folgenden Denkaufgabe verstehen.

Denkaufgabe: Eine lineare Spannungsquelle und eine lineare Stromquelle entsprechend Abbildung 1.23 (oben und unten) werden in identische Gehäuse eingebaut. Gibt es eine

Möglichkeit, die beiden zu unterscheiden?

Antwort: Ja. Denn im Leerlaufbetrieb wird die Stromquelle warm (d.h. die ideale Quelle gibt Leistung an den Widerstand ab), die Spannungsquelle aber nicht.

Für die Schaltungsberechnung bedeutet das, dass man zur Berechnung der von der Quelle abgegebenen Leistung nicht mit der Ersatzquelle rechnen darf, sondern immer zur ursprünglichen Schaltung zurückkehren muss. Die Leistung erhält man aus Strom und Spannung der ursprünglichen Quellen.

1.9 Leistungsanpassung

Wir betrachten das in Abbildung 1.27 dargestellte Ersatzschaltbild einer allgemeinen

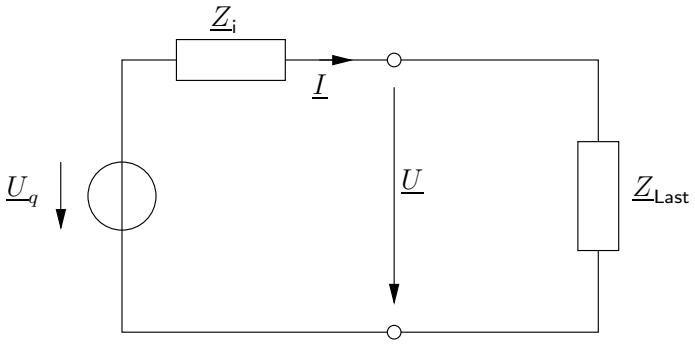


Abbildung 1.27: Lineare Spannungsquelle mit Innenwiderstand $\underline{Z}_\mathsf{i}$ und Lastwiderstand $\underline{Z}_\mathsf{Last}$.

linearen Spannungsquelle mit Innenwiderstand $\underline{Z}_\mathsf{i}$, an die ein Lastwiderstand $\underline{Z}_\mathsf{Last}$ angeschlossen ist. Der Innenwiderstand ist gegeben. Gefragt wird, bei welchem Wert des Lastwiderstands die Quelle maximale Wirkleistung an die Last abgibt. Man spricht dann von **Leistungsanpassung**.

1.9.1 Reelle Widerstände

Weil dies die Herleitung vereinfacht, betrachten wir zunächst nur einen reellen (Ohmschen) Innenwiderstand R_i und einen reellen Lastwiderstand R_Last. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man eine reelle Quellspannung U_q (d.h. mit Phase $\varphi_\mathsf{q} = 0$) annehmen. Weil nur Ohmsche Widerstände vorkommen, ist der Strom I dann ebenfalls

reell, und man kann wie mit Gleichstrom rechnen. Der Klemmspannung ist eine lineare Funktion des Stroms:

$$U = U_\mathsf{q} - R_\mathsf{i} I \,.$$

Für die Leistung

$$P = U I$$

ergibt sich daraus die quadratische Funktion des Stroms:

$$P = (U_\mathsf{q} - R_\mathsf{i} I)\, I \tag{1.85}$$

Spannung und Leistung als Funktion des Stroms sind in Abbildung 1.28 eingezeichnet.

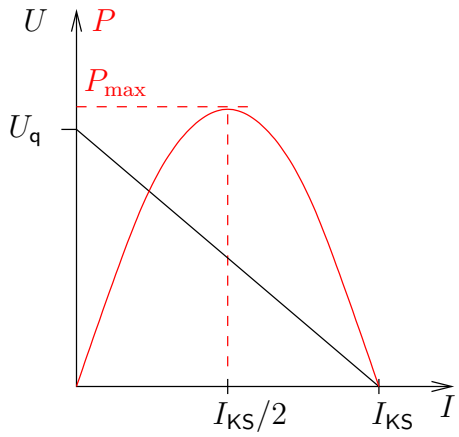


Abbildung 1.28: Spannung U (schwarz) und Leistung P (rot) als Funktion des Stroms (für rein Ohmsche Widerstände).

Die Parabel (für die Leistung) schneidet die Abszisse bei $I = 0$ und $I = I_\mathsf{KS} = U_\mathsf{q}/R_\mathsf{i}$ und hat ihr Maximum genau in der Mitte dazwischen bei

$$I = \frac{1}{2} I_\mathsf{KS} = \frac{U_\mathsf{q}}{2R_\mathsf{i}} \,.$$

Wegen

$$I = \frac{U_\mathsf{q}}{R_\mathsf{i} + R_\mathsf{Last}} \tag{1.86}$$

bedeutet das für den Lastwiderstand:

$$\boxed{R_{\mathsf{Last}} = R_{\mathsf{i}}} \tag{1.87}$$

Leistungsanpassung ist also gegeben, wenn der Lastwiderstand gleich dem Innenwiderstand ist. Der Lastwiderstand nimmt dann den Maximalwert der Leistung

$$\boxed{P_{\max} = \frac{U_{\mathsf{q}}^2}{4R_{\mathsf{i}}}} \tag{1.88}$$

auf.

Weil es später noch einmal gebraucht wird, schreiben wir hier noch die Formel für die vom Lastwiderstand aufgenommene Leistung als Funktion von R_{Last} hin. Wegen Gleichung (1.86) gilt

$$P = R_{\mathsf{Last}} I^2 = \frac{R_{\mathsf{Last}}}{(R_{\mathsf{i}} + R_{\mathsf{Last}})^2} U_{\mathsf{q}}^2 \tag{1.89}$$

Mit Hilfe der Differentialrechnung kann man zeigen, dass diese Funktion für P in Abhängigkeit von der Variablen R_{Last} ihr Maximum bei $R_{\mathsf{Last}} = R_{\mathsf{i}}$ besitzt. Wir konnten diese kleine Rechnung vermeiden, indem wir das Maximum der Leistung als Funktion des Stroms in Abbildung 1.28 bestimmt haben, wozu man keine Differentialrechnung braucht.

1.9.2 Komplexe Widerstände

Wir lassen nun in Abbildung 1.27 eine im Allgemeinen komplexe Impedanz

$$\underline{Z}_{\mathsf{i}} = R_{\mathsf{i}} + jX_{\mathsf{i}} \text{ mit } R_{\mathsf{i}} > 0$$

als Innenwiderstand zu und suchen die Lastimpedanz

$$\underline{Z}_{\mathsf{Last}} = R_{\mathsf{Last}} + jX_{\mathsf{Last}}\,,$$

für die die Wirkleistung

$$P = R_{\mathsf{Last}} I^2$$

maximal wird. Wegen

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}_\mathsf{q}}{\underline{Z}_\mathsf{i} + \underline{Z}_\mathsf{Last}} \tag{1.90}$$

gilt

$$P = \frac{R_\mathsf{Last}}{|\underline{Z}_\mathsf{i} + \underline{Z}_\mathsf{Last}|^2} U_\mathsf{q}^2 = \frac{R_\mathsf{Last}}{(R_\mathsf{i} + R_\mathsf{Last})^2 + (X_\mathsf{i} + X_\mathsf{Last})^2} U_\mathsf{q}^2 \,. \tag{1.91}$$

Dies ist eine Funktion in den zwei Variablen R_Last und X_Last. Damit diese maximal wird, muss auf jeden Fall $X_\mathsf{i} + X_\mathsf{Last} = 0$ gelten. Daraus ergibt sich die Bedingung

$$X_\mathsf{Last} = -X_\mathsf{i} \,. \tag{1.92}$$

Ist diese erfüllt, muss noch

$$P = \frac{R_\mathsf{Last}}{(R_\mathsf{i} + R_\mathsf{Last})^2} U_\mathsf{q}^2 \tag{1.93}$$

bezüglich R_Last maximiert werden. Dies ist der selbe Ausdruck wie der in Gleichung (1.89), der sein Maximum für

$$R_\mathsf{Last} = R_\mathsf{i} \tag{1.94}$$

annimmt. Der Lastwiderstand nimmt dann die Leistung

$$\boxed{P_\mathrm{max} = \frac{U_\mathsf{q}^2}{4R_\mathsf{i}} = \frac{U_\mathsf{q}^2}{4\,\mathrm{Re}\,\{\underline{Z}_\mathsf{i}\}}} \tag{1.95}$$

auf. Die Bedingungen (1.92) und (1.93) zusammen ergeben die Anpassungsbedingung für komplexe Widerstände:

$$\boxed{\underline{Z}_\mathsf{Last} = \underline{Z}_\mathsf{i}^*} \tag{1.96}$$

Anmerkung Diese Überlegungen sind nur für $R_\mathsf{i} > 0$ anwendbar. Für einen reinen Blindwiderstand $\underline{Z}_\mathsf{i}$ mit $R_\mathsf{i} = 0$ wird Gleichung (1.93) zu

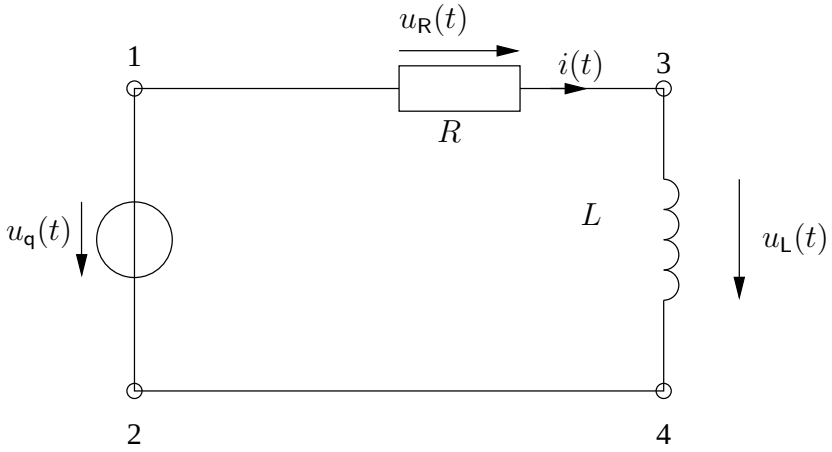
$$P = \frac{1}{R_\mathsf{Last}} U_\mathsf{q}^2 \,.$$

Diese Funktion von R_{Last} hat kein lokales Maximum, sondern wird beliebig groß für kleine Werte R_{Last}.

Aufgaben zu Kapitel 1

Aufgabe 1.1

Gegeben ist die folgende Schaltung



mit

$$L = 10\,\mathrm{mH} \text{ und } R = 10\,\Omega\,.$$

Sie wird angeregt durch eine Quellspannung

$$u_\mathsf{q}(t) = 12\,\mathrm{V}\cos\omega t + 12\,\mathrm{V}\sin\omega t$$

Die unbekannten Größen sind

$$u_\mathsf{L}(t) = \sqrt{2}\,U_L\cos\left(\omega t + \varphi_L\right)$$

$$u_\mathsf{R}(t) = \sqrt{2}\,U_R\cos\left(\omega t + \varphi_R\right)$$

$$i(t) = \sqrt{2}\,I\cos\left(\omega t + \varphi_i\right)$$

(a) Berechnen und skizzieren Sie Amplitude und Phase der Übertragungsfunktion

$$H_\mathsf{L}(\omega) = \frac{\underline{U}_\mathsf{L}}{\underline{U}_\mathsf{q}}$$

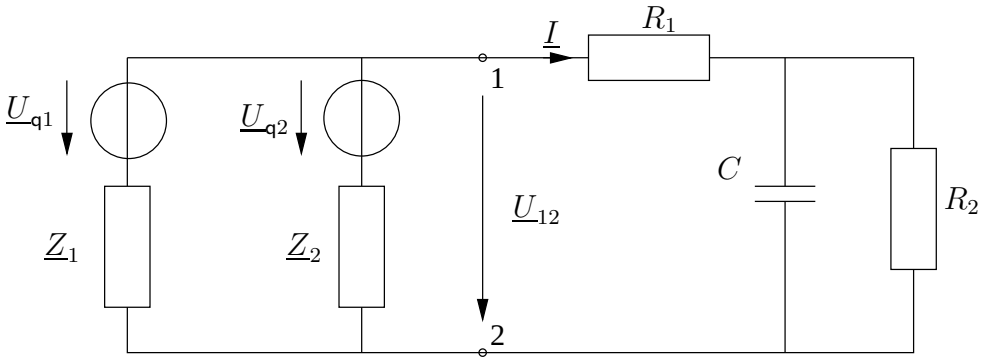
in Abhängigkeit von ω. Berechnen und skizzieren Sie auch entsprechend die Übertragungsfunktion $H_\mathsf{R}(\omega)$ für die Spannung am Widerstand.

(b) Es sei $\omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$. Geben Sie für diese Frequenz $\underline{U}_\mathsf{L}$, $u_\mathsf{L}(t)$, $\underline{U}_\mathsf{R}$, $u_\mathsf{R}(t)$ und $i(t)$ an.

(c) Berechnen Sie für diese Werte die Eingangsimpedanz $\underline{Z}_\mathsf{E}$ der Schaltung sowie die zeitabhängige Leistung $p(t)$, die an den Klemmen 1 und 2 aufgenommen wird. Wie lautet die komplexe Leistung $\underline{S}$? Wie groß ist die die Scheinleistung S, die Wirkleistung P und die Blindleistung Q, die von der Quelle abgegeben wird?

Aufgabe 1.2

Gegeben ist folgende Schaltung



mit den Quellspannungen

$$u_{\mathsf{q}1}(t) = 100\,\mathrm{V}\cos\left(\omega t + 45°\right) \text{ und } u_{\mathsf{q}2}(t) = 80\,\mathrm{V}\cos\left(\omega t + 30°\right)\,,$$

den Impedanzen

$$\underline{Z}_1 = 8\,\Omega + j6\,\Omega \text{ und } \underline{Z}_2 = 4\,\Omega + j3\,\Omega\,,$$

den Ohmschen Widerständen

$$R_1 = 5\,\Omega \text{ und } R_2 = 4\,\Omega\,,$$

der Kapazität

$$C = 0,53\,\mathrm{mF}$$

und der Frequenz

$$f = 100\,\mathrm{Hz}\,.$$

(a) Welche Spannung $\underline{U}_{12}$ liegt zwischen den Klemmen 1 und 2?

(b) Welcher Strom fließt über diese Klemmen?

(c) Welche komplexe Leistung $\underline{S}$ wird über diese Klemmen transportiert?

(d) Welche Leistungen werden von den Last-Bauteilen R_1, R_2 und C aufgenommen?

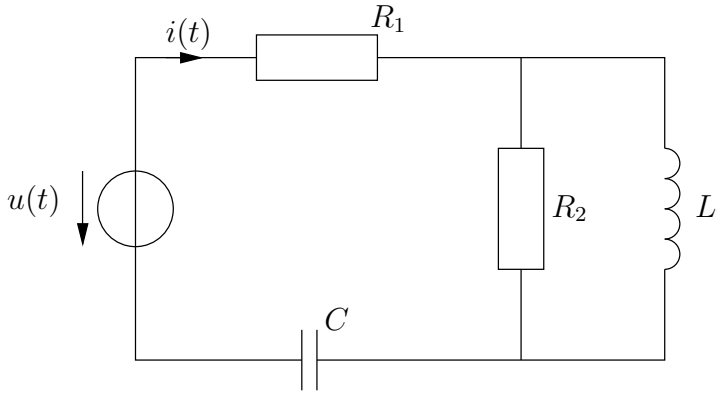
(e) Welche Leistungen müssen die beiden Spannungsquellen aufbringen?

(f) Ermitteln Sie die Ersatz-Strom- und -Spannungsquelle bezüglich der Klemmen.

(g) Welche Wirkleistung kann maximal über die Klemmen abgegeben werden?

Aufgabe 1.3

Gegeben ist folgende Schaltung



mit

$$u(t) = 100\,\mathrm{V}\cos\left(\omega t - 30^\circ\right) \text{ und } \omega = 2000\,\mathrm{s}^{-1}$$

sowie

$$R_1 = 1,25\,\Omega\,,\ R_2 = 20\,\Omega\,,\ L = 4\,\mathrm{mH}\,.$$

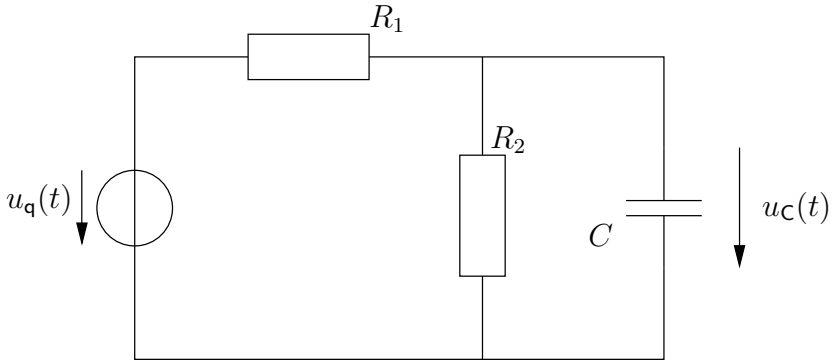
Die Kapazität C ist zunächst unbekannt.

(a) Berechnen Sie die Kapazität C so, dass der Strom $i(t)$ der Spannung $u(t)$ um 51° nacheilt.

(b) Wie groß ist dann die von der Quelle abgegebene Schein-, Wirk- und Blindleistung?

Aufgabe 1.4

Gegeben ist die folgende Schaltung



mit

$$R_1 = 20\,\mathrm{k\Omega}\,,\ R_2 = 30\,\mathrm{k\Omega}\,,\ C = 83,33\,\mathrm{nF}$$

und

$$u_q(t) = 15\sqrt{2}\,\mathrm{V}\cos\omega t,\ \ \omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Wie lautet die Spannung $u_C(t)$?

2 Inversion von Ortskurven: Kreis und Gerade

Um die Abhängigkeit komplexer elektrischer Größen wie Impedanzen und Admittanzen von einem Parameter zu veranschaulichen, werden in der Elektrotechnik oft komplexe Ortskurven verwendet. Als komplexe Ortskurven bezeichnet man Kurven in der komplexen Ebene, die von einem Parameter abhängen. Dieser Parameter kann z.B. ein Widerstand oder eine Induktivität oder eine Kapazität oder auch die Frequenz sein.

Häufig geht es darum, Ortskurven zu invertieren, um z.B. eine Impedanz in eine Admittanz umzurechnen oder umgekehrt. Was passiert dabei geometrisch? Sehr oft handelt es sich bei den Ortskurven um Geraden. Wir werden im Folgenden sehen, dass die inversen Ortskurven zu Geraden Kreise sind, die durch den Ursprung gehen.

2.1 Die Inversion einer vertikalen Geraden

Wir fangen mit dem einfachen Beispiel einer vertikalen Geraden an und betrachten die Ortskurve

$$z(\varphi) = 1 + j \tan \varphi \,. \tag{2.1}$$

Dies ist eine vertikale Gerade im Abstand eins vom Ursprung. Sie ist in Abbildung 2.1 rot eingezeichnet. Der Parameter φ ist der Phasenwinkel des jeweiligen Punktes der Geraden. Der allgemeine Zeiger $z(\varphi)$ mit dem Winkel φ und dem Betrag $|z|$ ist ebenfalls rot eingezeichnet. Betrachtet man das rechtwinklige Dreieck mit diesem Zeiger als Hypotenuse, so ergibt sich

$$\cos \varphi = \frac{1}{|z|} \,.$$

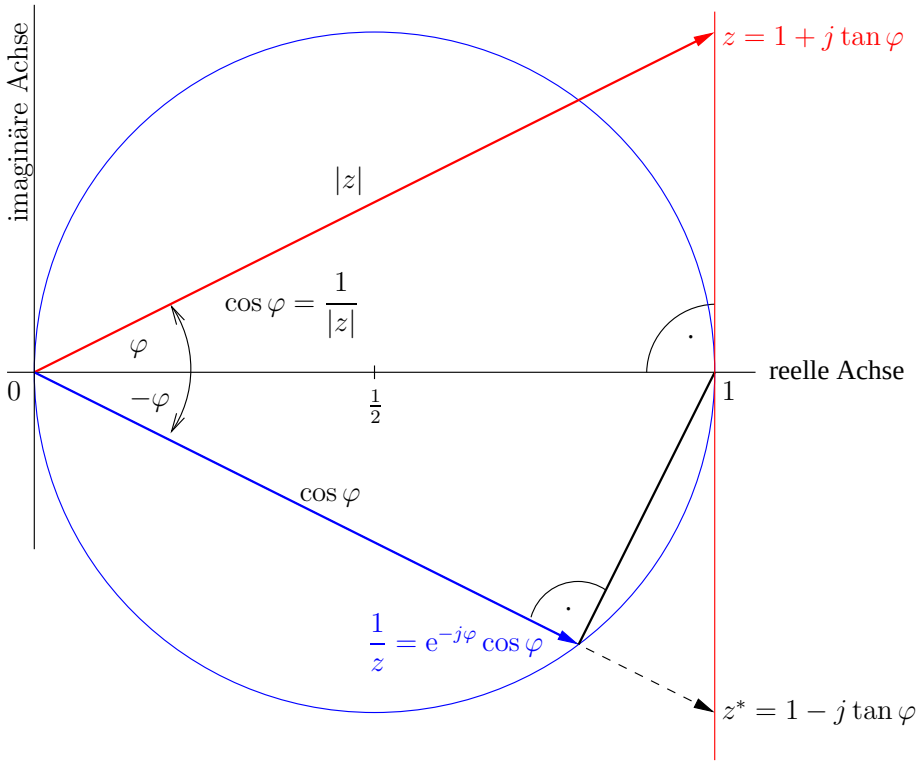


Abbildung 2.1: Ortskurven. Die Inversion des blauen Kreises ergibt die rote Gerade (und umgekehrt).

Deshalb hat $z^{-1}(\varphi)$ den Betrag $\cos\varphi$. Der Phasenwinkel von $z^{-1}(\varphi)$ ist $-\varphi$. Damit gilt:

$$z^{-1}(\varphi) = \mathrm{e}^{-j\varphi}\cos\varphi \tag{2.2}$$

Um diese inverse Ortskurve geometrisch zu interpretieren, betrachtet man den blauen Thaleskreis, dessen Durchmesser auf der reellen Achse zwischen 0 und 1 liegt. Der blaue Pfeil zu $z^{-1}(\varphi)$ mit Spitze auf dem Thaleskreis ist die Ankathete eines rechtwinkligen Dreiecks. Der Pfeil beschreibt eine Gerade mit dem Steigungswinkel $-\varphi$. Die Länge des blauen Pfeils ist $\cos\varphi$. Deshalb ist der Thaleskreis gerade die Ortskurve von $z^{-1}(\varphi)$. Es gilt also der folgende

Satz: Es sei

$$z(\varphi) = 1 + j\tan\varphi$$

die Ortskurve einer vertikalen Geraden im Abstand eins vom Ursprung. Dann ist die inverse Ortskurve der Kreis

$$z^{-1}(\varphi) = \mathrm{e}^{-j\varphi}\cos\varphi\,,$$

dessen Durchmesser auf der positiven reellen Achse liegt und den Wert eins besitzt.

Folgerung: Die vertikale Gerade

$$z(\varphi) = a\,(1 + j\tan\varphi) \tag{2.3}$$

im Abstand $a > 0$ vom Ursprung besitzt als inverse Ortskurve den Kreis

$$z^{-1}(\varphi) = a^{-1}\mathrm{e}^{-j\varphi}\cos\varphi \tag{2.4}$$

vom Durchmesser a^{-1}.

2.2 Anwendung: Ortskurve für den RC-Tiefpass

Um zu zeigen, dass Ortskurven zur Veranschaulichung komplexer Größen nützlich sind, betrachten wir die Schaltung für einen RC-Tiefpass, wie sie in Abbildung 2.2 dargestellt

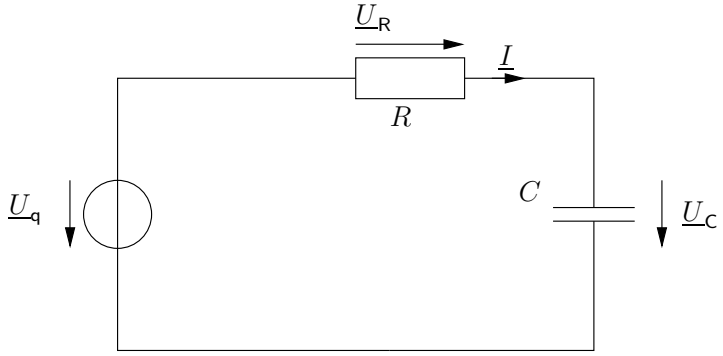


Abbildung 2.2: RC-Tiefpass.

ist. Diese Schaltung wurde in Abschnitt 1.4 bereits diskutiert und berechnet. Es gilt für die Spannung am Kondensator

$$\underline{U}_\mathsf{C} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}\underline{U}_\mathsf{q} \text{ mit } \tau = RC\,.$$

Die Abhängigkeit der Übertragungsfunktion

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

von der Kreisfrequenz ω als Parameter lässt sich nun durch eine Ortskurve veranschaulichen. Abbildung 2.3 zeigt den Nenner $1 + j\omega\tau$ als blau gestrichelte Halbgerade nach

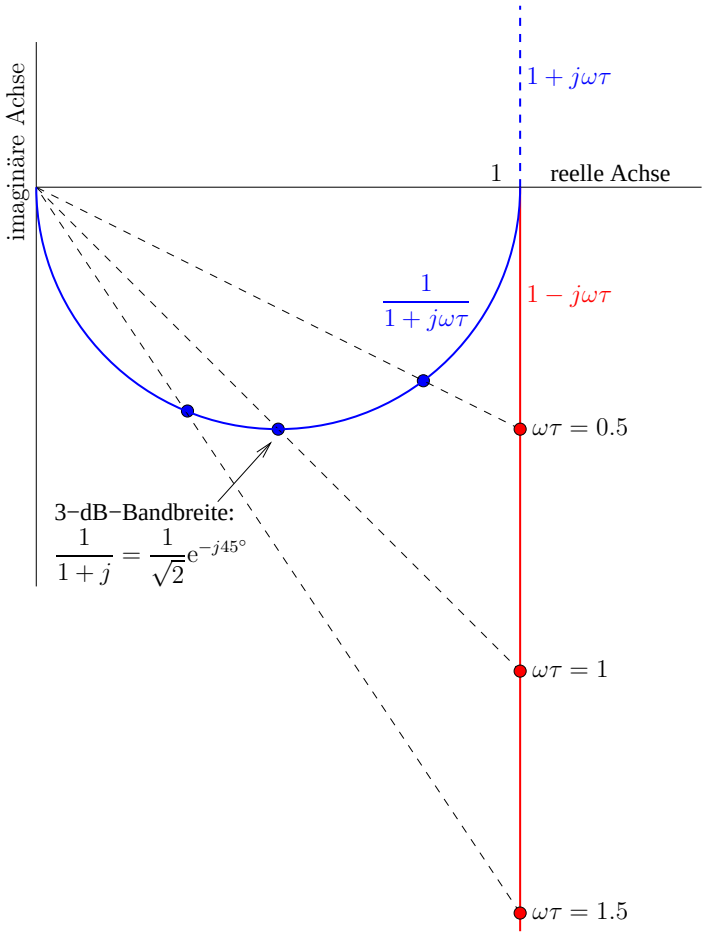


Abbildung 2.3: Ortskurven für den RC-Tiefpass.

oben. Da bei der Inversion der Winkel gespiegelt wird, zeichnet man dazu die gespiegelte Halbgerade $1 - j\omega\tau$, die in der Abbildung rot dargestellt ist. Alle Zeiger der Übertragungsfunktion liegen dann auf dem blau gezeichneten Halbkreis. Für einen gegebenen Wert von ω liegt der Zeiger der Übertragungsfunktion auf dem Schnittpunkt mit der Verbindungslinie vom Ursprung zu dem entsprechenden Punkt auf der roten Halbgeraden. In der Abbildung ist dies für $\omega\tau = 0,5$, $\omega\tau = 1$ und $\omega\tau = 1,5$ eingezeichnet.

Wichtig ist der Wert $\omega\tau = 1$, der der 3dB-Bandbreite entspricht. Hier kann man aus der Zeichnung sofort ablesen, dass $|H(\omega)|$ den Betrag $1/\sqrt{2}$ und den Phasenwinkel $-45°$ besitzt. Diese Werte erkennt man auch in Abbildung 1.7, aber die geometrische Vorstellung mit der Ortskurve veranschaulicht besser, warum diese Werte für Amplitude und Phase zusammen gehören.

2.3 Inversion einer horizontalen Geraden

Die Inversion einer horizontalen Geraden lässt sich aus dem oben gesagten mathematisch ableiten, indem man die Gerade um 90° dreht (Multiplikation mit j) und den Kreis um $-90°$ (Multiplikation mit $-j$). Um die Anschauung zu üben, soll die Konstruktion hier aber noch einmal in Abbildung 2.4 geometrisch durchgeführt werden. Der Parameter φ

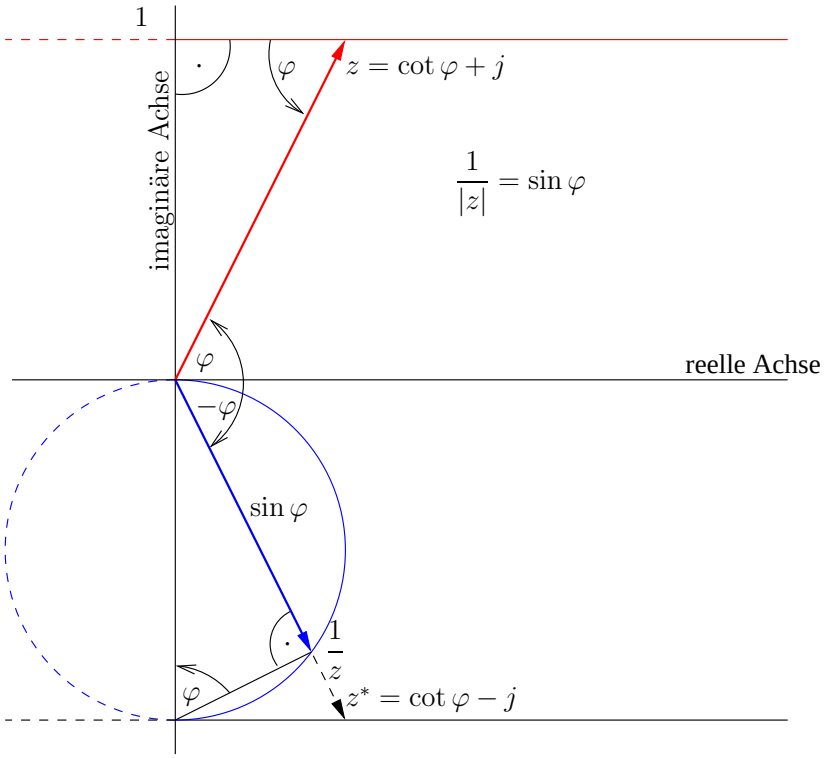


Abbildung 2.4: Ortskurven. Die Inversion des blauen Kreises ergibt die rote Gerade (und umgekehrt).

bezeichnet wieder den Phasenwinkel. Der rote Zeiger auf der roten Geraden ist gegeben

durch

$$z\left(\varphi\right) = \cot\varphi + j$$

Aus dem Dreieck mit roter Hypotenuse der Länge $|z|$ erkennt man

$$\sin\varphi = \frac{1}{|z|}\,.$$

Weil $z^{-1}\left(\varphi\right)$ den Phasenwinkel $-\varphi$ besitzt, folgt

$$z^{-1}\left(\varphi\right) = \mathrm{e}^{-j\varphi}\sin\varphi$$

Die Gerade mit dem Winkel $-\varphi$ schneidet den blauen Thaleskreis. Die Länge der Sekante (blauer Pfeil) ist $\sin\varphi$. Also ist die Ortskurve von $z^{-1}\left(\varphi\right)$ der blaue Thaleskreis.

2.4 Inversion einer allgemeinen Geraden

Die Inversion einer beliebigen Geraden, die nicht durch den Ursprung geht, ergibt immer einen Kreis, der durch den Ursprung geht. Der Durchmesser dieses Kreises ist gleich dem *inversen Abstand* der Geraden vom Ursprung. Wenn die Gerade gegenüber der roten Geraden in Abbildung 2.1 um einen Winkel ψ verdreht ist, so ist es der Kreis um einen Winkel $-\psi$. Mit diesen Informationen kann man Kreis und Gerade einzeichnen. Zu einem gegebenen Punkt $z(\varphi)$ mit Winkel φ der Geraden findet man dann den inversen Punkt, in dem man die Ursprungsgerade mit dem Winkel $-\varphi$ zeichnet. Der Punkt $z^{-1}(\varphi)$ ergibt sich dann als Schnittpunkt mit dem Kreis.

Aufgaben zu Kapitel 2

Zu Kapitel 2 gibt es keine Aufgaben.

3 Resonanzen

3.1 Allgemeine Bemerkungen zu Resonanzen

Resonanzen treten in der Physik bei sehr vielen Phänomenen auf. Die einfachsten Resonatoren sind angeregte, gedämpfte mechanische Schwingungen (wie z.B. bei dem aus der Vorlesung *Physik 2* [4] bekannten Pohlschen Drehpendel) und elektrische Schwingkreise. Von letzteren handelt dieses Kapitel. Mathematisch sind beide Arten von Schwingungen äquivalent, und man kann die elektrischen und mechanischen Größen sehr schön tabellarisch gegenüberstellen, wie dies z.B. in den Studienbüchern *Physik 2* [4] und *Ingenieurmathematik 2* [7] dargestellt ist.

Elektrische Schwingkreise spielen in der Elektrotechnik eine wichtige Rolle. Ein Beispiel sind Bandpassfilter. Ein klassischer Radio-Empfänger filtert mit einem verstimmbaren Schwingkreis die gewünschte Empfangsfrequenz aus dem Übertragungsband heraus.

Um eine gedämpfte Schwingung mit allgemeiner Anregung zu berechnen, muss man eine Differentialgleichung lösen [4, 7]. Für den eingeschwungenen Zustand bei Anregung mit einer Wechselspannung kann man dies mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung vermeiden. Dieser Formalismus beinhaltet gewissermaßen die allgemeine Lösung der Differentialgleichung für den speziellen Fall des eingeschwungenen Zustands. In diesem Kapitel betrachten wir nur den eingeschwungenen Zustand. Schaltvorgänge bei Schwingkreisen werden wir in Kapitel 5 behandeln.

3.2 Wichtige Begriffe und der LCR-Reihenschwingkreis

Der Prototyp einer Resonanzschaltung ist der in Abbildung 3.1 dargestellte Reihenschwingkreis aus Induktivität L, Kapazität C und Widerstand R. Seine Eingangsimpedanz in kartesischer Darstellung

$$\underline{Z} = R + jX$$

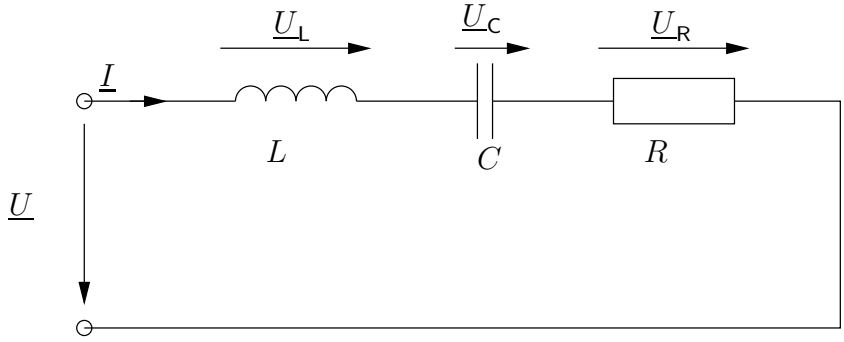


Abbildung 3.1: Der LCR-Reihenschwingkreis.

lautet:

$$\boxed{\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} \tag{3.1}$$

In Exponentialdarstellung

$$\underline{Z} = Z\mathrm{e}^{j\varphi}$$

kann man dafür schreiben:

$$\boxed{Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)} \tag{3.2}$$

In Abbildung 3.2 ist der komplexe Zeiger dargestellt. Für $X > 0$ ist der Blindwiderstand

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} \tag{3.3}$$

induktiv, für $X < 0$ ist er kapazitiv. Für $X = 0$ heben sich induktiver und kapazitiver Anteil auf. Dies bezeichnet man als **Resonanzfall**.

Allgemeine Definition von Resonanz (für einen beliebigen passiven Zweipol): *Im Resonanzfall sind Strom und Spannung in Phase.* Der Blindwiderstand verschwindet. Die Eingangsimpedanz bei Resonanz ist also ein reeller, Ohmscher Widerstand R. In Formeln geschrieben heißt das:

$$\boxed{X = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{U} = R\,\underline{I} \quad (R \geq 0)\,.} \tag{3.4}$$

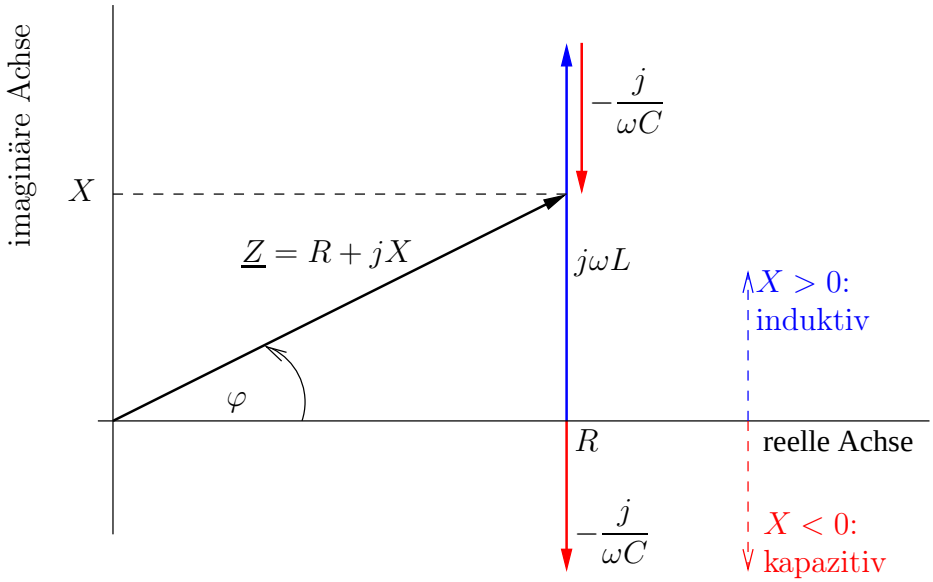


Abbildung 3.2: Impedanzzeiger für den LCR-Reihenschwingkreis.

Die Frequenz, bei der Resonanz auftritt, nennt man die Resonanzfrequenz f_0. Die zugehörige Kreisfrequenz bezeichnet man mit ω_0.

Die Gleichung (3.4) ist die *allgemeine Definition* von Resonanz (nicht nur für die hier betrachtete Schaltung!). Im allgemeinen Fall ist $R \geq 0$ eine reelle Zahl von der Dimension [Ω], die nicht notwendig einem bestimmten in der Schaltung vorhandenen Ohmschen Widerstand entsprechen muss.

Merke: Von den Klemmen aus betrachtet verhält sich im *allgemeinen* Resonanzfall der Eingangswiderstand der Schaltung (des Zweipols) wie ein Ohmscher Widerstand. Bei dem in Abbildung 3.1 betrachteten Reihenschwingkreis ist dies gerade R.

Für den speziellen Fall der Schaltung in Abbildung 3.1 kompensieren sich bei der Resonanzfrequenz die Spannungen an Spule und Kondensator, d.h. es gilt:

$$\underline{U}_\mathsf{L} = -\underline{U}_\mathsf{C} \text{ bei } \omega = \omega_0$$

Die Thomsonsche Schwingungsgleichung: Die Resonanz(kreis)frequenz $\omega = \omega_0$ für den Reihenschwingkreis in Abbildung 3.1 erhält man, in dem man in Gleichung (3.3) den Blindwiderstand $X = 0$ setzt:

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0$$

Für die Resonanz-Kreisfrequenz ω_0 und die Resonanzfrequenz f_0 ergibt sich daraus die **Thomsonsche**[1] **Schwingungsgleichung**:

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}} \quad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}} \tag{3.5}$$

Bandpasscharakteristik des Reihenschwingkreises: Bei dem Reihenschwingkreis in Abbildung 3.1 hat der Strom

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$$

im Resonanzfall den maximalen Betrag, weil dann die Eingangsimpedanz $\underline{Z}$ den kleinsten Betrag $Z = R$ besitzt[2]. Im Resonanzfall liegt die gesamte Quellspannung am Ohmschen Widerstand R. Außerhalb der Resonanzfrequenz verringert sich der Betrag des Stromes $\underline{I}$ und damit der Betrag der Spannung

$$\underline{U}_\mathsf{R} = R\underline{I}$$

am Widerstand. Die Übertragungsfunktion

$$H_\mathsf{R}(\omega) = \frac{\underline{U}_\mathsf{R}}{\underline{U}} = \frac{R}{\underline{Z}} \tag{3.6}$$

für die Spannung am Widerstand R zeigt das charakteristische Verhalten eines **Bandpassfilters**. Es gilt $H_R(\omega_0) = 1$. Am Betrag der Übertragungsfunktion

$$|H_\mathsf{R}(\omega)| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{3.7}$$

erkennt man, dass die Dämpfung um so stärker ist, je weiter die Frequenz von der Resonanzfrequenz entfernt liegt.

[1] Nach dem britischen Physiker William Thomson (1824-1907), der auch unter dem Namen Lord Kelvin bekannt ist.

[2] Bei allgemeinen Schaltungen es nicht notwendig so, dass der Strom bei Resonanz maximal wird.

Kennwiderstand und Güte: Im Resonanzfall haben Induktivität und Kapazität *vom Betrage her* den selben Blindwiderstand. Dieser wird als **Kennwiderstand** Z_K des Schwingkreises bezeichnet. Es gilt:

$$\boxed{Z_\mathsf{K} = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}} \tag{3.8}$$

Ausgedrückt durch den Kennwiderstand lautet die Impedanz:

$$\underline{Z} = R + jZ_\mathsf{K}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)$$

$$\underline{Z} = R\left(1 + j\frac{Z_\mathsf{K}}{R}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \tag{3.9}$$

Der dimensionslose Faktor

$$\boxed{Q_0 := \frac{Z_\mathsf{K}}{R}} \tag{3.10}$$

wird als **Güte** der Resonanz bzw. des Schwingkreises bezeichnet. Sie lässt sich mit Gleichung (3.8) auch folgendermaßen ausdrücken:

$$Q_0 = \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \tag{3.11}$$

In Abbildung 3.3 ist der Betrag Z (oben) und die Phase φ (unten) der Impedanz

$$\underline{Z} = R\left(1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) \tag{3.12}$$

in Abhängigkeit von ω für verschiedene Güten aufgetragen. Der Betrag ist auf den Ohmschen Widerstand R normiert. Er besitzt am Resonanzpunkt ein Minimum mit $Z/R = 1$. Die Resonanz ist um so *schärfer* ausgeprägt, je größer die Güte des Schwingkreises ist. In Abbildung 3.4 ist das Betragsquadrat

$$|H_\mathsf{R}(\omega)|^2 = \frac{R^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{1}{1 + Q_0^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \tag{3.13}$$

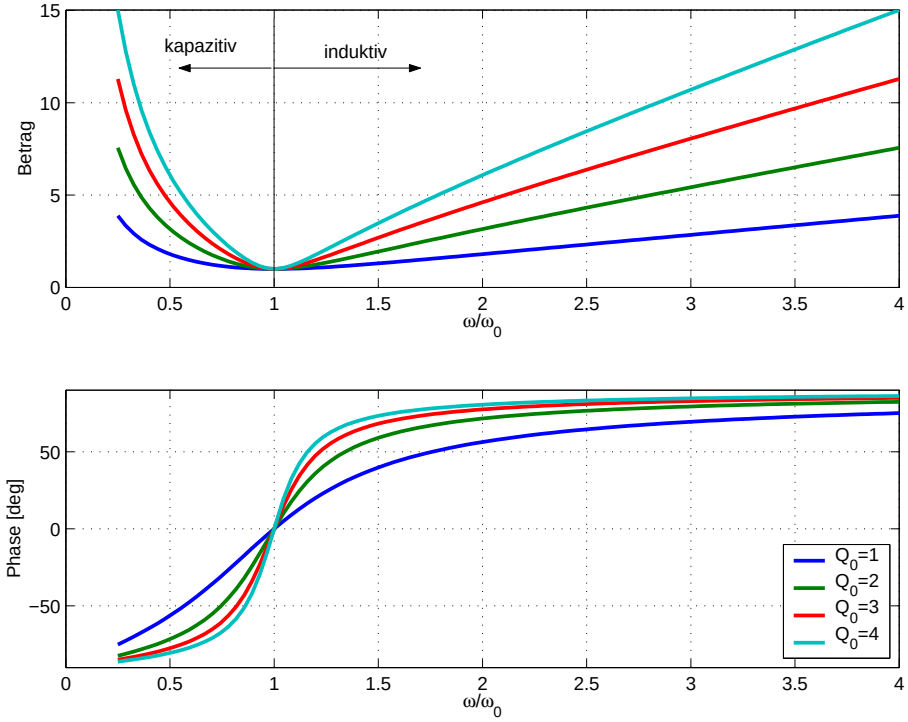


Abbildung 3.3: Resonanzkurven für die normierte Impedanz $\underline{Z}/R$ des Reihenschwingkreises als Funktion der Kreisfrequenz. Oben: Der Betrag Z/R der normierten Impedanz. Unten: Die Phase φ.

der Übertragungsfunktion

$$H_{\mathrm{R}}(\omega) = \frac{\underline{U}_R}{\underline{U}} = \frac{R}{\underline{Z}} \tag{3.14}$$

für die Spannung am Widerstand R für verschiedene Güten aufgetragen. Man erkennt hier sehr gut das *Bandpassverhalten* des Schwingkreises, das mit höherer Güte immer schärfer ausgeprägt ist.

Um die Eingangsimpedanz des Schwingkreises

$$\underline{Z} = R\left(1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

einfacher ausdrücken zu können, wird als neue Variable die **Verstimmung** eingeführt.

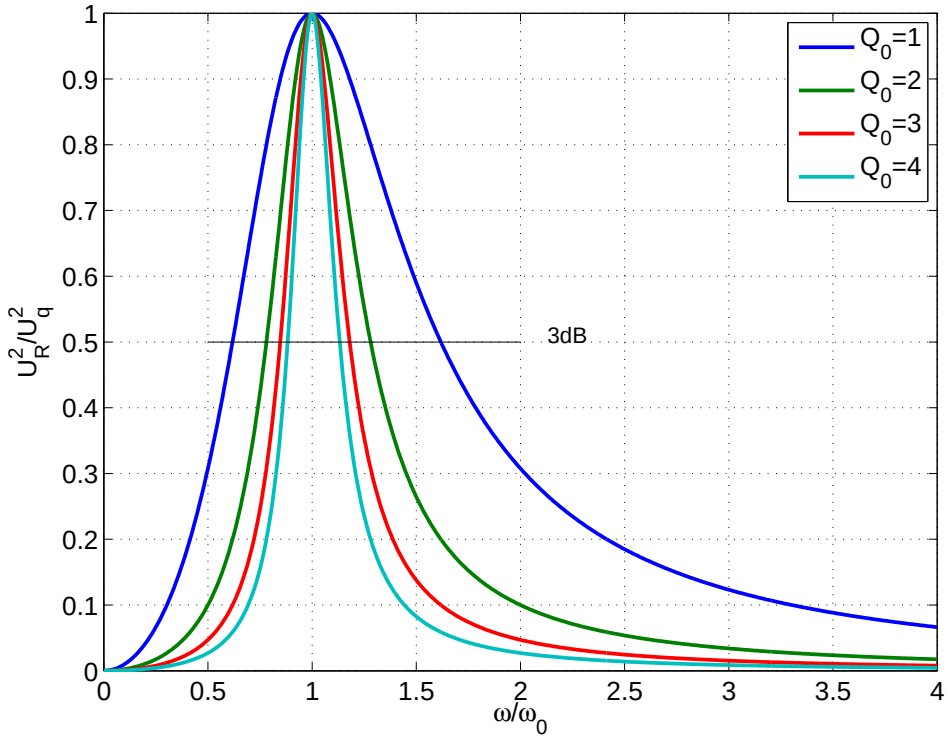


Abbildung 3.4: Betragsquadrat der Übertragungsfunktion $H_R(\omega)$ für den Reihenschwingkreis: Resonanzkurven der quadratischen Spannung am Widerstand als Funktion der Kreisfrequenz ω.

Sie ist definiert durch folgenden Ausdruck:

$$\boxed{v := \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}} \tag{3.15}$$

Dann lässt sich die normierte Impedanz schreiben als:

$$\boxed{\frac{\underline{Z}}{R} = 1 + jQ_0 v} \tag{3.16}$$

Die Verstimmung lässt sich folgendermaßen interpretieren: Für Frequenzen in der Nähe der Resonanzfrequenz, d.h. für $|f - f_0|/f_0 \ll 1$, gilt:

$$v = \frac{f^2 - f_0^2}{f f_0} = \frac{(f - f_0)(f + f_0)}{f f_0} \approx \frac{(f - f_0)\, 2 f_0}{f_0^2}$$

$$\boxed{v \approx \frac{2\,(f - f_0)}{f_0} = \frac{2\,(\omega - \omega_0)}{\omega_0}} \tag{3.17}$$

Die halbe Verstimmung ist also näherungsweise gleich der *normierten relativen Abweichung von der Resonanzfrequenz.*

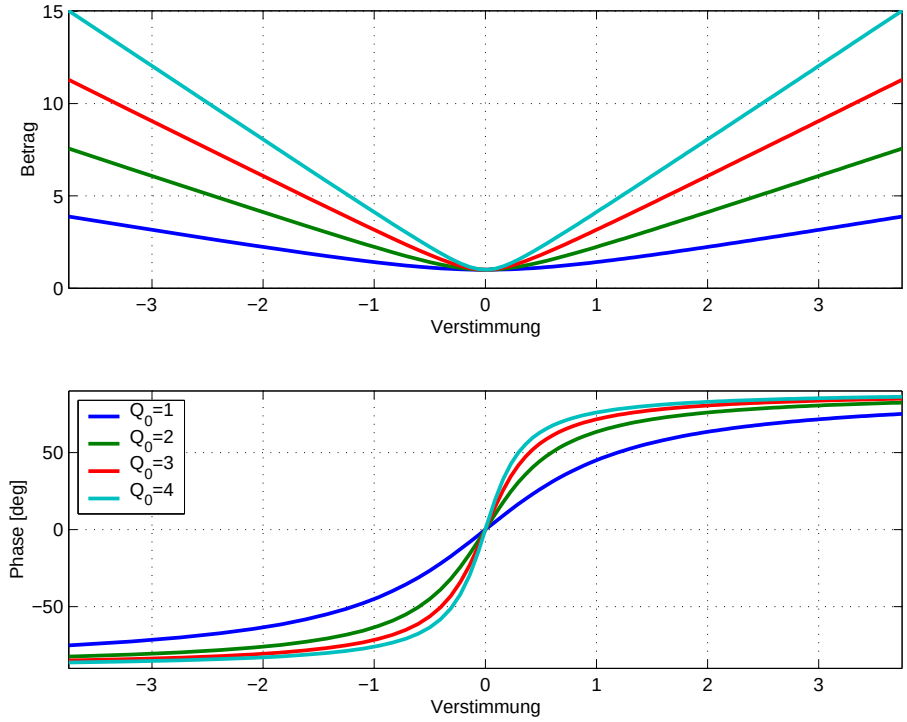


Abbildung 3.5: Resonanzkurven für die normierte Impedanz (oben Betrag und unten Phase) des Reihenschwingkreises als Funktion der Verstimmung v.

Trägt man die Resonanzkurven für die Impedanz aus Abbildung 3.3 als Funktion der Verstimmung auf, so ergeben sich die symmetrischen Kurven von Abbildung 3.5: Der Betrag der Impedanz ist eine gerade Funktion der Verstimmung und die Phase eine ungerade.

Die Ortskurven für Impedanz und Admittanz: Mit Hilfe der Ortskurven lassen sich die in Abbildung 3.5 dargestellten Sachverhalte noch besser darstellen. Hierbei wird der Zusammenhang zwischen Betrag und Phase besonders deutlich.

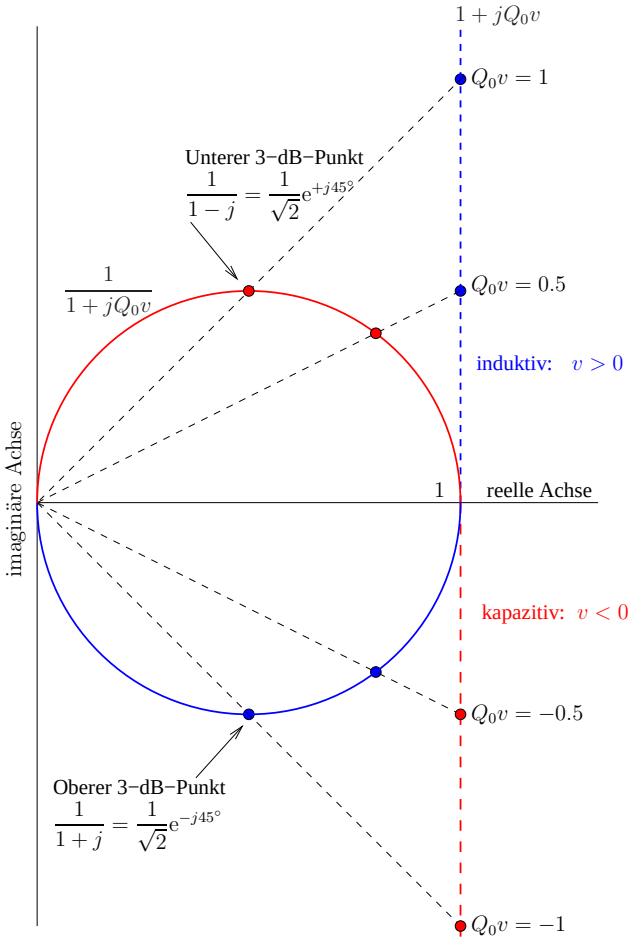


Abbildung 3.6: Ortskurven für den Reihenschwingkreis.

Die Ortskurve für die normierte Impedanz ist eine Gerade:

$$\frac{\underline{Z}}{R} = 1 + jQ_0v \tag{3.18}$$

Die Ortskurve für die normierte Admittanz ist ein Kreis:

$$\frac{R}{\underline{Z}} = \frac{1}{1 + jQ_0v} \tag{3.19}$$

Die normierte Admittanz ist gerade die Übertragungsfunktion $H_R(\omega)$ für die Spannung am Widerstand R, vgl. Gleichung (3.6). Die Ortskurven für $\underline{Z}/R$ und R/$\underline{Z}$ sind in Abbildung 3.6 gezeichnet. Besonders interessant sind die beiden Punkte $Q_0v_{1,2} = \pm 1$. Hier ist der Betrag der Übertragungsfunktion um den Faktor $\sqrt{2}$ gedämpft, und die Pha-

senwinkel der Übertragungsfunktion betragen $\mp 45°$. Man bezeichnet dies als die beiden **3-dB-Punkte**, weil das *Betragsquadrat der Spannung* bei diesen beiden Frequenzen gerade um den Faktor 2 (also um 3 dB) gedämpft wird[3]:

$$\left|\frac{\underline{U}_\mathsf{R}}{\underline{U}_\mathsf{q}}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Diese beiden Punkte beschreiben die Bandpass-Charakteristik der Übertragungsfunktion: Im Frequenzbereich zwischen den beiden Punkten wird das Signal durch das Filter nur schwach (d.h. weniger als 3 dB) gedämpft.

Die 3-dB-Bandbreite: Die Frequenz-Differenz des oberen und des unteren 3-dB-Punktes

$$B = f_1 - f_2 \tag{3.20}$$

bezeichnet man als **3-dB-Bandbreite**. Hierbei ist f_1 die höhere Frequenz, die zu der Verstimmung v_1 gehört und f_2 die niedrigere, die zu v_2 gehört. Wie im Folgenden gezeigt wird, gilt der Zusammenhang:

$$\boxed{B = \frac{f_0}{Q_0}} \tag{3.21}$$

In Worten: Die auf f_0 normierte 3-dB-Bandbreite ist die Kehrwert der Güte. Je höher die Güte, desto kleiner ist die Bandbreite, und umso schärfer wird die Resonanzfrequenz heraus gefiltert.

Anschauliche (näherungsweise) Herleitung der 3-dB-Bandbreite: Wir verwenden den Index 1 für den oberen 3-dB-Punkt und den Index 2 für den unteren. Eine einfache und anschauliche, aber nur näherungsweise richtige Herleitung für die 3-dB-Bandbreite erhält man mit Gleichung (3.17). Danach sind

$$\frac{1}{2}v_1 \approx \frac{f_1 - f_0}{f_0} \text{ und } \frac{1}{2}v_2 \approx \frac{f_2 - f_0}{f_0}$$

näherungsweise die relativen Abweichungen der 3-dB-Punkte von der Resonanzfrequenz f_0. Auf der Abszisse in Abbildung 3.7 ist die normierte Frequenz f/f_0 aufgetragen,

[3] Dezibel bezieht sich immer auf die Leistung, und die Leistung hängt quadratisch von der Spannung ab. Man stelle sich hier die Leistung an einem hochohmigen Lastwiderstand R_Last vor, der in der Schaltung in Abbildung 3.1 parallel zu R geschaltet ist.

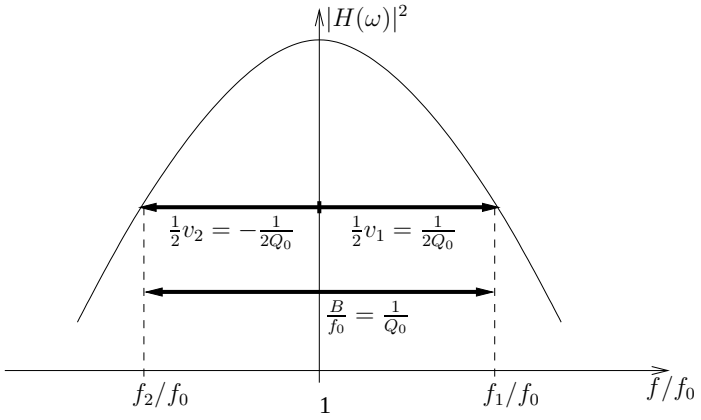


Abbildung 3.7: Schematische Zeichnung zur näherungsweisen Herleitung der 3-dB-Bandbreite: Die Größe $|H(\omega)|^2$ in Abhängigkeit von der normierten Frequenz $f/f_0 = \omega/\omega_0$.

und die Größen $v_1/2$ und $v_2/2$ sind als Pfeile nach rechts und links eingetragen. Deren Differenz ist dann näherungsweise gegeben durch

$$\frac{1}{2}\,(v_1 - v_2) \approx \frac{f_1 - f_2}{f_0} = \frac{B}{f_0}\,.$$

Wegen $Q_0 v_{12} = \pm 1$ für die beiden 3-dB-Punkte gilt

$$v_1 = \frac{1}{Q_0} \text{ und } v_2 = -\frac{1}{Q_0}$$

und damit

$$\frac{1}{2}\,(v_1 - v_2) = \frac{1}{Q_0}\,.$$

Vergleicht man beide Ausdrücke für $\frac{1}{2}\,(v_1 - v_2)$, so ergibt sich:

$$\frac{B}{f_0} \approx \frac{1}{Q_0}$$

Mit dieser anschaulichen Herleitung erhält man eine Formel als *Näherung*, die eigentlich *exakt* richtig ist. Die Näherung besteht in der Annahme, dass die Resonanzfrequenz genau die Mittenfrequenz zwischen den beiden 3-dB-Punkten liegt. Wie man weiter oben in Abbildung 3.4 erkennt, stimmt dies aber eben nur näherungsweise und im Fall hoher Güte. Eigentlich ist aber der linke Pfeil in Abbildung 3.7 etwas kürzer als $\frac{1}{2Q_0}$ und der rechte etwas länger. Wie wir gleich zeigen werden, ist die *Summe* der Pfeillängen aber

exakt gleich $\frac{1}{Q_0}$.

Exakte Herleitung der 3-dB-Bandbreite: Wir verwenden wieder den Index 1 für den oberen 3-dB-Punkt und den Index 2 für den unteren. Mit den zugehörigen Verstimmungen $v_1$und v_2 gilt also

$$Q_0 v_{1,2} = \pm 1\,.$$

Die Verstimmungen schreiben wir als

$$v_{1,2} = \Omega_{1,2} - \frac{1}{\Omega_{1,2}}$$

mit den normierten Frequenzen

$$\Omega_{1,2} := \frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} = \frac{f_{1,2}}{f_0}\,.$$

Damit gilt:

$$Q_0 \left(\Omega_{1,2} - \frac{1}{\Omega_{1,2}} \right) = \pm 1$$

$$Q_0 \left(\Omega_{1,2}^2 - 1 \right) = \pm \Omega_{1,2}$$

Wir schreiben beide Gleichung untereinander

$$\begin{aligned} Q_0 \left(\Omega_1^2 - 1 \right) &= \Omega_1 \\ Q_0 \left(\Omega_2^2 - 1 \right) &= -\Omega_2 \end{aligned}$$

und subtrahieren:

$$Q_0 \left(\Omega_1^2 - \Omega_2^2 \right) = \Omega_1 + \Omega_2$$

$$Q_0 \left(\Omega_1 - \Omega_2 \right) \left(\Omega_1 + \Omega_2 \right) = \Omega_1 + \Omega_2$$

Wegen $\Omega_1 + \Omega_2 \neq 0$ kann man durch diesen Term teilen und erhält:

$$Q_0 \left(\Omega_1 - \Omega_2 \right) = 1$$

$$\Omega_1 - \Omega_2 = \frac{1}{Q_0}$$

Auf der linken Seite steht der Ausdruck

$$\frac{f_1 - f_2}{f_0} = \frac{B}{f_0}\,.$$

Deshalb gilt *exakt* die Formel

$$\boxed{\frac{B}{f_0} = \frac{1}{Q_0}},$$

die wir in Gleichung (3.21) aufgestellt haben.

Resonanzkurven an den Bauteilen des Reihenschwingkreises

Im Folgenden betrachten wir den Fall, dass der Reihenschwingkreis in Abbildung 3.1 durch eine gegebene ideale Spannungsquelle gespeist wird, d.h.

$$\underline{U} = \underline{U}_{\mathsf{q}}\,.$$

Wir interessieren uns für die jeweiligen Spannungen an R, C und L in Abhängigkeit von dieser angelegten Spannung.

Bandpassverhalten. Spannung am Widerstand R: Diese Größe wurde bereits diskutiert. Wir fassen zusammen: Für die Spannung

$$\underline{U}_{\mathsf{R}} = R\underline{I} = \frac{R}{\underline{Z}}\underline{U}_{\mathsf{q}}$$

am Ohmschen Widerstand R ergibt sich aus Gleichung (3.16):

$$\underline{U}_{\mathsf{R}} = \frac{1}{1 + jQ_0 v}\underline{U}_{\mathsf{q}} \tag{3.22}$$

In Abbildung 3.4 sind die Resonanzkurven für

$$|H_{\mathsf{R}}(\omega)|^2 = \frac{U_{\mathsf{R}}^2}{U_{\mathsf{q}}^2}$$

als Funktion der Kreisfrequenz ω aufgetragen. Bei der Resonanzfrequenz verschwindet der Blindwiderstand, und die volle Spannung liegt an R. Außerhalb des Resonanzpunktes erfolgt eine Dämpfung.

Resonanzüberhöhung. Spannung am Kondensator C: Für die Spannung am Kondensator

$$\underline{U}_\mathsf{C} = \frac{\underline{I}}{j\omega C} = \frac{\underline{U}_\mathsf{q}/\underline{Z}}{j\omega C}$$

ergibt sich aus Gleichung (3.16):

$$\underline{U}_\mathsf{C} = \frac{1}{j\omega RC}\,\frac{1}{1+jQ_0 v}\underline{U}_\mathsf{q}$$

Die entsprechenden Resonanzkurven für

$$|H_\mathsf{C}(\omega)|^2 = \frac{U_\mathsf{C}^2}{U_\mathsf{q}^2}$$

sind in Abbildung 3.8 dargestellt. Mit wachsender Güte kann die Spannung am Kon-

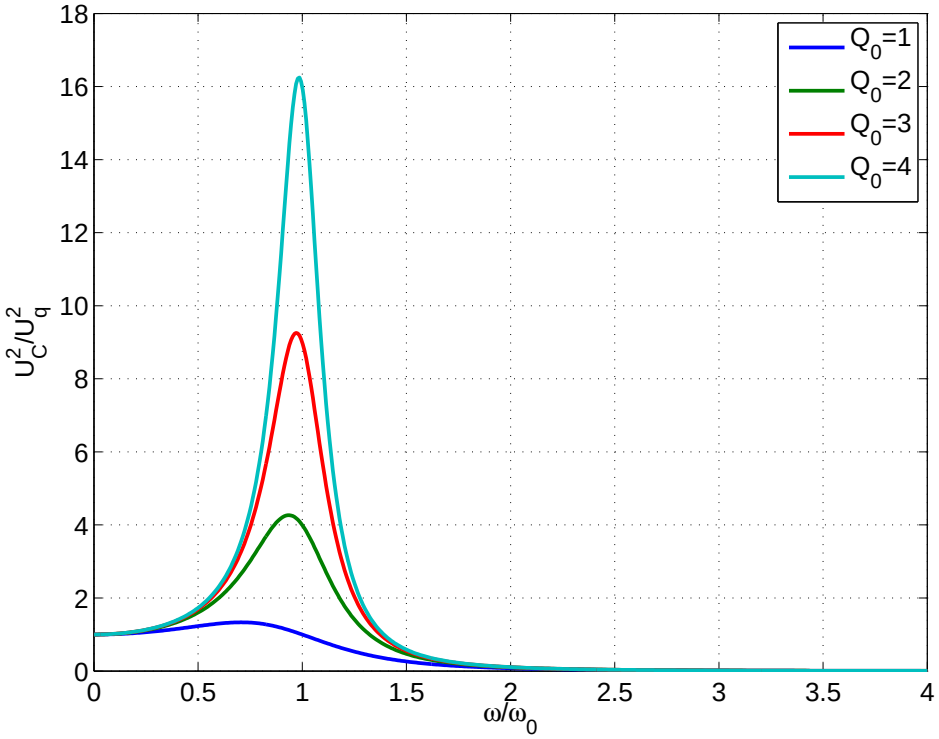


Abbildung 3.8: Resonanzüberhöhung. Resonanzkurven der quadratischen Spannung am Kondensator als Funktion der Kreisfrequenz ω.

densator sehr viel größer werden als die angelegte Spannung. Man spricht deshalb von

Resonanzüberhöhung. Das Spannungsmaximum liegt nicht mehr exakt bei der Resonanzfrequenz, sondern etwas niedriger. Für hohe Güte nähert es sich aber immer mehr dem Wert bei $\omega = \omega_0$. Die Kondensatorspannung bei $\omega = \omega_0$ kann man folgendermaßen ausrechnen: Mit Gleichung (3.11) folgt

$$\underline{U}_\mathsf{C} = \frac{\omega_0 Q_0}{j\omega} \frac{1}{1 + jQ_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \underline{U}_\mathsf{q}$$

$$\underline{U}_\mathsf{C} = \frac{Q_0}{Q_0 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) + j\frac{\omega}{\omega_0}} \underline{U}_\mathsf{q}$$

Bei $\omega = \omega_0$ gilt:

$$\boxed{U_\mathsf{C} = Q_0 U_\mathsf{q}}$$

Aus den Kurven und aus der obigen Formel erkennt man ein *Tiefpass-Verhalten*: Bei kleinen Frequenzen wird das Signal nahezu unverändert durchgelassen, und bei höheren Frequenzen wird es immer stärker gedämpft.

Resonanzüberhöhung. Spannung an der Spule L: Für die Spannung an der Induktivität

$$\underline{U}_\mathsf{L} = j\omega L \underline{I} = j\omega L \frac{\underline{U}_\mathsf{q}}{\underline{Z}}$$

ergibt sich aus Gleichung (3.16):

$$\underline{U}_\mathsf{L} = \frac{1}{R} \frac{j\omega L}{1 + jQ_0 v} \underline{U}_\mathsf{q}$$

Die entsprechenden Resonanzkurven für

$$|H_\mathsf{L}(\omega)|^2 = \frac{U_\mathsf{L}^2}{U_\mathsf{q}^2}$$

sind in Abbildung 3.9 dargestellt. Mit wachsender Güte kann die Spannung an der Spule sehr viel größer werden als die angelegte Spannung. Man spricht wieder von **Resonanzüberhöhung**. Das Spannungsmaximum liegt nicht mehr exakt bei der Resonanzfrequenz,

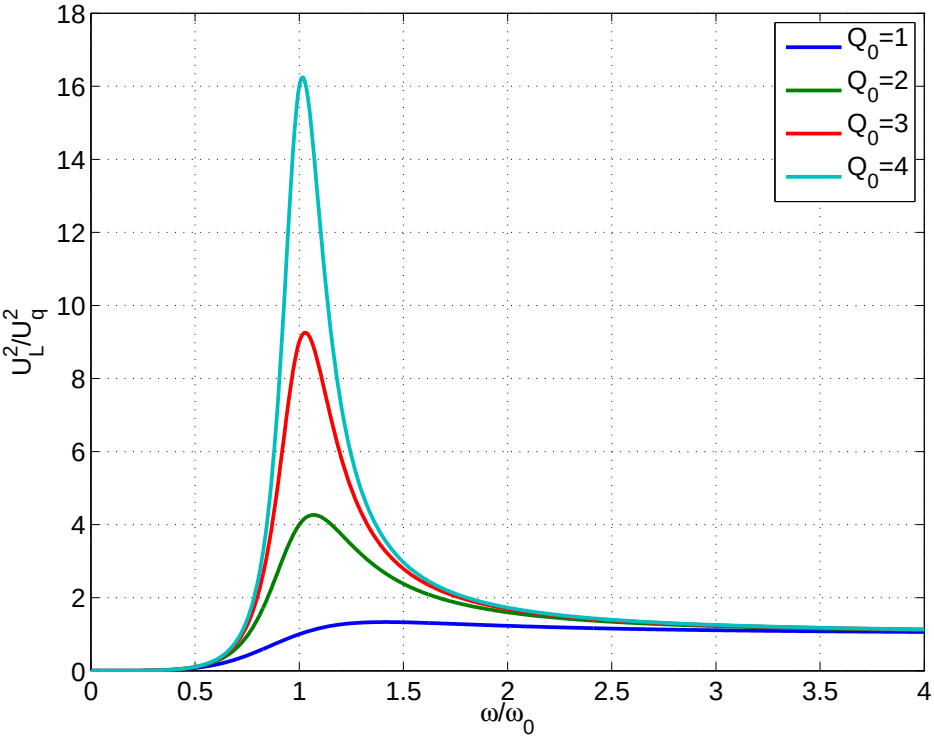


Abbildung 3.9: Resonanzüberhöhung. Resonanzkurven der quadratischen Spannung an der Spule als Funktion der Kreisfrequenz ω.

sondern etwas höher. Für hohe Güte nähert es sich aber immer mehr dem Wert bei $\omega = \omega_0$. Die Spannung bei $\omega = \omega_0$ kann man folgendermaßen ausrechnen: Mit Gleichung (3.11) folgt

$$\underline{U}_\mathrm{L} = \frac{j\omega Q_0}{\omega_0} \frac{1}{1 + jQ_0\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \underline{U}_\mathrm{q}$$

$$\underline{U}_\mathrm{L} = \frac{\left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 Q_0}{Q_0\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) + j\frac{\omega}{\omega_0}} \underline{U}_\mathrm{q} = \frac{-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 Q_0}{Q_0\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) + j\frac{\omega}{\omega_0}} \underline{U}_\mathrm{q}$$

Bei $\omega = \omega_0$ gilt:

$$\boxed{U_\mathrm{L} = Q_0 U_\mathrm{q}}$$

Aus den Kurven und aus der obigen Formel erkennt man ein *Hochpass-Verhalten*: Bei hohen Frequenzen wird das Signal nahezu unverändert durchgelassen, und bei kleineren Frequenzen wird es immer stärker gedämpft.

Der Bezug zur Schreibweise in der Physik und in der Nachrichtentechnik

In der Physik [4] (und auch in der Systemtheorie) werden die selben Formeln für die Resonanzkurven einer angeregten gedämpften Schwingung (elektrisch oder mechanisch) oft etwas anders geschrieben. Im Folgenden soll der Bezug zur hier verwendeten Schreibweise hergestellt werden. Dazu wird der Ausdruck für die Admittanz umgeformt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\underline{Z}} &= \frac{1}{R + j\omega L + \dfrac{1}{j\omega C}} \\ &= \frac{j\omega}{j\omega R - \omega^2 L + \dfrac{1}{C}} \\ &= \frac{j\omega}{L\left(j\omega R/L - \omega^2 + \omega_0^2\right)}\end{aligned}$$

Nun wird die **Dämpfungskonstante** δ der Schwingung definiert durch

$$\boxed{2\delta = \frac{R}{L}}. \tag{3.23}$$

Für die Admittanz erhält man dann den Ausdruck:

$$\boxed{\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R}\frac{j2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega}} \tag{3.24}$$

Für den Strom gilt:

$$\underline{I} = \frac{1}{R}\frac{j2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega}\underline{U}_{\mathsf{q}}$$

Für die Spannung $\underline{U}_{\mathsf{R}} = R\underline{I} = R\underline{U}_{\mathsf{q}}/\underline{Z}$ am Widerstand gilt dann:

$$\boxed{\underline{U}_{\mathsf{R}} = \frac{j2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega}\underline{U}_{\mathsf{q}}} \tag{3.25}$$

Die Übertragungsfunktion für die Spannung am Widerstand lautet also:

$$\boxed{H_{\mathsf{R}}(\omega) = \frac{j2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega}} \tag{3.26}$$

Um die Kondensatorspannung auszudrücken, schreiben wir

$$\begin{aligned} \underline{U}_{\mathsf{C}} &= \frac{1}{j\omega C}\frac{1}{R}\frac{j2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega}\underline{U}_{\mathsf{q}} \\ &= \frac{1}{LC}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega}\underline{U}_{\mathsf{q}} \end{aligned}$$

Mit $LC = 1/\omega_0^2$ folgt:

$$\boxed{\underline{U}_{\mathsf{C}} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega}\underline{U}_{\mathsf{q}}} \tag{3.27}$$

Die Übertragungsfunktion für die Spannung am Kondensator lautet also:

$$\boxed{H_{\mathsf{C}}(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega}} \tag{3.28}$$

Für die Resonanzüberhöhung bei $\omega = \omega_0$ gilt:

$$\frac{U_{\mathsf{C}}}{U_q} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = Q_0$$

Um die Spannung an der Induktivität auszudrücken, schreiben wir

$$\begin{aligned} \underline{U}_{\mathsf{L}} &= \frac{j\omega L}{R}\frac{j2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega}\underline{U}_{\mathsf{q}} \\ &= \frac{L}{R}\frac{-2\delta\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega}\underline{U}_{\mathsf{q}} \end{aligned}$$

Mit $2\delta = R/L$ folgt:

$$\boxed{\underline{U}_{\mathsf{L}} = \frac{-\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega}\underline{U}_{\mathsf{q}}} \tag{3.29}$$

Für die Resonanzüberhöhung bei $\omega = \omega_0$ gilt:

$$\frac{U_\mathsf{L}}{U_\mathsf{q}} = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = Q_0$$

Der Bezug zum Federpendel (*)

Das Federpendel und dessen Resonanzverhalten wurde in der Physikvorlesung ausführlich diskutiert [4]. Da es sich auch beim Federpendel um eine erzwungene harmonische Schwingung handelt, kann man den Formalismus der komplexen Wechselstromrechnung auf die Mechanik übertragen. Wir betrachten ein Federpendel der Masse m mit dem Reibungskoeffizienten γ und der der Federkonstanten D. Das Pendel wird durch eine harmonische Schwingung der Kreisfrequenz ω angeregt. Wir schreiben für diese externe Kraft

$$F_\mathrm{ext}(t) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\underline{F}_\mathsf{ext}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} .$$

Im eingeschwungenen Zustand ist die Auslenkung des Pendels eine harmonische Schwingung

$$x(t) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\underline{X}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} .$$

Der externen Kraft *entgegen* wirken folgende Kräfte:

- Die Rückstellkraft

  $$F_\mathsf{rück}(t) = Dx(t)$$

  kann durch den komplexen Zeiger

  $$D\underline{X}$$

  beschrieben werden.

- Die Reibungskraft

  $$F_\mathsf{reib}(t) = \gamma\dot{x}(t)$$

kann durch den komplexen Zeiger

$$j\omega\gamma\underline{X}$$

beschrieben werden.

- Die Trägheitskraft

$$F_{\mathsf{träg}}(t) = m\ddot{x}(t)$$

kann durch den komplexen Zeiger

$$(j\omega)^2 m\underline{X}$$

beschrieben werden.

Wenn man die Kraftbilanz durch die entsprechenden Zeiger ausdrückt, erhält man:

$$-\omega^2 m\underline{X} + j\omega\gamma\underline{X} + D\underline{X} = \underline{F}_{\mathsf{ext}}$$

Wir teilen diese Gleichung durch die Masse m

$$-\omega^2\underline{X} + j\omega\frac{\gamma}{m}\underline{X} + \frac{D}{m}\underline{X} = \frac{1}{m}\underline{F}_{\mathsf{ext}}$$

und definieren:

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m} \text{ und } 2\delta = \frac{\gamma}{m}$$

Dann gilt

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega\right)\underline{X} = \frac{1}{m}\underline{F}_{\mathsf{ext}}$$

und damit

$$\underline{X} = \frac{1}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega}\underline{F}_{\mathsf{ext}}$$

Die Übertragungsfunktion für die Amplitudenresonanz lautet also:

$$H_X(\omega) = \frac{1}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega}$$

Bis auf einen konstanten Faktor ist das die selbe Funktion wie die Übertragungsfunktion für die Spannung an Kondensator in Gleichung (3.28). In der letzteren Gleichung werden Größen gleicher Dimension (Spannung) verglichen. Ort und Kraft haben unterschiedliche Dimension. Zum besseren Vergleich muss man die passenden Kräfte vergleichen. Für den Zeiger der Rückstellkraft $D\underline{X}$ gilt dann wegen $D/M = \omega_0^2$ die Gleichung

$$\begin{aligned} D\underline{X} &= \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega}\underline{F}_{\mathsf{ext}} \\ &= H_C(\omega)\underline{F}_{\mathsf{ext}}\,, \end{aligned}$$

und die Analogie ist vollständig.

Die Formel

$$\frac{\omega_0}{2\delta} = Q_0$$

für die Güte gilt auch für die mechanische Schwingung. Man findet sie in dieser Form auch in [4]. In der Tabelle 3.1 sind die Analogien zwischen den elektrischen und den mechanischen Größen dargestellt.

Tabelle 3.1: Beziehungen zwischen elektrischen und mechanischen Größen

Elektrische Größe	Mechanische Größe
Spannung $u(t)$	Kraft $F(t)$
Strom $i(t)$	Geschwindigkeit $v(t)$
(Kondensator-) Ladung $q(t)$	Auslenkung $x(t)$
Induktivität L	Masse m
Widerstand R	Reibungskoeffizient γ
Kapazität C	1/Federkonstante $1/D$

3.3 Der LCR-Parallelschwingkreis

Auch bei einem LCR-Parallelschwingkreis treten Resonanzen auf. Die Schaltung dazu ist in Abbildung 3.10 gezeigt. Ihre Eingangsadmittanz in kartesischer Darstellung

$$\underline{Y} = G + jB$$

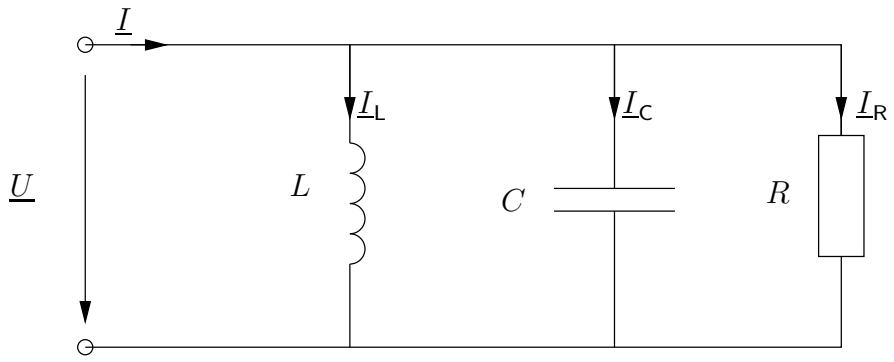


Abbildung 3.10: Der LCR-Parallelschwingkreis.

lautet

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{R} + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)}. \tag{3.30}$$

In exponentieller Darstellung $\underline{Y} = Y\mathrm{e}^{j\varphi}$ ergibt sich

$$\boxed{Y = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\omega C - \frac{1}{\omega R}\right)^2}, \quad \varphi = \arctan\left(R\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right)} \tag{3.31}$$

Der komplexe Zeiger dazu ist Abbildung 3.11 gezeichnet. Für $B > 0$ ist das Verhalten kapazitiv, für $B < 0$ induktiv. Für $B = 0$ liegt Resonanz vor.

Nach der im vorigen Abschnitt eingeführten Definition sind im Resonanzfall Strom und Spannung in Phase. Das bedeutet für den Parallelschwingkreis:

$$\boxed{\underline{I} = G\,\underline{U} \quad \Leftrightarrow \quad B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 0}$$

Die Bedingung für die Resonanz(kreis)frequenz ω_0 bei lautet:

$$\omega_0 C - \frac{1}{\omega_0 L} = 0$$

Das ist die selbe Bedingung wie für den Reihenschwingkreis. Es gilt wieder:

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}} \quad \boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}}$$

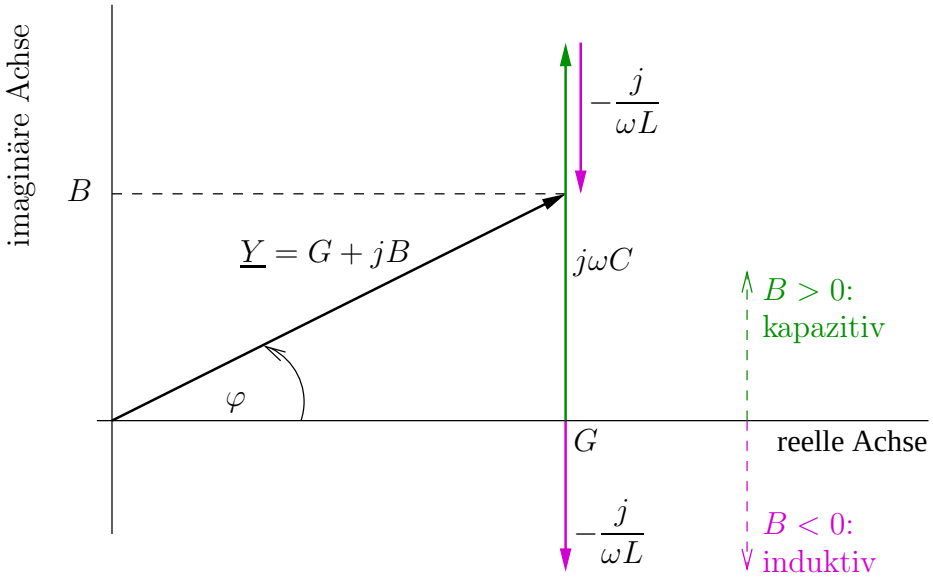


Abbildung 3.11: Zeiger der Eingangsadmittanz für den LCR-Parallelschwingkreis.

Im Resonanzfall haben L und C (betragsmäßig) den selben Blindleitwert. Diesen nennt man *Kennleitwert*:

$$\boxed{Y_\mathrm{k} = \omega_0 C = \frac{1}{\omega_0 L} = \sqrt{\frac{C}{L}}} \tag{3.32}$$

Für die Admittanz gilt:

$$\underline{Y} = G + jY_k \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

$$\underline{Y} = G \left(1 + j \frac{Y_k}{G} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$$

Die Güte des Resonanzkreises ist definiert als:

$$\boxed{Q_0 := \frac{Y_k}{G}}$$

Die Verstimmung ist auch hier definiert als:

$$\boxed{v := \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}}$$

Damit erhält man die normierte Admittanz:

$$\boxed{\frac{\underline{Y}}{G} = 1 + jQ_0 v}$$

Die weitere Analyse erfolgt wie beim Reihenschwingkreis. Die Resonanzkurven brauchen wir nicht noch einmal neu zu diskutieren, weil sie sich durch Ersetzen der betreffenden Größen ergeben, so wie es im Folgenden erläutert wird.

Vergleich der Beziehungen zwischen Strom und Spannung am Reihenschwingkreis und am Parallelschwingkreis

Reihenschwingkreis Strom und Spannung am Zweipol stehen in folgender Beziehung:

$$\underline{U} = \left(R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right)\underline{I}$$

Für die Spannungen an den Bauteilen gilt:

$$\underline{U}_R = R\,\underline{I} \qquad \underline{U}_L = j\omega L\,\underline{I} \qquad \underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\,\underline{I}$$

Parallelschwingkreis Strom und Spannung am Zweipol stehen in folgender Beziehung:

$$\underline{I} = \left(G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)\right)\underline{U}$$

Für die Ströme durch die Bauteile gilt:

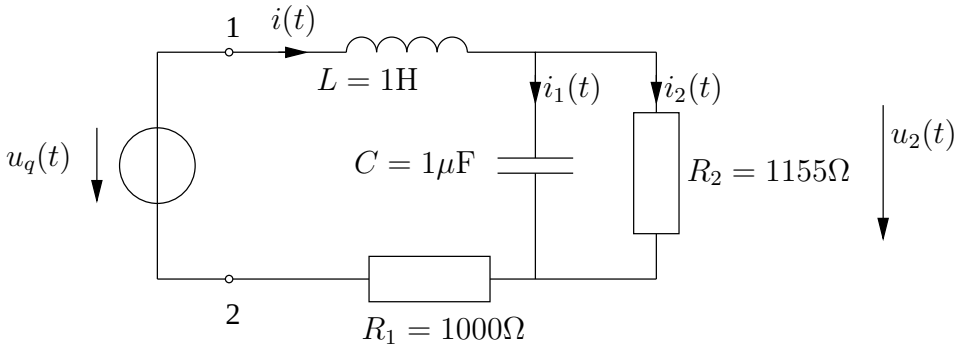
$$\underline{I}_R = G\,\underline{U} \qquad \underline{I}_C = j\omega C\,\underline{U} \qquad \underline{I}_L = \frac{1}{j\omega L}\,\underline{U}$$

Offenbar gehen die unteren Gleichungen aus den oberen hervor, indem man R durch G ersetzt, Ströme durch Spannungen und Spannungen durch Ströme ersetzt sowie L und C vertauscht.

Aufgaben zu Kapitel 3

Aufgabe 3.1

Gegeben ist folgende Schaltung



mit der Quellspannung

$$u_\mathsf{q}(t) = \sqrt{2} \cdot 20\,\text{V} \cos(\omega t)$$

(a) Geben Sie eine Formel für die Eingangsimpedanz $\underline{Z}_\mathsf{E}$ in Abhängigkeit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ an. Schreiben Sie diese komplexe Größe in kartesischer Form.

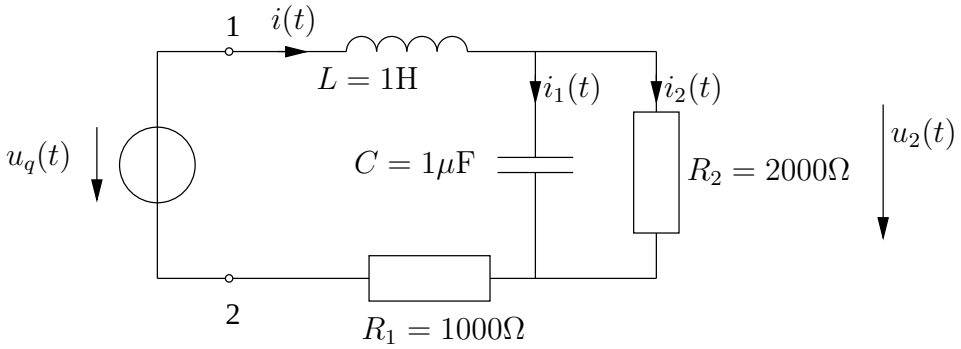
(b) Bei welcher Frequenz $f = f_0 > 0$ liegt Resonanz vor?

(c) Berechnen Sie für $\omega = 2\pi f_0$ die eingezeichneten Ströme und Spannungen.

(d) Wie groß ist hier die an den Klemmen aufgenommene Leistung der Schaltung?

Aufgabe 3.1 (Variante)

Gegeben ist folgende Schaltung



mit der Quellspannung

$$u_{\mathsf{q}}(t) = \sqrt{2} \cdot 20\,\mathrm{V} \cos(\omega t)$$

(a) Geben Sie eine Formel für die Eingangsimpedanz $\underline{Z}_{\mathsf{E}}$ in Abhängigkeit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ an. Schreiben Sie diese komplexe Größe in kartesischer Form.

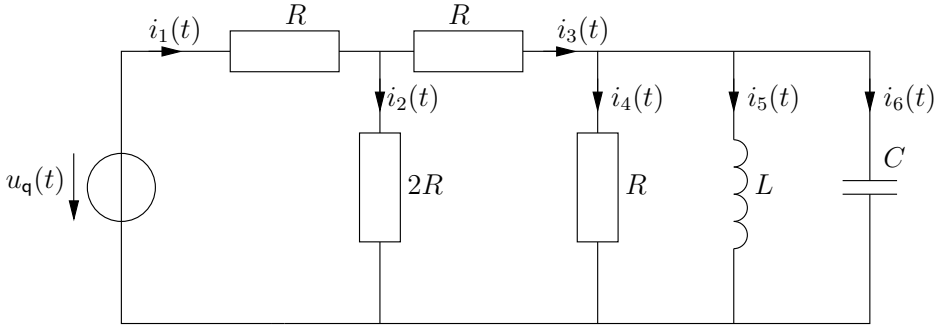
(b) Bei welcher Frequenz $f = f_0 > 0$ liegt Resonanz vor?

(c) Berechnen Sie für $\omega = 2\pi f_0$ die eingezeichneten Ströme und Spannungen.

(d) Wie groß ist hier die an den Klemmen aufgenommene Leistung der Schaltung?

Aufgabe 3.2

Gegeben ist folgende Schaltung



mit

$$u_{\mathsf{q}}(t) = 20\,\mathrm{V} \cos(\omega t + 60°) \quad \text{und } \omega = 2000\,\mathrm{s}^{-1}$$

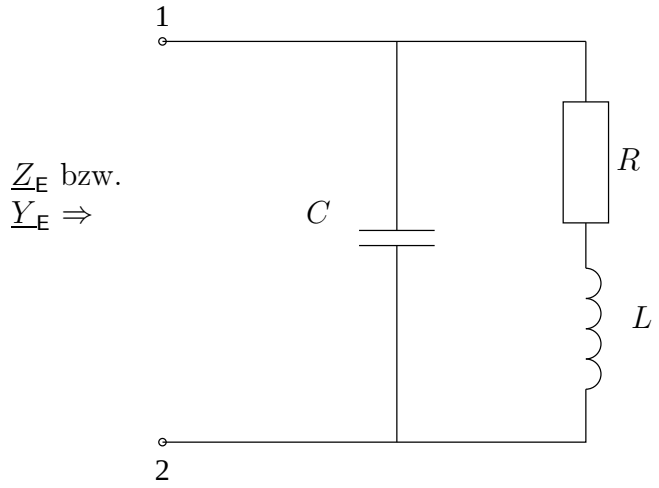
und

$$R = 10\,\Omega\,,\; L = 1\,\mathrm{mH}\,,\; C = 250\,\mu\mathrm{F}$$

Berechnen Sie die jeweiligen Zeitsignale für alle eingezeichneten Ströme $i_1(t)$ bis $i_6(t)$. Hinweis: Prüfen Sie zunächst, ob Resonanz vorliegt.

Aufgabe 3.3

Gegeben ist folgende Schaltung



(a) Geben Sie eine Formel für die Eingangsimpedanz $\underline{Z}_\mathsf{E}$ in Abhängigkeit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ an. Schreiben Sie diese komplexe Größe in kartesischer Form.

(b) Geben Sie eine Formel für die Eingangsadmittanz $\underline{Y}_\mathsf{E}$ in Abhängigkeit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ an. Schreiben Sie diese komplexe Größe in kartesischer Form.

(c) Bei welcher Frequenz $f = f_0 > 0$ liegt Resonanz vor?

4 Drehstrom

4.1 Grundbegriffe

Der Begriff **Drehstrom** ist eine Kurzbezeichnung für *symmetrischen Dreiphasen- Wechselstrom*. Es treten dabei drei Spannungen mit verschiedenen Phasen auf, und diese Phasen sind in der komplexen Ebene symmetrisch angeordnet. Man kann Systeme mit einer anderen Anzahl an Phasen (symmetrisch oder auch nicht) konstruieren. Diese werden hier aber nicht betrachtet.

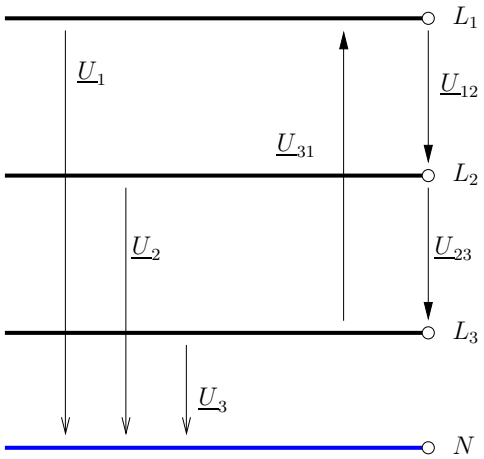


Abbildung 4.1: Leiter L_1, L_2,L_3 und Neutralleiter N beim Drehstrom sowie die verschiedenen dabei auftretenden Spannungen.

Beim Drehstrom gibt es drei Spannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$, die zu einander in einer festen Phasenbeziehung stehen. Die Beträge dieser drei Spannungen sind dabei gleich:

$$U_1 = U_2 = U_3$$

Die Spannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ sind die Spannungen an den Klemmen von drei **(Außen-)**

Leitern L_1, L_2, L_3 gegenüber der Klemme des **Neutralleiters**[1] N, siehe Abbildung 4.1. Der Verbraucher sieht diese Klemmen. Es gibt Schaltungen, bei denen der Neutralleiter fehlt bzw. nicht benutzt wird.

Die drei Spannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ werden als **Sternspannungen** oder auch Strangspannungen[2] bezeichnet. Wir betrachten im Folgenden nur das in der Technik übliche sogenannte **Rechtssystem**, bei dem die Phasen der drei Spannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, ,$\underline{U}_3$ *im Uhrzeigersinn* gegeneinander verdreht sind. Es gilt also

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= U_1 \mathrm{e}^{j0^\circ} = U_1 \\ \underline{U}_2 &= U_1 \mathrm{e}^{-j120^\circ} = U_1 \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ \underline{U}_3 &= U_1 \mathrm{e}^{+j120^\circ} = U_1 \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Für den Betrag der Sternspannungen (Strangspannungen) schreibt man

$$U_{\mathsf{Stern}} = U_1 \text{ oder } U_{\mathsf{Str}} = U_1 \,.$$

Die **Leiterspannungen** sind die Spannungen zwischen den Außenleitern in Abbildung 4.1. Sie ergeben sich als die Differenzen der Sternspannungen

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{U}_1 - \underline{U}_2 \\ \underline{U}_{23} &= \underline{U}_2 - \underline{U}_3 \\ \underline{U}_{31} &= \underline{U}_3 - \underline{U}_1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

und sind Abbildung 4.2 zusammen mit letzteren eingezeichnet. Die *Leiterspannungen in Exponentialdarstellung* ergeben sich als:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \sqrt{3} U_1 \mathrm{e}^{j30^\circ} \\ \underline{U}_{23} &= \sqrt{3} U_1 \mathrm{e}^{-j90^\circ} \\ \underline{U}_{31} &= \sqrt{3} U_1 \mathrm{e}^{j150^\circ} = \sqrt{3} U_1 \mathrm{e}^{-j210^\circ} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Diese drei Spannungen berechnet man, indem man den Umweg über die kartesische

[1] Alte Bezeichnung: Nullleiter
[2] Der Begriff *Strang* wird später genauer definiert.

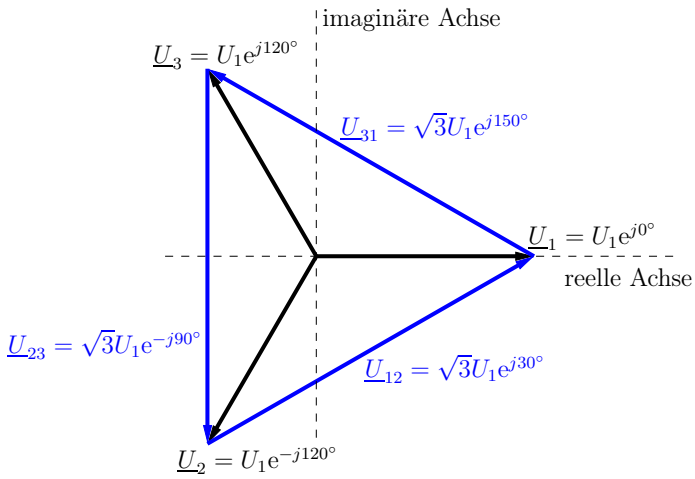


Abbildung 4.2: Drehstrom: Die Sternspannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ und die Leiterspannungen $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$.

Darstellung geht. Am Beispiel von $\underline{U}_{12}$ wird das hier gezeigt:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{12} &= U_1\left(1+\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= \sqrt{3}U_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}\right)\\ &= \sqrt{3}U_1 e^{j30°}\end{aligned}$$

Die anderen Leiterspannungen berechnet man entsprechend der selben Methode.

Merke: Die Leiterspannungen

$$\boxed{U_{\text{Leiter}} = \sqrt{3}\,U_{\text{Stern}}}$$

besitzen gegenüber den Sternspannungen einen um den Faktor $\sqrt{3}$ größeren Betrag. In den in Deutschland im Haushalt üblichen Stromnetzen sind dies die Werte

$$\boxed{400\,\text{V} \approx \sqrt{3}\cdot 230\,\text{V}}.$$

Früher waren die Spannungen etwas niedriger:

$$\boxed{380\,\text{V} \approx \sqrt{3}\cdot 220\,\text{V}}$$

Wenn nichts anderes gesagt ist, *beziehen sich Spannungsangaben für ein Drehstromnetz immer auf die Leiterspannungen*. In Abbildung 4.3 sind die Zeitverläufe der Stern- und

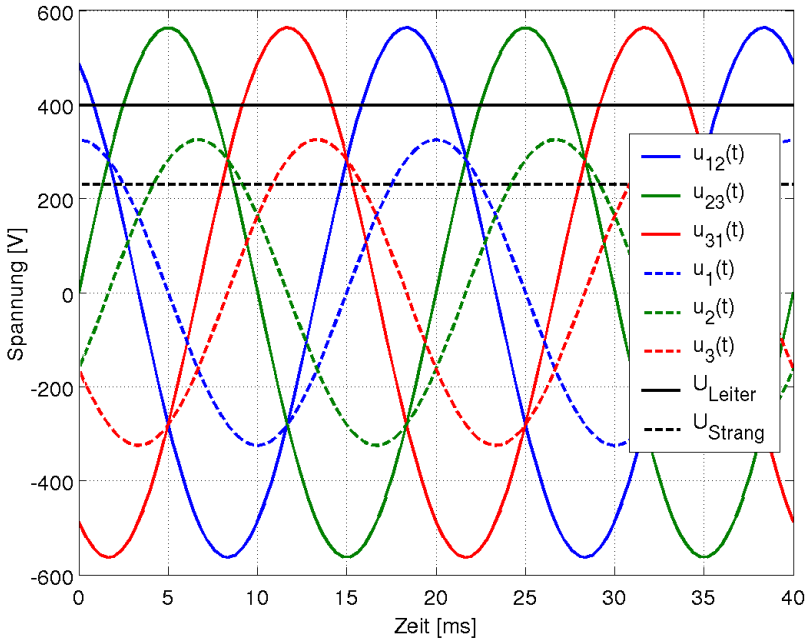


Abbildung 4.3: Zeitverlauf der Stern- und Leiterspannungen in einem 400 V/50 Hz-Drehstromnetz.

Leiterspannungen in einem 400 V-Drehstromnetz der Frequenz 50 Hz dargestellt.

Rekonstruktion der Sternspannungen Wenn kein Neutralleiter vorhanden ist, so stellt sich die Frage, ob sich aus den Leiterspannungen $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ nach Gleichung (4.3) die Sternspannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ *eindeutig* rekonstruieren lassen. Dies kann z.B. für messtechnische Zwecke von Bedeutung sein. Mathematisch bedeutet das: Es müssten sich die Sternspannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ als eindeutige Lösungen des Gleichungssystems

$$\begin{array}{rrrcl} \underline{U}_1 & -\underline{U}_2 & & = & \underline{U}_{12} \\ & \underline{U}_2 & -\underline{U}_3 & = & \underline{U}_{23} \\ -\underline{U}_1 & & +\underline{U}_3 & = & \underline{U}_{31} \end{array} \tag{4.4}$$

ergeben. Dieses Gleichungssystem besitzt aber keine eindeutige Lösung. Man erkennt das daran, dass die Determinante der Koeffizientenmatrix verschwindet. Es gibt unendlich viele Lösungen, denn: Bilden nämlich die Spannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ eine Lösungen des

Gleichungssystems (4.4) und ist $\underline{U}_0$ eine beliebige Konstante, so ist

$$\begin{aligned} \underline{U}'_1 &= \underline{U}_1 + \underline{U}_0 \\ \underline{U}'_2 &= \underline{U}_2 + \underline{U}_0 \\ \underline{U}'_3 &= \underline{U}_3 + \underline{U}_0 \end{aligned}$$

ebenfalls eine Lösung. Anschaulich ist das so zu erklären: Die Differenz-Zeiger der Leiterspannungen $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ legen das blaue Dreieck in Abbildung 4.2 nur bis auf eine Verschiebung um einen konstanten Zeiger (eben um $\underline{U}_0$) fest. Eindeutigkeit erreicht man durch die *zusätzliche Bedingung*

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0\,. \tag{4.5}$$

Geometrisch lässt diese Bedingung so verstehen, dass in Abbildung 4.2 das Dreieck aus den Leiterspannungen seinen Mittelpunkt im Ursprung haben muss. Elektrisch bedeutet das: Man definiert einen **Sternpunkt**[3] mit dem Potential 0 V. Die Lösung des Gleichungssystems (4.4) findet man, indem man jeweils zwei Gleichungen von einander subtrahiert und die Zusatzbedingung (4.5) einsetzt. Das Ergebnis lautet:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \frac{1}{3}\,(\underline{U}_{12} - \underline{U}_{31}) \\ \underline{U}_2 &= \frac{1}{3}\,(\underline{U}_{23} - \underline{U}_{12}) \\ \underline{U}_3 &= \frac{1}{3}\,(\underline{U}_{31} - \underline{U}_{23}) \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ohne viel zu rechnen, kann man diese drei Gleichungen auch direkt aus Abbildung 4.4 ablesen.

Bevor im Folgenden Schaltungen von Quelle und Verbraucher diskutiert werden, muss noch ein wichtiger Begriff geklärt werden.

Definition: In der Drehstromtechnik wird ein Erzeuger- oder Verbraucher-Zweipol, der zwischen zwei Klemmen liegt, als **Strang** bezeichnet.

- Ein **Generatorstrang** ist also eine **Spannungsquelle**. Man stellt sich dabei die Wicklungen der Spule eines Generators vor.

[3] Wie man diesen Sternpunkt elektrisch realisiert, wird etwas weiter unten gezeigt (siehe Abbildung 4.9).

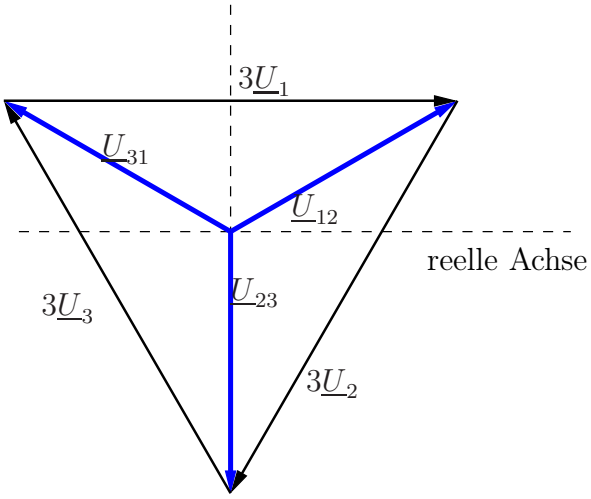


Abbildung 4.4: Geometrische Rekonstruktion der Sternspannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ aus den Leiterspannungen $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$.

- Ein **Verbraucherstrang** ist eine **Impedanz**. Die in der Praxis wichtigsten Drehstrom-Verbraucher sind elektrische Antriebe (Motoren) und Ohmsche Widerstände, so dass die Vorstellung von den Wicklungen hier ebenfalls passt.

Eine **Strangspannung** (bzw. ein **Strangstrom**) ist eine Spannung (bzw. ein Strom) am Strang, also zwischen den beiden Klemmen des Erzeuger- oder Verbraucher-Zweipols.

4.2 Schaltungen der Quelle

4.2.1 Sternschaltung der Quelle

Die klassische Schaltung der Quelle ist die **Sternschaltung**, die in Abbildung 4.5 dargestellt ist. Drei Spannungsquellen erzeugen die Leiterspannungen gegenüber einem gemeinsamen Sternpunkt, der sich auf dem Nullpotential des Neutralleiters befindet. Realisiert wird dies durch die drei Induktivitäten (Spulen) eines Drehstromgenerators mit symmetrisch angeordneten Wicklungssträngen, die an ihrem einen Ende zu einem Sternpunkt verbunden sind und deren jeweils andere Enden die Leiter bilden. Eine hilfreiche Animation hierzu findet sich bei Wikipedia unter dem Stichwort *Drehstromgenerator* [9].

4.2.2 Dreieckschaltung der Quelle

Die **Dreieckschaltung** der Quelle (auch: Ringschaltung) ist in Abbildung 4.6 gezeigt.

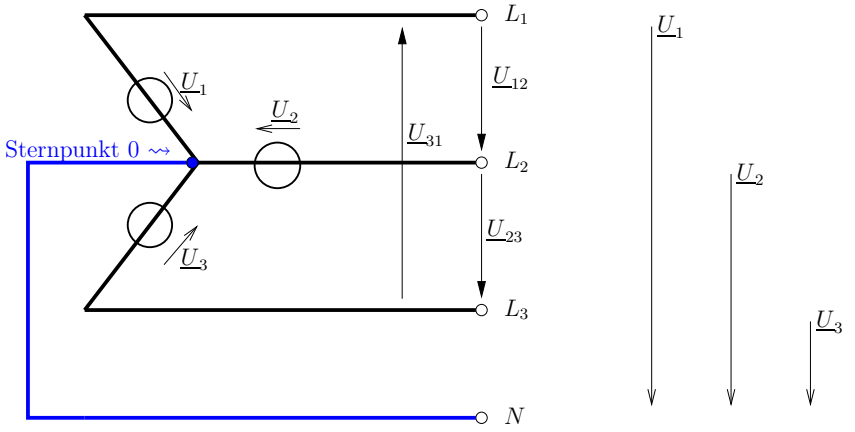


Abbildung 4.5: Drehstrom. Sternschaltung der Quelle.

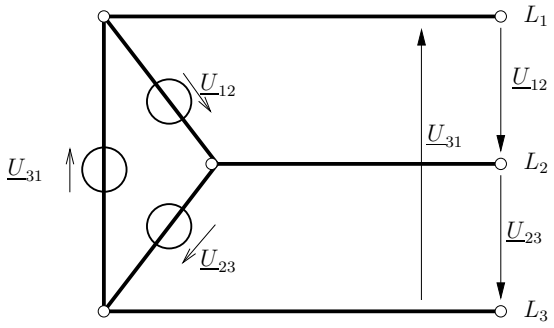


Abbildung 4.6: Drehstrom. Dreieckschaltung der Quelle.

Hier gibt es keinen Sternpunkt und keinen Neutralleiter. Nach Definition des Stranges gilt $U_{\mathsf{Leiter}} = U_{\mathsf{Strang}}$. Obwohl kein Sternpunkt vorkommt und deshalb zunächst auch keine Sternspannungen vorhanden sind, kann man diese konstruieren, denn sie sind eindeutig durch die Leiterspannungen festgelegt. Wie dies mathematisch mit den komplexen Zeigern funktioniert, wurde im vorherigen Abschnitt in Gleichung (4.6) gezeigt. Wie dies mit einer Ersatzschaltung erfolgen kann, wird bei den im Folgenden behandelten Verbraucherschaltungen gezeigt.

4.3 Verbraucherschaltungen

4.3.1 Symmetrische Verbraucher-Sternschaltung mit Neutralleiter

Die symmetrische Verbraucher-Sternschaltung mit Neutralleiter ist in Abbildung 4.7 dargestellt. Drei identische Verbraucher mit Lastimpedanz

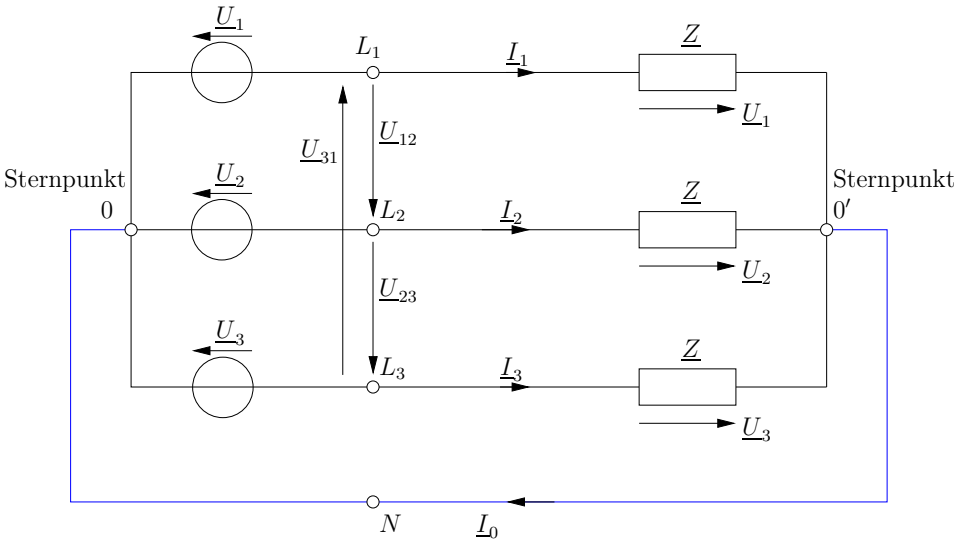


Abbildung 4.7: Symmetrische Verbraucher-Sternschaltung mit Neutralleiter.

$$\underline{Z} = Z\mathrm{e}^{j\varphi z}$$

liegen zwischen den drei Leiterklemmen und dem Neutralleiter. Die Sternpunkte 0 und 0′ an Erzeuger und Verbraucher sind über den Neutralleiter verbunden. Deshalb liegen die drei Sternspannungen (=Strangspannungen) $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ der Quelle auch an den drei Impedanzen (Verbrauchersträngen). Die Strangströme an den Verbrauchern sind identisch mit den Leiterströmen. Diese lauten:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}} \text{ und } \underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}} \text{ und } \underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}} \tag{4.7}$$

Bezeichnet man deren Beträge mit

$$I_{\mathsf{Leiter}} = I_1 = I_2 = I_3 = \frac{U_{\mathsf{Stern}}}{Z}\,,$$

so ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= I_{\mathsf{Leiter}} \mathrm{e}^{-j\varphi_Z} \\ \underline{I}_2 &= I_{\mathsf{Leiter}} \mathrm{e}^{-j\varphi_Z} \mathrm{e}^{-j120^\circ} \\ \underline{I}_3 &= I_{\mathsf{Leiter}} \mathrm{e}^{-j\varphi_Z} \mathrm{e}^{+j120^\circ} \,, \end{aligned} \tag{4.8}$$

Aus

$$\underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3 = 0$$

und Gleichung (4.7) folgt

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

Durch den Neutralleiter fließt also kein Strom:

$$\underline{I}_0 = 0$$

Wegen

$$I_{\mathsf{Leiter}} = I_1 = I_2 = I_3 = \frac{U_{\mathsf{Stern}}}{Z}$$

sind die Leistungen an den Verbrauchern gleich

$$\underline{S}_1 = \underline{S}_2 = \underline{S}_3 \,,$$

und es gilt

$$\underline{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = \underline{Z}\, I_{\mathsf{Leiter}}^2 = U_{\mathsf{Stern}} I_{\mathsf{Leiter}} \mathrm{e}^{j\varphi_Z} \,.$$

Die **Gesamtleistung** ist also das dreifache dieser Größe:

$$\underline{S} = 3\underline{S}_1 = 3U_{\mathsf{Stern}} I_{\mathsf{Leiter}} \mathrm{e}^{j\varphi_Z} \,.$$

Üblicherweise drückt man die Leistung durch die Leiterspannung $U_{\mathsf{Leiter}} = \sqrt{3} U_{\mathsf{Stern}}$ und den Leiterstrom $I_{\mathsf{Leiter}} = I_1$ aus. Es gilt

$$\boxed{\underline{S} = \sqrt{3}\, U_{\mathsf{L(eiter)}} I_{\mathsf{L(eiter)}} \mathrm{e}^{j\varphi_Z}} \tag{4.9}$$

- Die Scheinleistung beträgt: $S = \sqrt{3} U_\mathrm{L} I_\mathrm{L}$
- Die Wirkleistung beträgt: $P = \sqrt{3} U_\mathrm{L} I_\mathrm{L} \cos \varphi_Z$
- Die Blindleistung beträgt: $Q = \sqrt{3} U_\mathrm{L} I_\mathrm{L} \sin \varphi_Z$

4.3.2 Symmetrische Verbraucher-Sternschaltung ohne Neutralleiter

In der symmetrischen Verbraucher-Sternschaltung mit Neutralleiter aus Abbildung 4.7 fließt kein Strom durch den Neutralleiter. Wenn man ihn – wie in Abbildung 4.8 gezeigt – weglässt, ändert sich nichts. Alle Formeln bleiben die selben. Insbesondere gilt für die

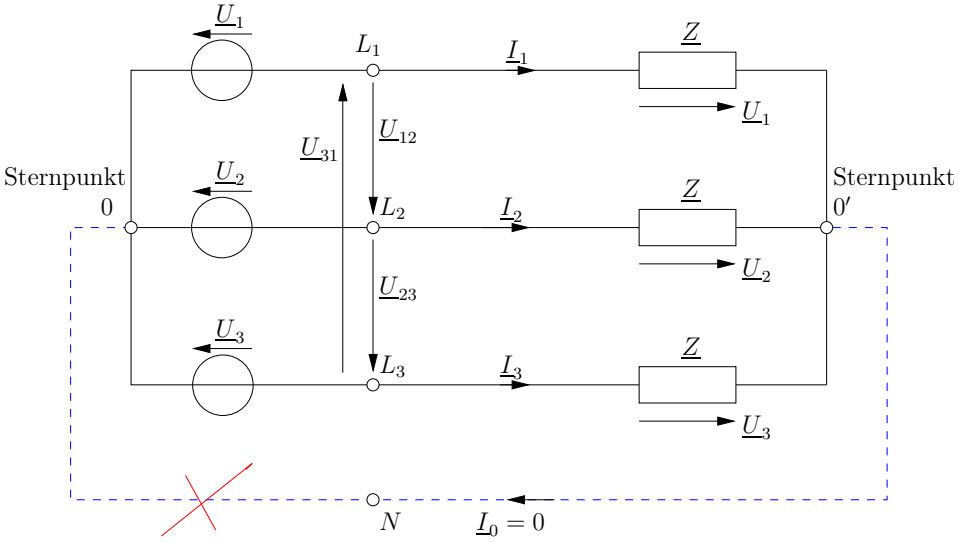


Abbildung 4.8: Symmetrische Verbraucher-Sternschaltung ohne Neutralleiter.

komplexe Leistung:

$$\boxed{\underline{S} = \sqrt{3}\, U_\mathrm{L} I_\mathrm{L} \mathrm{e}^{j\varphi_Z}} \tag{4.10}$$

Hierbei ist wieder U_L bzw. I_L die Leiterspannung bzw. der Leiterstrom.

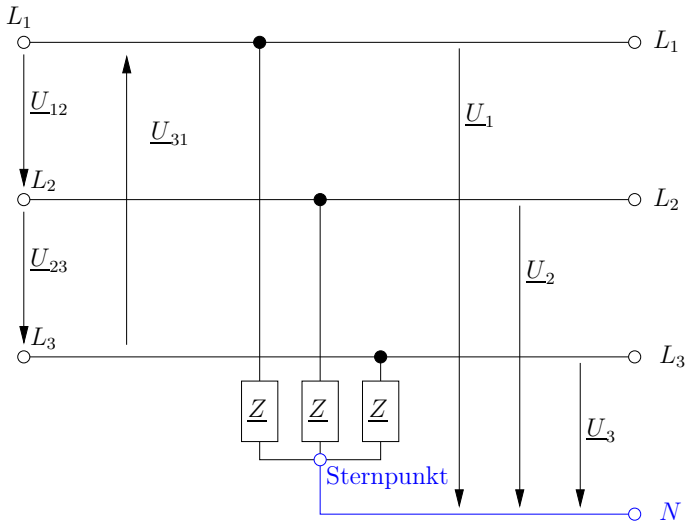


Abbildung 4.9: Sternpunktkonstruktion.

Sternpunktkonstruktion Mit der Schaltung in Abbildung 4.8 lässt sich aus den Leiterspannungen ein **Sternpunkt** konstruieren. Dies spielt in der Messtechnik eine wichtige Rolle. Durch die in Abbildung 4.9 gezeigte Sternpunktkonstruktion kann man aus den Leiterspannungen $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ die Sternspannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ technisch realisieren, wenn zunächst nur die Leiterspannungen technisch verfügbar sind. Auf diese Weise kann man zum Beispiel eine Dreieckschaltung der Quelle in eine Sternschaltung transformieren.

4.3.3 Asymmetrische Verbraucher-Sternschaltung mit Neutralleiter

Bei der asymmetrischen Verbraucher-Sternschaltung mit Neutralleiter sind drei *verschiedene* Verbraucher mit Lastimpedanzen $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ zwischen die drei Leiterklemmen und den Neutralleiter geschaltet, so wie es in Abbildung 4.10 dargestellt ist. Die Sternpunkte 0 und $0'$ an Erzeuger und Verbraucher sind über den Neutralleiter verbunden. Deshalb liegen die Strangspannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ der Quelle an den drei Verbrauchersträngen. Die Strangströme an den Verbrauchern sind identisch mit den Leiterströmen. Diese lauten:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1}$$

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_2} \mathrm{e}^{-j120^\circ}$$

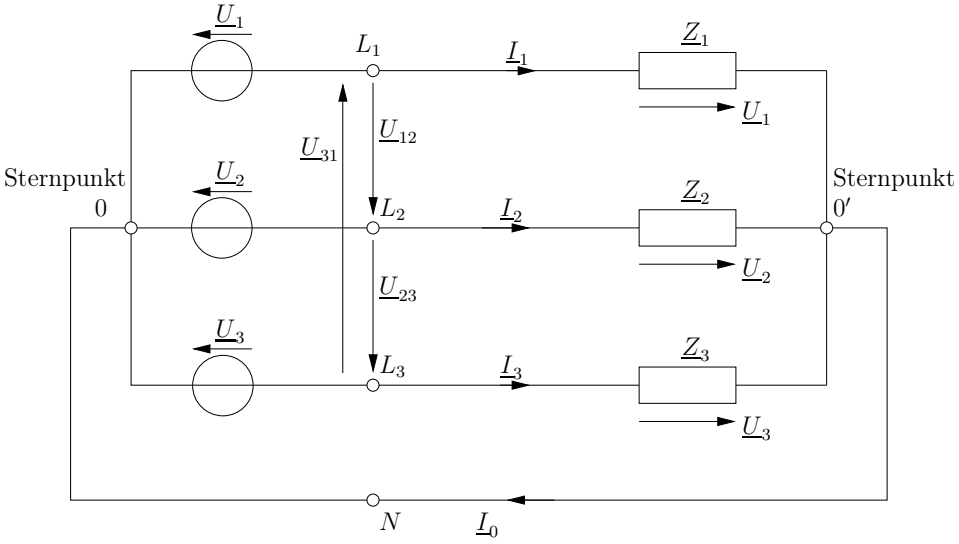


Abbildung 4.10: Asymmetrische Verbraucher-Sternschaltung mit Neutralleiter.

$$\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_3} \mathrm{e}^{-j240^\circ}$$

Im Gegensatz zur symmetrischen Verbraucher-Sternschaltung fließt jetzt ein Strom im Neutralleiter:

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3$$

$$\underline{I}_0 = \underline{U}_1 \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{\mathrm{e}^{-j120^\circ}}{\underline{Z}_2} + \frac{\mathrm{e}^{-j240^\circ}}{\underline{Z}_3} \right)$$

Die gesamte Leistung beträgt

$$\boxed{\underline{S} = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \underline{I}_2^* + \underline{U}_3 \underline{I}_3^*}. \tag{4.11}$$

Drückt man die Ströme durch die Sternspannungen und Impedanzen aus, so ergibt sich

$$\underline{S} = U_1^2 \left(\frac{1}{\underline{Z}_1^*} + \frac{1}{\underline{Z}_2^*} + \frac{1}{\underline{Z}_3^*} \right) .$$

Ersetzt man die Sternspannung durch die Leiterspannung $U_\mathrm{L} = \sqrt{3}\, U_1$, so erhält man den Ausdruck:

$$\boxed{\underline{S} = \frac{U_\mathrm{L}^2}{3} \left(\frac{1}{\underline{Z}_1^*} + \frac{1}{\underline{Z}_2^*} + \frac{1}{\underline{Z}_3^*} \right)} \tag{4.12}$$

4.3.4 Asymmetrische Verbraucher-Sternschaltung ohne Neutralleiter

Bei der asymmetrischen Verbraucher-Sternschaltung ohne Neutralleiter, wie sie in Abbildung 4.11 dargestellt ist, sind wieder drei verschiedene Verbraucher mit Lastimpedanzen

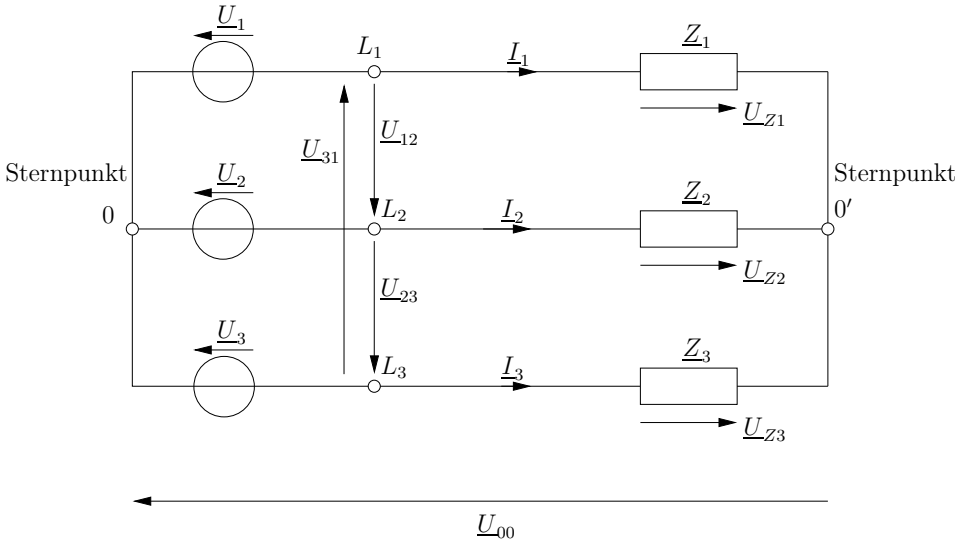


Abbildung 4.11: Asymmetrische Verbraucher-Sternschaltung ohne Neutralleiter..

$\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ zwischen die drei Leiterklemmen und einen gemeinsamen Punkt, den Sternpunkt $0'$ geschaltet. Die Sternpunkte 0 und $0'$ an Erzeuger und Verbraucher sind aber *nicht* über einen Neutralleiter verbunden. Dadurch wird die Berechnung etwas aufwendiger. Zwischen den beiden Sternpunkten liegt die zunächst unbekannte Spannung $\underline{U}_{00}$. Wenn man diese kennt, kann man die Spannungen an den Lastimpedanzen (und damit die Ströme und damit die Leistungen) über

$$\underline{U}_{Z1} = \underline{U}_1 - \underline{U}_{00} \text{ und } \underline{U}_{Z2} = \underline{U}_2 - \underline{U}_{00} \text{ und } \underline{U}_{Z3} = \underline{U}_3 - \underline{U}_{00} \tag{4.13}$$

berechnen. Die Spannung $\underline{U}_{00}$ lässt sich mit Hilfe der drei obigen Gleichungen und der Bedingung

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

berechnen[4]. Daraus folgt die Gleichung

$$\frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_{00}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_{00}}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_3 - \underline{U}_{00}}{\underline{Z}_3} = 0\,,$$

[4]Vgl. Hagmann [2], S. 337ff.

die sich nach $\underline{U}_{00}$ auflösen lässt:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \underline{U}_{00}\left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}\right)$$

$$\boxed{\underline{U}_{00} = \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}\right)^{-1}\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3}\right)}. \tag{4.14}$$

Alternative Herleitung über die Transformation der Quellen Parallel geschaltete Spannungsquellen lassen sich in Stromquellen transformieren. Wie in Abschnitt 1.8 diskutiert wurde, ist diese Vorgehensweise oft günstig, weil sich dabei die mathematischen Umformungen durch äquivalente Ersatzschaltungen anschaulich erklären lassen. Um $\underline{U}_{00}$ zu berechnen, transformieren wir deshalb die an den Sternpunkten anliegenden linearen Spannungsquellen entsprechend Abbildung 4.12 (oben) in lineare (Ersatz-) Stromquellen. Dann ersetzen wir diese durch eine einzige lineare Ersatz-Stromquelle, welche in Abbildung 4.12 (unten) gezeigt ist. Die einzelnen Größen sind in den Abbildungen definiert. Die Gesamtimpedanz, d.h. der Innenwiderstand der linearen Ersatz-Stromquelle lautet

$$\underline{Z}_{\mathsf{ges}} = \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}\right)^{-1}.$$

Da kein Neutralleiter vorhanden ist, sind die Sternpunkte 0 und $0'$ nicht verbunden, und die lineare Stromquelle befindet sich im Leerlauf. Im Leerlauf fließt durch diese Gesamtimpedanz $\underline{Z}_{\mathsf{ges}}$ der Gesamtstrom der idealen Ersatzquelle

$$\begin{aligned}\underline{I}_{\mathsf{ges}} &= \underline{I}'_1 + \underline{I}'_2 + \underline{I}'_3 \\ &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3}\end{aligned}$$

Die gesuchte Spannung zwischen den Sternpunkten ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}\underline{U}_{00} &= \underline{Z}_{\mathsf{ges}}\underline{I}_{\mathsf{ges}} \\ &= \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}\right)^{-1}\left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3}\right)\end{aligned}$$

Dies ist gerade Gleichung (4.14).

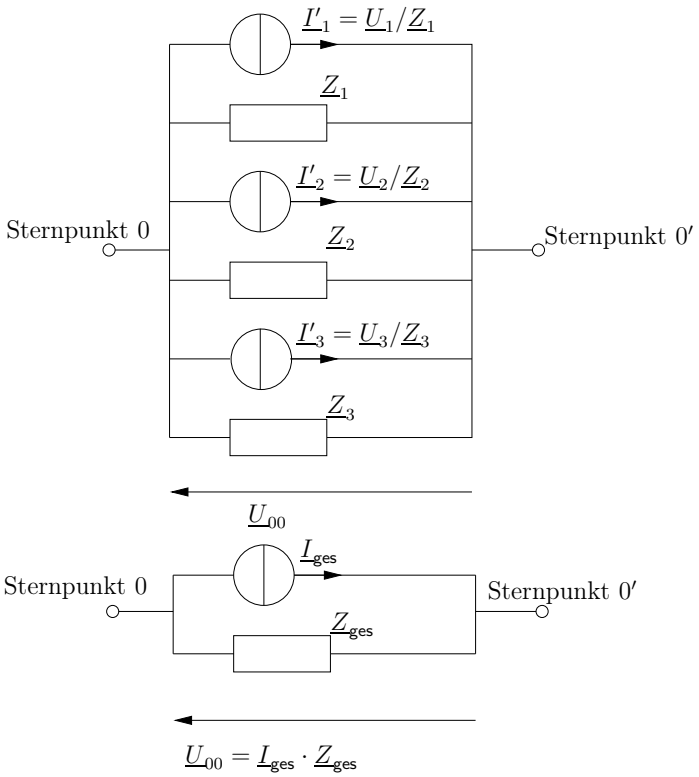


Abbildung 4.12: Ersatzschaltbild für die asymmetrische Verbraucher-Sternschaltung ohne Neutralleiter. Erster Schritt (oben): Transformation der linearen Spannungsquellen zu linearen Stromquellen. Zweiter Schritt (unten): Zusammenfassung der linearen Stromquellen.

Alternative Schreibweisen für die komplexe Leistung bei Verbraucher-Sternschaltungen ohne Neutralleiter[5]

Zur Vorbereitung der Betrachtungen zur Leistungsmessung soll die komplexe Leistung $\underline{S}$ der asymmetrischen Verbraucher-Sternschaltung ohne Neutralleiter als Funktion der Spannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ und der Ströme $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$, $\underline{I}_3$ ausgedrückt werden. Sie ergibt sich als die Summe der komplexen Leistungen der drei Zweipole, die durch die Impedanzen $\underline{Z}_1$, $\underline{Z}_2$, $\underline{Z}_3$ gegeben sind:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U}_{Z1}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{Z2}\underline{I}_2^* + \underline{U}_{Z3}\underline{I}_3^* \\ &= (\underline{U}_1 - \underline{U}_{00})\,\underline{I}_1^* + (\underline{U}_2 - \underline{U}_{00})\,\underline{I}_2^* + (\underline{U}_3 - \underline{U}_{00})\,\underline{I}_3^* \\ &= \underline{U}_1\underline{I}_1^* + \underline{U}_2\underline{I}_2^* + \underline{U}_3\underline{I}_3^* - \underline{U}_{00}\,(\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3)^* \end{aligned} \tag{4.15}$$

[5] Vgl. Moeller [1], S. 480ff.

Wegen

$$\underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0 \tag{4.16}$$

folgt

$$\boxed{\underline{S} = \underline{U}_1\underline{I}_1^* + \underline{U}_2\underline{I}_2^* + \underline{U}_3\underline{I}_3^*}. \tag{4.17}$$

Das ist der selbe Ausdruck wie bei vorhandenem Neutralleiter, siehe Gleichung (4.11). Das Potential $\underline{U}_{00}$ des Sternpunktes kommt in dieser Gleichung gar nicht mehr vor. Die (komplexe) Leistung $\underline{S}$ kann also durch Messung der Sternspannungen und der Leiterströme ermittelt werden.

Man kann $\underline{S}$ auch durch die Leiterströme und Leiterspannungen ausdrücken. Hierzu wird in der obigen Gleichung

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}_1 - \underline{I}_3$$

ersetzt:

$$\begin{aligned}
\underline{S} &= \underline{U}_1\underline{I}_1^* - \underline{U}_2\underline{I}_1^* - \underline{U}_2\underline{I}_3^* + \underline{U}_3\underline{I}_3^* \\
&= (\underline{U}_1 - \underline{U}_2)\,\underline{I}_1^* + (\underline{U}_3 - \underline{U}_2)\,\underline{I}_3^* \\
&= \underline{U}_{12}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{32}\underline{I}_3^*
\end{aligned}$$

Es gilt also *bei nicht vorhandenem Neutralleiter*:

$$\boxed{\underline{S} = \underline{U}_{12}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{32}\underline{I}_3^*} \tag{4.18}$$

In dieser Gleichung treten nur noch zwei Ströme und zwei Spannungen auf. Tatsächlich kann man auf diese Weise die komplexe Gesamtleistung $\underline{S}$ als die Summe der komplexen Leistungen von nur noch *zwei* (passiven) Zweipolen interpretieren, wie sie in Abbildung 4.13 gezeigt sind: Der erste Zweipol liegt zwischen L_1 und L_2 und der zweite zwischen L_3 und L_2. Die jeweils zweite Klemme (L_2) der beiden Zweipole ist also identisch. Über L_2 fließt der Summenstrom $\underline{I}_1 + \underline{I}_3 = -\underline{I}_2$ ab. Offenbar ergibt sich also Gleichung 4.18 auch ganz ohne die obige Herleitung direkt aus Abbildung 4.13, und zwar ganz *unabhängig davon, wie die Verbraucherschaltung im Einzelnen aufgebaut ist*. Um die Leistungsaufnahme eines Drehstromverbrauchers zu messen, der *keinen Neutralleiter besitzt*, braucht man also nur die Leistungsmessung an zwei Zweipolen. Darauf beruht die weiter unten

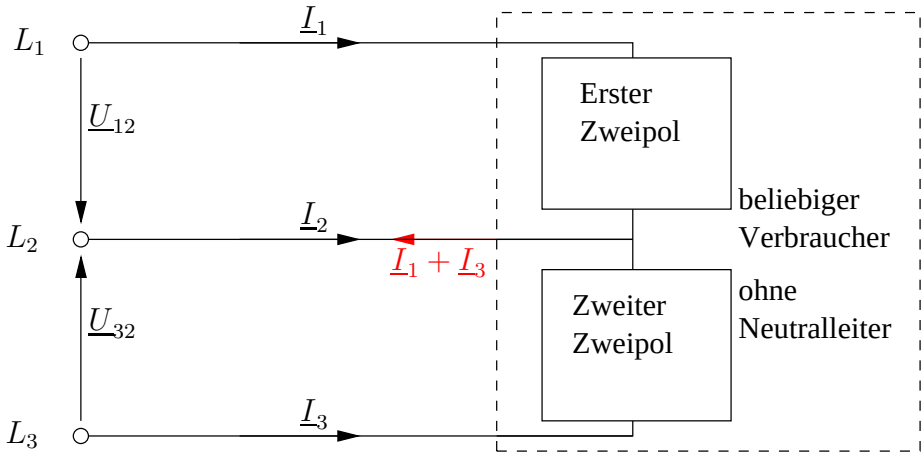


Abbildung 4.13: Interpretation eines Drehstromverbrauchers ohne Neutralleiter als Kombination von zwei Zweipolen.

in Unterabschnitt 4.4.2 beschriebene Aron-Schaltung zur Leistungsmessung.

4.3.5 Symmetrische Verbraucher-Dreieckschaltung

Bei der symmetrischen Verbraucher-Dreieckschaltung in 4.14 ist der Neutralleiter nicht angeschlossen. Wie dort dargestellt, ist jeweils zwischen zwei Leiterklemmen als Verbrau-

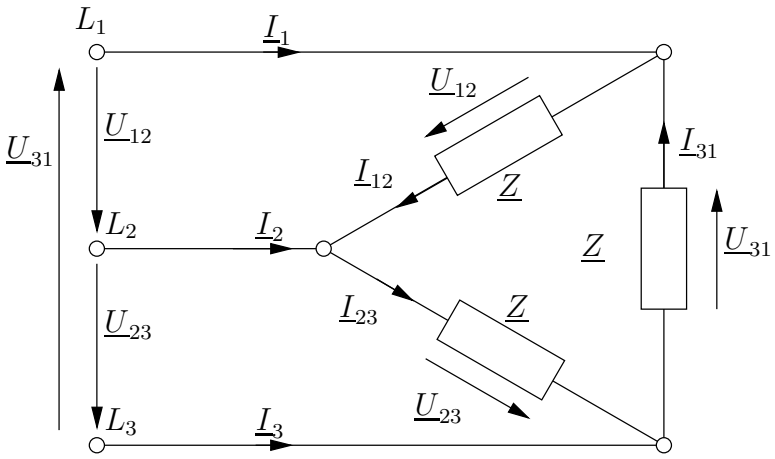


Abbildung 4.14: Symmetrische Verbraucher-Dreieckschaltung.

cher die Lastimpedanz

$$\underline{Z} = Z\mathrm{e}^{j\varphi_Z}$$

geschaltet. An den Verbrauchersträngen liegen also die drei Leiterspannungen $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ und bewirken die **Strangströme**

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}}\,,\ \underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}}\,,\ \underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}}\,. \tag{4.19}$$

Die drei Strangströme bilden also genau so ein Dreieck wie die Leiterspannungen in Abbildung 4.4, allerdings ist dieses Dreieck um den Winkel $-\varphi_Z$ verdreht und um den Faktor Z in der Länge skaliert:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{12} &= \frac{U_\mathsf{L}}{Z}\mathrm{e}^{-j\varphi_Z}\mathrm{e}^{j30^\circ} \\ \underline{I}_{23} &= \frac{U_\mathsf{L}}{Z}\mathrm{e}^{-j\varphi_Z}\mathrm{e}^{-j90^\circ} \\ \underline{I}_{31} &= \frac{U_\mathsf{L}}{Z}\mathrm{e}^{-j\varphi_Z}\mathrm{e}^{j150^\circ} \end{aligned} \tag{4.20}$$

Die **Leiterströme** ergeben sich aus der Knotenregel als

$$\boxed{\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}} \quad \boxed{\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}} \quad \boxed{\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}} \tag{4.21}$$

Die Beträge der Leiterströme sind um den Faktor $\sqrt{3}$ größer als die der Strangströme:

$$I_\mathsf{L} = \sqrt{3} I_{12}$$

In Abbildung 4.15 sind die Strangströme rot eingezeichnet (mit dem willkürlich gewählten

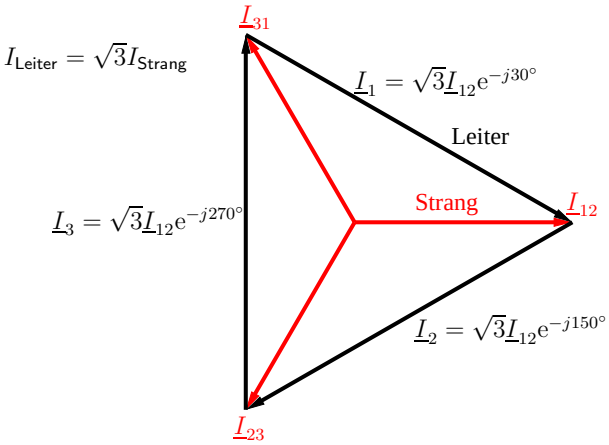


Abbildung 4.15: Die Zeiger der Strangströme (rot) und der Leiterströme (schwarz) bei der symmetrischen Dreieckschaltung.

Winkel $\varphi_Z = 30°$). Die Leiterströme als deren Differenzzeiger sind schwarz eingezeichnet.

Für die Leistung eines jeden der drei Verbraucher gilt:

$$\underline{S}_1 = \underline{S}_2 = \underline{S}_3 = U_\mathsf{L} I_{12} \mathrm{e}^{j\varphi_Z} = \frac{1}{\sqrt{3}} U_\mathsf{L} I_\mathsf{L} \mathrm{e}^{j\varphi_Z}$$

Für die Gesamtleistung

$$\underline{S} = 3\underline{S}_1$$

ergibt sich daraus:

$$\boxed{\underline{S} = \sqrt{3}\, U_\mathsf{L} I_\mathsf{L} \mathrm{e}^{j\varphi_Z}} \tag{4.22}$$

Dies ist die selbe Formel wie Gleichung (4.9) bei der symmetrischen Sternschaltung. Diese Tatsache lässt schon vermuten, dass beide Verbraucher-Schaltungen von außen betrachtet elektrisch äquivalent sind. Dass das wirklich so ist, wird in der folgenden Herleitung der ***Stern-Dreieck-Transformation*** für den Spezialfall einer symmetrischen Last gezeigt.

Transformation einer symmetrischen Dreieckschaltung in eine Sternschaltung

Wie weiter oben in Gleichung (4.6) und Abbildung 4.9 gezeigt wurde, kann man zu den gegebenen drei Außenleitern einen Sternpunkt konstruieren. Wir wenden diese Konstruktion auf die symmetrische Dreieckschaltung an. Für die entsprechenden Sternspannungen gilt nach Gleichung (4.6):

$$\underline{U}_1 = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_{12} - \underline{U}_{31}\right)\,,\ \underline{U}_2 = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_{23} - \underline{U}_{12}\right)\,,\ \underline{U}_3 = \frac{1}{3}\left(\underline{U}_{31} - \underline{U}_{23}\right)$$

Für die Ströme gilt nach Gleichung (4.21):

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}\,,\ \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}\,,\ \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}$$

Bildet man die jeweiligen Quotienten zwischen Spannung und Strom, so ergibt sich:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{U}_3}{\underline{I}_3} = \frac{1}{3}\underline{Z}$$

Dies charakterisiert eine symmetrische Sternschaltung mit Impedanz $\underline{Z}/3$. Es gilt also die

Stern-Dreieck-Transformation für symmetrische Last Die symmetrische Dreieckschaltung in Abbildung 4.14 mit der Impedanz $\underline{Z}_{\triangle}$ ist äquivalent zu der symmetrischen Sternschaltung in Abbildung 4.8 mit der folgenden Impedanz:

$$\underline{Z}_{\star} = \frac{1}{3}\underline{Z}_{\triangle} \tag{4.23}$$

Man kann also von außen nicht erkennen, ob bei der symmetrischen Last in Abbildung 4.16 eine Sternschaltung oder eine Dreieckschaltung realisiert wurde. In beiden Fällen

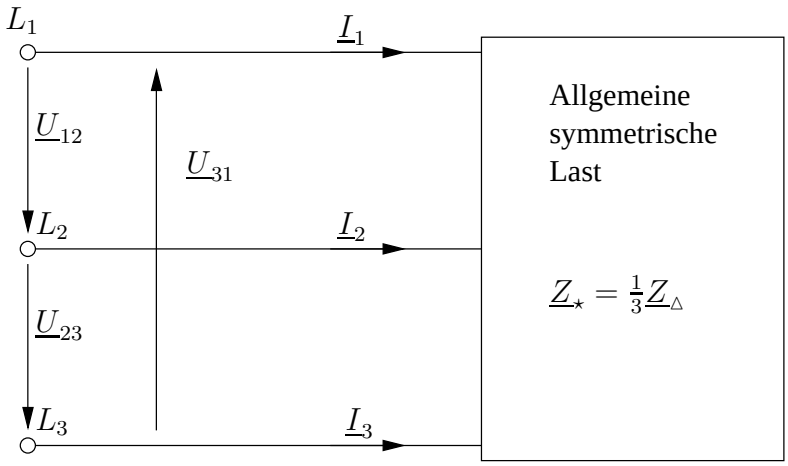


Abbildung 4.16: Darstellung einer allgemeinen symmetrischen Last (Dreieck oder Stern) bei einer Verbraucherschaltung ohne Neutralleiter.

fließen die selben Leiterströme

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= I_{\mathsf{L}} \mathrm{e}^{-j\varphi} \\ \underline{I}_2 &= I_{\mathsf{L}} \mathrm{e}^{-j\varphi} \mathrm{e}^{-j120^\circ} \\ \underline{I}_3 &= I_{\mathsf{L}} \mathrm{e}^{-j\varphi} \mathrm{e}^{+j120^\circ}\,, \end{aligned} \tag{4.24}$$

aus Gleichung (4.8). Hierbei ist φ der Phasenwinkel der Lastimpedanz $\underline{Z}_{\star}$ bzw. $\underline{Z}_{\triangle}$.

4.3.6 Asymmetrische Verbraucher-Dreieckschaltung

Bei der asymmetrischen Verbraucher-Dreieckschaltung, wie sie in Abbildung 4.17 gezeigt ist, liegen verschiedene Lastimpedanzen $\underline{Z}_{12}$, $\underline{Z}_{23}$, $\underline{Z}_{31}$ zwischen den Leiterklemmen. Die **Leiterspannungen** $\underline{U}_{12}$, $\underline{U}_{23}$, $\underline{U}_{31}$ liegen an den Verbrauchersträngen und bewirken die

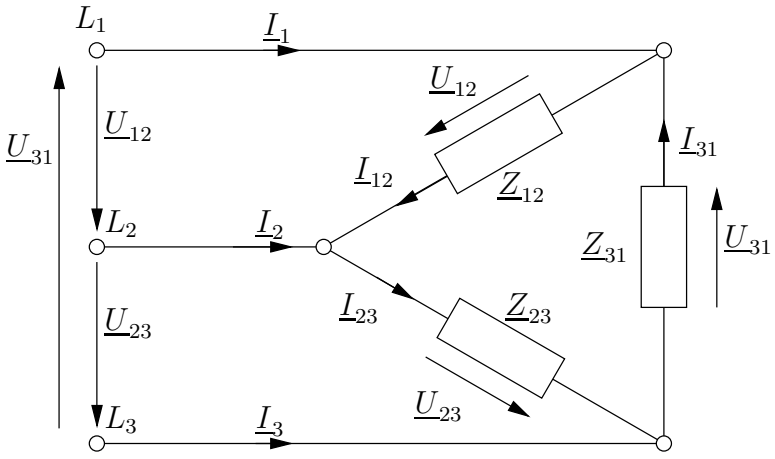


Abbildung 4.17: Asymmetrische Verbraucher-Dreieckschaltung.

Strangströme

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{23}} \mathrm{e}^{-j120^\circ}$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{31}} \mathrm{e}^{-j240^\circ}$$

Die **Leiterströme** ergeben sich wieder als Differenzen

$$\boxed{\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}} \quad \boxed{\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}} \quad \boxed{\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}} \tag{4.25}$$

allerdings ist das entsprechende Zeigerdiagramm nicht mehr so symmetrisch wie in Abbildung 4.15.

Die Leistungen an den drei Verbrauchern sind ebenfalls unterschiedlich:

$$\underline{S}_{12} = \frac{U_\mathrm{L}^2}{\underline{Z}_{12}^*}\,,\ \underline{S}_{23} = \frac{U_\mathrm{L}^2}{\underline{Z}_{23}^*}\,,\ \underline{S}_{31} = \frac{U_\mathrm{L}^2}{\underline{Z}_{31}^*}$$

Für die Gesamtleistung ergibt sich der Ausdruck

$$\boxed{\underline{S} = U_\mathrm{L}^2 \left(\frac{1}{\underline{Z}_{12}^*} + \frac{1}{\underline{Z}_{23}^*} + \frac{1}{\underline{Z}_{31}^*} \right)}$$

bzw.

$$\boxed{\underline{S} = U_{\mathrm{L}}^2 \left(\frac{\mathrm{e}^{j\varphi_{Z12}}}{Z_{12}} + \frac{\mathrm{e}^{j\varphi_{Z23}}}{Z_{23}} + \frac{\mathrm{e}^{j\varphi_{Z31}}}{Z_{31}} \right) .}$$

Man kann die Leistung auch durch die Sternspannungen und Leiterströme ausdrücken. Dazu schreibt man zunächst

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U}_{12}\underline{I}_{12}^* + \underline{U}_{23}\underline{I}_{23}^* + \underline{U}_{31}\underline{I}_{31}^* \\ &= (\underline{U}_1 - \underline{U}_2)\,\underline{I}_{12}^* + (\underline{U}_2 - \underline{U}_3)\,\underline{I}_{23}^* + (\underline{U}_3 - \underline{U}_1)\,\underline{I}_{31}^* \\ &= \underline{U}_1\,(\underline{I}_{12}^* - \underline{I}_{31}^*) + \underline{U}_2\,(\underline{I}_{23}^* - \underline{I}_{12}^*) + \underline{U}_3\,(\underline{I}_{31}^* - \underline{I}_{23}^*) \end{aligned}$$

und erhält mit Gleichung (4.25) den folgenden Ausdruck:

$$\boxed{\underline{S} = \underline{U}_1\underline{I}_1^* + \underline{U}_2\underline{I}_2^* + \underline{U}_3\underline{I}_3^*} \tag{4.26}$$

Dies ist die selbe Formel wie Gleichung (4.11) bei der Sternschaltung mit Neutralleiter und Gleichung (4.17) bei der Sternschaltung ohne Neutralleiter. Wie bei der letzteren kann bei der Dreieckschaltung kein Strom über einen Neutralleiter abfließen. Daher gilt hier ebenfalls

$$\underline{I}_2 = -\underline{I}_1 - \underline{I}_3\,,$$

und mit der selben Herleitung

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U}_1\underline{I}_1^* - \underline{U}_2\underline{I}_1^* - \underline{U}_2\underline{I}_3^* + \underline{U}_3\underline{I}_3^* \\ &= (\underline{U}_1 - \underline{U}_2)\,\underline{I}_1^* + (\underline{U}_3 - \underline{U}_2)\,\underline{I}_3^* \\ &= \underline{U}_{12}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{32}\underline{I}_3^* \end{aligned}$$

ergibt sich die selbe alternative Formel:

$$\boxed{\underline{S} = \underline{U}_{12}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{32}\underline{I}_3^*} \tag{4.27}$$

Man kann also wieder $\underline{S}$ als die Summe der komplexen Leistung von nur noch *zwei* (passiven) Zweipolen interpretieren, wie sie in Abbildung 4.13 gezeigt sind. Nach außen zeigt eine Dreieckschaltung das selbe Verhalten wie eine Sternschaltung ohne Neutralleiter.

Auch für asymmetrische Lasten gibt es eine Stern-Dreieck-Transformation. Deren mathematische Behandlung ist etwas aufwändiger und wird in dieser Vorlesung nicht behandelt.

4.4 Leistungsmessung

4.4.1 Ein-Wattmeter-Methode bei symmetrischer Last

Wir betrachten eine symmetrische Last in Sternschaltung. Es spielt keine Rolle, ob bei der symmetrischen Sternschaltung ein Neutralleiter angeschlossen ist oder nicht, weil durch diesen kein Strom fließt. Ist keiner vorhanden, kann man die oben beschriebene Sternpunktkonstruktion verwenden, um die Sternspannungen zu definieren. Die drei Impedanzen sind identisch, und an jeder ergibt sich die selbe komplexe Leistung $\underline{S}_1 = \underline{S}_2 = \underline{S}_3$. Es reicht also, für einen Leiter die Leistung zu messen. Die Wirkleistung P_1 misst man mit einem Wattmeter. Die Scheinleistung S_1 mit einem Amperemeter und einem Voltmeter, siehe Abbildung 4.18. Es gilt für die Gesamtleistung:

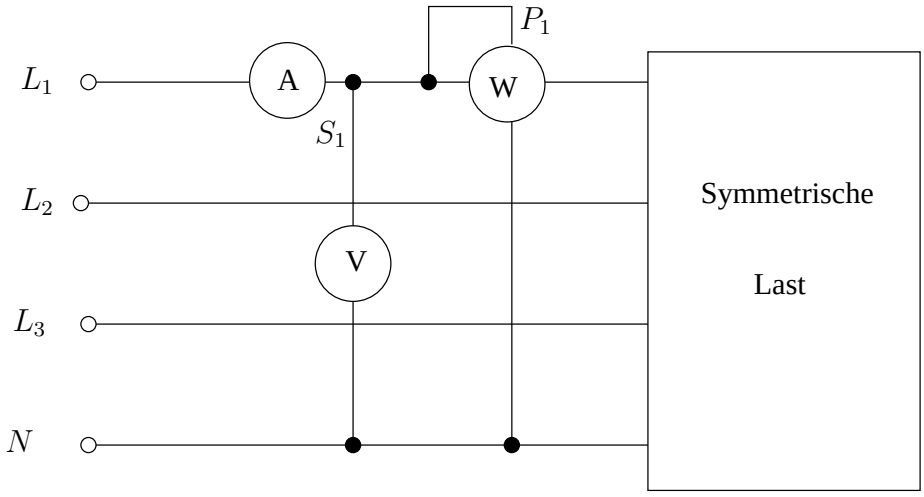


Abbildung 4.18: Schaltbild zur Leistungsmessung mit der Ein-Wattmeter-Methode.

$$S = 3S_1 \text{ und } P = 3P_1$$

Die Blindleistung ergibt sich aus

$$|Q| = \sqrt{S^2 - P^2}\,.$$

Man kann auf diese Weise nicht feststellen, ob die Blindleistung kapazitiv oder induktiv ist.

Eine symmetrische Last in Dreieckschaltung kann man in eine symmetrische Last in Sternschaltung transformieren. Für diese lässt sich deshalb ebenfalls die Ein-Wattmeter-Methode anwenden.

4.4.2 Aron-Schaltung

Wie oben an Hand von Abbildung 4.13 schon erläutert wurde, braucht man bei einer beliebigen asymmetrischen Last bei fehlendem Neutralleiter nur zwei Leistungen zu messen. Die sogenannte **Aron-Schaltung** dazu ist in Abbildung 4.19 gezeigt. Nach Gleichung

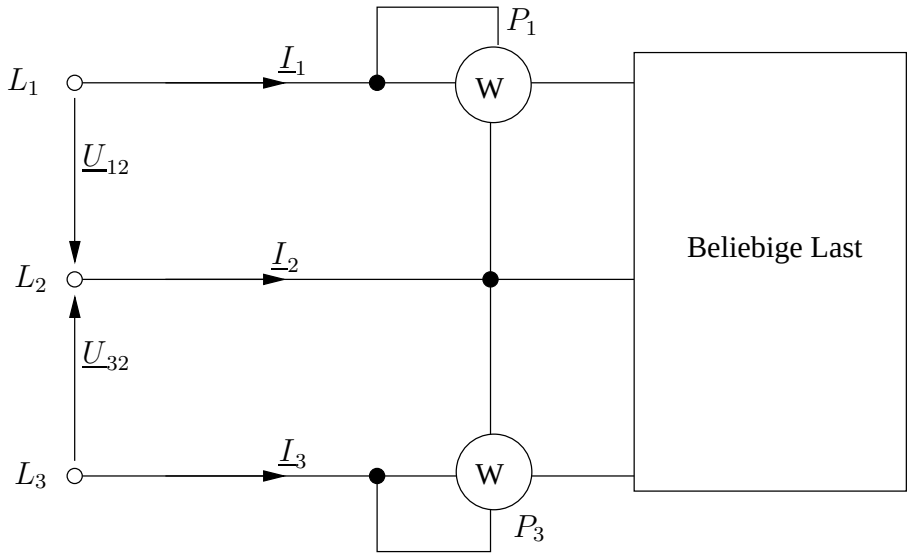


Abbildung 4.19: Leistungsmessung mit der Aron-Schaltung.

(4.18) gilt

$$\underline{S} = \underline{U}_{12}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{32}\underline{I}_3^* \,. \tag{4.28}$$

Mit den Bezeichnungen

$$P_1 = \mathrm{Re}\,\{\underline{U}_{12}\underline{I}_1^*\} \text{ und } P_3 = \mathrm{Re}\,\{\underline{U}_{32}\underline{I}_3^*\}$$

für die von den beiden Wattmetern gemessenen Größen gilt also:

$$\boxed{P = P_1 + P_3} \tag{4.29}$$

Für eine *symmetrische Last in Sternschaltung* mit der Impedanz $\underline{Z} = Z\mathrm{e}^{j\varphi}$ gilt wegen der Gleichungen (4.3) und (4.24):

$$\underline{U}_{12} = U_\mathsf{L}\mathrm{e}^{j30^\circ} \text{ und } \underline{U}_{23} = U_\mathsf{L}\mathrm{e}^{-j90^\circ} \text{ sowie } \underline{I}_1^* = I_\mathsf{L}\mathrm{e}^{j\varphi} \text{ und } \underline{I}_3^* = I_\mathsf{L}\mathrm{e}^{j\varphi}\mathrm{e}^{-j120^\circ}$$

Wir berechnen die Differenz

$$\begin{aligned}
P_1 - P_3 &= \mathrm{Re}\left\{\underline{U}_{12}\underline{I}_1^* - \underline{U}_{32}\underline{I}_3^*\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{\underline{U}_{12}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{23}\underline{I}_3^*\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{U_\mathsf{L}I_\mathsf{L}\mathrm{e}^{j\varphi}\left(\mathrm{e}^{j30^\circ} + \mathrm{e}^{-j90^\circ}\mathrm{e}^{-j120^\circ}\right)\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{U_\mathsf{L}I_\mathsf{L}\mathrm{e}^{j\varphi}\left(\mathrm{e}^{j30^\circ} + \mathrm{e}^{-j150^\circ}\right)\right\} \\
&= \mathrm{Re}\left\{jU_\mathsf{L}I_\mathsf{L}\mathrm{e}^{j\varphi}\right\}
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$P_1 - P_3 = -U_\mathsf{L}I_\mathsf{L}\sin\varphi$$

Wegen Gleichung (4.10) gilt:

$$Q = \mathrm{Im}\left\{\underline{S}\right\} = \sqrt{3}U_\mathsf{L}I_\mathsf{L}\sin\varphi$$

Daraus folgt:

$$\boxed{Q = \sqrt{3}\,(P_3 - P_1)} \tag{4.30}$$

Bemerkungen:

- Diese Formel liefert nicht nur den Betrag der Blindleistung, sondern auch ihr Vorzeichen: Für $P_3 > P_1$ ist die Blindleistung induktiv, für $P_1 < P_3$ kapazitiv.
- Diese Formel gilt nicht nur für eine symmetrische Last in Sternschaltung ohne Neutralleiter, sondern auch für eine symmetrische Last in Dreieckschaltung. Denn beide sind zu einander äquivalent und unterscheiden sich nur im Faktor 3 für die Impedanz. Diese kommt in der Formel nicht mehr explizit vor.

4.4.3 Drei-Wattmeter-Methode

Bei einer asymmetrischen Last mit Neutralleiter, wie sie in Abbildung 4.20 gezeigt ist, werden zur Leistungsmessung drei Wattmeter benötigt. Wenn kein Neutralleiter vorhanden ist, kann man mit den Leitern L_1, L_2, L_3 eine Sternpunktkonstruktion durchführen und so einen Neutralleiter erzeugen. Wie weiter oben (Gleichungen 4.15 und 4.17) gezeigt wurde, gilt

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U}_{Z1}\underline{I}_1^* + \underline{U}_{Z2}\underline{I}_2^* + \underline{U}_{Z3}\underline{I}_3^* \\ &= \underline{U}_1\underline{I}_1^* + \underline{U}_2\underline{I}_2^* + \underline{U}_3\underline{I}_3^* \,. \end{aligned}$$

Das heißt, man kann mit den Spannungen $\underline{U}_1$, $\underline{U}_2$, $\underline{U}_3$ gegenüber dem konstruierten Neutralleiter arbeiten anstelle der Spannungen $\underline{U}_{Z1}$, $\underline{U}_{Z2}$, $\underline{U}_{Z3}$ gegenüber dem Sternpunkt der Verbraucher-Schaltung (welcher i.A. nicht zugänglich ist). Da man auch jede Dreieckschaltung in eine Sternschaltung transformieren kann[6], ist dieser Fall hiermit auch abgedeckt. Bei der Schaltung in Abbildung 4.20 werden die drei Wirkleistungen P_1, P_2, P_3

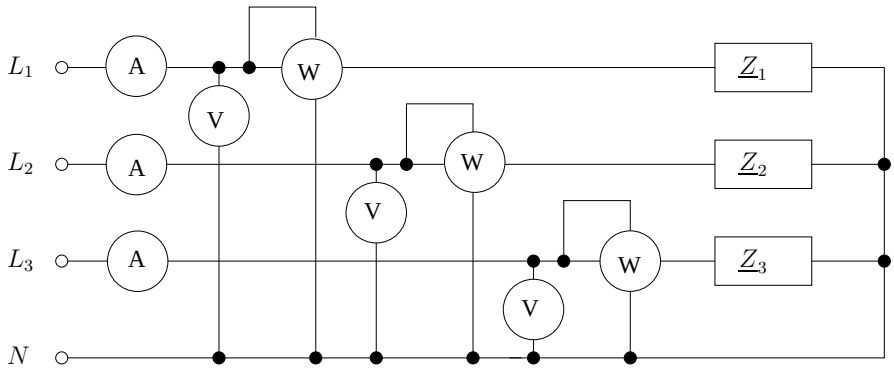


Abbildung 4.20: Schaltbild zur Leistungsmessung mit der Drei-Wattmeter-Methode.

von den drei Wattmetern gemessen. Die drei Scheinleistungen

$$S_1 = U_1 I_1 \text{ und } S_2 = U_2 I_2 \text{ und } S_3 = U_3 I_3$$

[6] Wir haben dies nur für den Spezialfall einer symmetrischen Last gezeigt. Es gilt allgemein auch für asymmetrische Lasten. Ausführlich wird dies bei Moeller behandelt [1].

werden mit den jeweils drei Volt- und Amperemetern gemessen. Die *Beträge* der drei Blindleistungen ergeben sich als

$$|Q_1| = \sqrt{S_1^2 - P_1^2} \text{ und } |Q_2| = \sqrt{S_2^2 - P_2^2} \text{ und } |Q_3| = \sqrt{S_3^2 - P_3^2}\,.$$

Man erhält also nur die Beträge und nicht das Vorzeigen, d.h. man kann nicht erkennen, ob die Last jeweils induktiv oder kapazitiv ist. *Nur wenn bekannt ist, dass alle drei Blindleistungen das selbe Vorzeichen haben*, erhält man den Betrag der gesamten Blindleistung als die Summe

$$|Q| = |Q_1| + |Q_2| + |Q_3|\ .$$

Eine Wirkleistung ist immer positiv. Deshalb ist die gesamte Wirkleistung die Summe der einzelnen Wirkleistungen:

$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

Die gesamte Scheinleistung ergibt sich dann als

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Beachte: S ist nicht die Summe der einzelnen Scheinleistungen S_1, S_2, S_3. Das gilt nur für die komplexen Größen:

$$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3$$

Für die (reelle) Scheinleistung $S = |\underline{S}|$ gilt

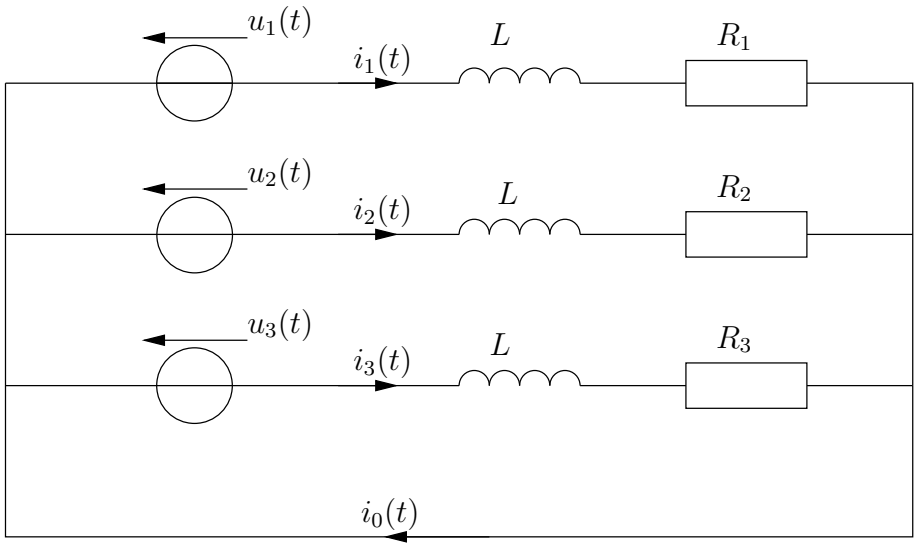
$$S \leq S_1 + S_2 + S_3\,.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn die Phasen gleich sind.

Aufgaben zu Kapitel 4

Aufgabe 4.1

Die unten stehende asymmetrische Sternschaltung mit Neutralleiter wird aus einem Drehstromnetz gespeist.



$$R_1 = 100\,\Omega\,,\ R_2 = 200\,\Omega\,,\ R_3 = 400\,\Omega\,,\ L = 0,63662\,\mathrm{H}$$

Der Zeitverlauf der Spannung $u_1(t)$ ist gegeben durch

$$u_1(t) = 135\,\mathrm{V}\cos\left(\omega t + 60^\circ\right) \text{ mit } f = 50\,\mathrm{Hz}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Zeitverläufe der Ströme $i_1(t)$, $i_2(t)$, $i_3(t)$ und $i_0(t)$.

(b) Wie groß sind Schein-, Wirk- und Blindleistung der Schaltung?

Aufgabe 4.2

Ein 400V-Drehstromnetz wird mit einer asymmetrischen Last

$$\underline{Z}_{12} = 20\,\Omega\,,\ \underline{Z}_{23} = -j20\,\Omega\,,\ \underline{Z}_{31} = j20\,\Omega$$

in Dreieckschaltung belastet. Die Spannung $\underline{U}_1$ ist rein reell.

(a) Zeichnen Sie das Ersatzschaltbild.

(b) Berechnen Sie die komplexen Strang- und Leiterströme und deren Beträge.

(c) Berechnen Sie Schein-, Wirk- und Blindleistung.

(d) Führen Sie die Berechnungen aus (b) und (c) für ein 380V-Netz mit dem folgenden Parametersatz durch:

$$\underline{Z}_{12} = 4\,\Omega\,,\ \underline{Z}_{23} = 6\,\Omega\,,\ \underline{Z}_{31} = 8\,\Omega$$

Aufgabe 4.4

Bei einem 400V-Drehstromnetz der Frequenz 50 Hz werden mittels der Aron-Schaltung an einer symmetrischen, sternförmigen Last ohne Neutralleiter die Leistungen

$$P_{12} = 10\,\mathrm{kW} \text{ bzw. } P_{32} = 25\,\mathrm{kW}$$

zwischen Leiter 1 und 2 bzw. 3 und 2 gemessen.

(a) Handelt es sich um eine induktive oder um eine kapazitive Last? Begründen Sie Ihre Antwort und zeichnen Sie das Schaltbild.

(b) Berechnen Sie die Wirk-, Blind- und Scheinleistung der Last sowie den Leiterstrom I.

(c) Berechnen Sie den Wirkwiderstand R sowie die Induktivität L bzw. die Kapazität C der Last.

5 Ausgleichsvorgänge

5.1 Grundlagen und Beispiele

Als **Ausgleichsvorgang** bezeichnet man den zeitlichen Verlauf einer elektrischen Größe (Strom oder Spannung) zwischen einem ***Schaltzeitpunkt*** und einem ***eingeschwungenen*** (oder ***stationären***) Zustand. Der eingeschwungene Zustand ist der Zustand im Grenzfall *unendlich langer Zeit* nach dem Schaltvorgang. Wir betrachten hier ausschließlich das Ein- oder Umschalten einer Gleichspannung (bzw. eines Gleichstroms) oder einer monofrequenten Wechselspannung (bzw. eines Wechselstroms). Im **eingeschwungenen** oder **stationären Zustand** sind die elektrischen Größen dann entweder konstant oder monofrequente Schwingungen. Eingeschwungene Zustände lassen sich also entweder mit Gleichstromrechnung oder mit komplexer Wechselstromrechnung berechnen.

An zwei Beispielen soll dies erläutert werden. Hierbei beschreiben wir zunächst nur die Berechnungsmethode und verschieben die mathematischen Begründungen auf später.

5.1.1 Kondensator mit Gleichspannungsquelle

Wir betrachten die in Abbildung 5.1 gezeigte Schaltung mit Kondensator und Wider-

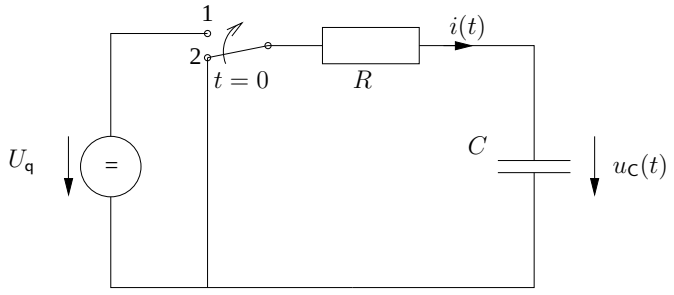


Abbildung 5.1: Schaltung aus Kondensator und Widerstand mit Gleichspannungsquelle (Schalterstellung 1) bzw. mit Kurzschluss (Schalterstellung 2).

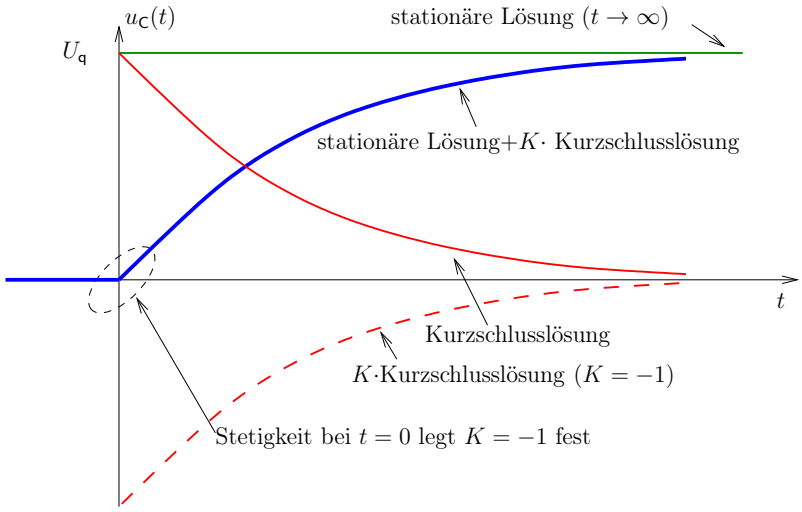


Abbildung 5.2: Zusammensetzung eines Ausgleichsvorgangs am Beispiel: Schaltung aus Kondensator und Widerstand beim Einschalten einer Gleichspannungsquelle.

stand. Vor dem Schaltzeitpunkt (d.h. für $t < 0$) befindet sich der Schalter in Stellung 2, und der Kondensator ist entladen. Damit gilt $u_C(t) = 0$. Danach (d.h. für $t \geq 0$) befindet sich der Schalter in Stellung 1, und der Kondensator wird durch die Gleichspannung U_q über den Widerstand R aufgeladen. Der gesuchte **Ausgleichsvorgang** ist der *Aufladevorgang*, d.h. der Zeitverlauf $u(t) = u_C(t)$ der Spannung beim Aufladen des Kondensators. Der Zeitverlauf der Spannung ist als blaue Kurve in Abbildung 5.2 dargestellt. Für sehr große Zeiten nähert sie sich asymptotisch dem **stationären Zustand**

$$u_s(t) = U_q$$

des vollständig aufgeladenen Kondensators. Diese Asymptote ist als grüne Halbgerade dargestellt.

Im Folgenden wird beschrieben, wie man den Aufladevorgang berechnen kann.

Zunächst einmal betrachten wir den Schaltzeitpunkt $t = 0$. Vor dem Schalten für $t < 0$ ist der Kondensator vollständig entladen, d.h. $u(t) = 0$. Unmittelbar nach dem Schalten ist der Kondensator immer noch entladen. Andernfalls müsste ein unendlich großer Strom fließen, der eine Ladung in unendlich kurzer Zeit auf den Kondensator transportiert. Das ist physikalisch nicht möglich. Mathematisch kann man diese Bedingung als *rechtsseitigen*

Grenzwert schreiben (siehe Vorlesung *Ingenieurmathematik 1* [8]):

$$\lim_{t \searrow 0} u(t) = 0 \tag{5.1}$$

In der Elektrotechnik ist hierfür folgende Schreibweise üblich:

$$u(0^+) = 0 \tag{5.2}$$

Für den linksseitigen Grenzwert schreibt man entsprechend $u(0^-)$. Für die Kondensatorspannung gilt also

$$u(0^+) = u(0^-) = 0\,,$$

und man darf einfach

$$u(0) = 0 \tag{5.3}$$

schreiben. Mathematisch ausgedrückt: Die Kondensatorspannung ist eine *stetige Funktion.*

Für große Zeiten nähert sich der Spannungsverlauf der grün eingezeichneten Asymptote für die Spannung des geladenen Kondensators:

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = U_{\mathsf{q}} \tag{5.4}$$

Nun muss für $t \geq 0$ die richtige Funktion $u(t)$ gefunden werden, die den Punkt $u(0) = 0$ mit der grünen Asymptote verbindet, das heißt die beiden Bedingungen (5.3) und (5.4) erfüllt. Wie später noch genauer begründet wird, erhält man diesen Übergang auf folgende Weise mit Hilfe der Funktion für die ***Kondensator-Entladung***: Wenn man bei vollständig aufgeladenem Kondensator zur Zeit $t = 0$ in Abbildung 5.1 von Stellung 1 in Stellung 2 schaltet, so entlädt sich der Kondensator. Hierbei wird also die Spannungsquelle deaktiviert, indem man sie durch einen Kurzschluss ersetzt. Der Zeitverlauf der Kondensatorentladung ist gegeben durch die abfallende Exponentialfunktion

$$u_{\mathsf{f}}\,(t) = U_{\mathsf{q}} \mathrm{e}^{-t/\tau} \text{ mit } \tau = RC\,. \tag{5.5}$$

Die Begründung dafür, dass die Kondensator-Entladung gerade durch diese Funktion beschrieben wird, erfolgt an späterer Stelle. Dieser exponentiell abklingende **flüchtige Vorgang** der Kondensator-Entladung (die **Kurzschlusslösung**) ist als rote Kurve in

Abbildung 5.2 eingezeichnet und beschreibt die ***verbleibende Abweichung zum endgültigen stationären Zustand***. Die zeitabhängige Spannung am Kondensator erhält man dann als Linearkombination der stationären Lösung und der flüchtigen Lösung:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_{\mathsf{s}}(t) + K \cdot u_{\mathsf{f}}(t) \\ &= U_{\mathsf{q}} + K \cdot U_{\mathsf{q}} \mathrm{e}^{-t/\tau} \end{aligned}$$

Hierbei muss die Konstante K noch so gewählt werden, dass die Anfangsbedingung $u(0) = 0$ erfüllt ist. Es muss also gelten:

$$0 = U_{\mathsf{q}} + K \cdot U_{\mathsf{q}}$$

Aus dieser Bedingung folgt $K = -1$. Der Kondensator-Aufladung wird also durch die Funktion

$$u(t) = U_{\mathsf{q}} \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \tag{5.6}$$

beschrieben. Das folgende Beispiel zeigt, wie sich das gleiche Verfahren auch für das Einschalten einer Wechselspannung anwenden lässt.

5.1.2 Kondensator mit Wechselspannungsquelle

Wir betrachten jetzt die selbe Schaltung wie oben, allerdings wird zur Zeit $t = 0$ anstatt einer Gleichspannungsquelle eine Wechselspannungsquelle

$$u_{\mathsf{q}}(t) = \sqrt{2}\, U_{\mathsf{q}} \cos(\omega t + \varphi_{\mathsf{q}})$$

eingeschaltet. Abbildung 5.3 zeigt die Schaltung. Die Berechnung der Spannung $u_{\mathsf{C}}(t)$ für $t \geq 0$ erfolgt nach den gleichen Prinzipien wie bei dem obigen Beispiel einer eingeschalteten Gleichspannungsquelle. Allerdings ist der stationäre Zustand jetzt nicht mehr konstant, sondern eine harmonische Schwingung. Der Übersichtlichkeit halber gliedern wir das eben für die Gleichspannungsquelle beschriebene Verfahren zur Berechnung des Ausgleichsvorgangs in drei Schritte.

Schritt 1: Der stationäre Zustand ergibt sich aus der Wechselstromrechnung. Für dieses Beispiel wurde die Rechnung bereits in Abschnitt 1.4 durchgeführt. Wir schreiben

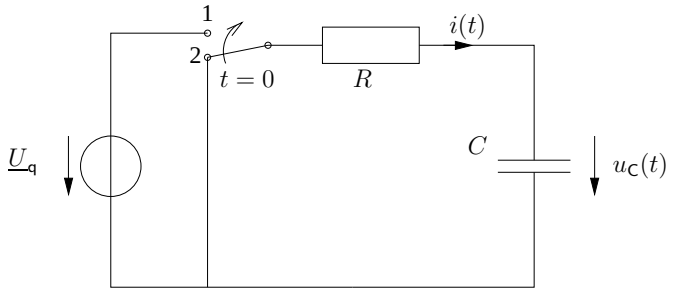


Abbildung 5.3: Schaltung aus Kondensator und Widerstand mit Wechselspannungsquelle (Schalterstellung 1) bzw. mit Kurzschluss (Schalterstellung 2).

wieder

$$\underline{U}_\mathsf{q} = U_\mathsf{q} \mathrm{e}^{j\varphi_\mathsf{q}}$$

für den Zeiger der Quelle. Nach Gleichung (1.30) lautet der Spannungszeiger am Kondensator:

$$\underline{U}_\mathsf{C} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \underline{U}_\mathsf{q} \text{ mit } \tau = RC$$

Das zugehörige Zeitsignal für den eingeschwungenen Zustand ist dann:

$$\begin{aligned} u_\mathsf{s}(t) &= \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{1 + j\omega\tau} U_\mathsf{q} \mathrm{e}^{j\varphi_\mathsf{q}} \mathrm{e}^{j\omega t} \right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}\,U_\mathsf{q}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \cos(\omega t + \varphi_\mathsf{q} - \varphi) \text{ mit } \varphi = \arctan(\omega\tau) \end{aligned}$$

Dieses Signal ist als grüne Kurve im Abbildung 5.4 eingezeichnet.

Schritt 2: Der flüchtige Vorgang hängt überhaupt nicht von der Art der angelegten Spannungsquelle ab. Hier kann man also das Ergebnis des vorigen Beispiels übernehmen, denn die Kondensatorentladung ist die selbe. Wir schreiben diesmal

$$u_\mathsf{f}(t) = \frac{\sqrt{2}\,U_\mathsf{q}}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} \mathrm{e}^{-t/\tau} \text{ mit } \tau = RC\,,$$

wobei hier der etwas andere Vorfaktor willkürlich so gewählt ist, dass es möglichst einfach wird und man eine schöne Kurve zeichnen kann. Wir nehmen hier also an, dass die

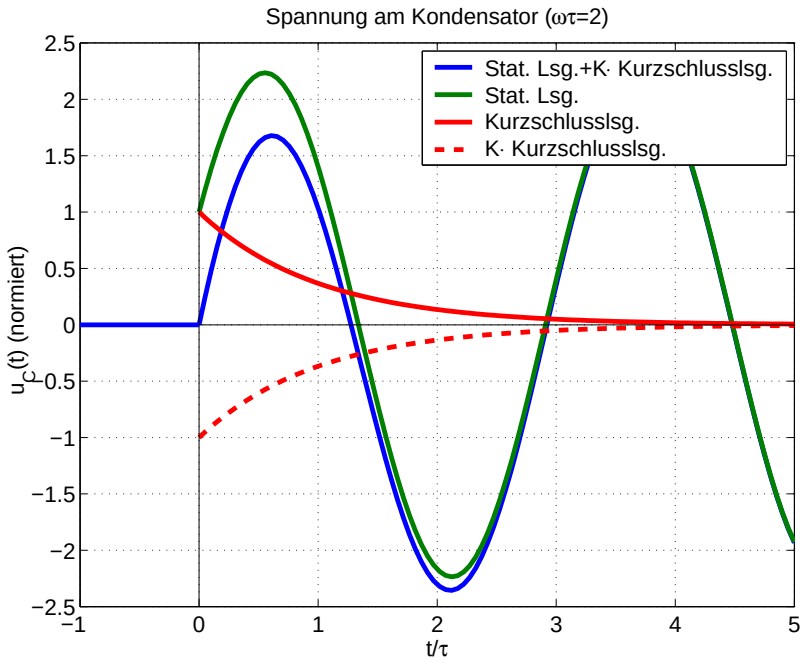


Abbildung 5.4: Zusammensetzung eines Ausgleichsvorgangs am Beispiel: Schaltung aus Kondensator und Widerstand beim Einschalten einer Wechselspannungsquelle. Die Kreisfrequenz ω und die Zeitkonstante τ wurden für diesen Plot so gewählt, dass $\omega\tau = 2$ gilt. Für diese Kombination der Werte wird der eingschwungene Zustand praktisch schon nach etwa einer Periode erreicht.

Kondensatorspannung zur Zeit $t = 0$ den Wert

$$\frac{\sqrt{2}\,U_\mathrm{q}}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

hat. Diese Kurzschlusslösung ist in Abbildung 5.4 als rote Kurve eingezeichnet. Man hätte aber auch einfach den Vorfaktor 1V wählen können, d.h. $u_\mathrm{f}(t) = 1\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Dann würde sich nur die rote Kurve nicht so schön in das Bild einfügen.

Schritt 3: Die Linearkombination des stationären Zustands und des flüchtigen Vorgangs

$$u(t) = u_\mathrm{s}(t) + K \cdot u_\mathrm{f}(t)$$

ergibt

$$u(t) = \frac{\sqrt{2}\,U_{\mathsf{q}}}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \left(\cos\left(\omega t + \varphi_{\mathsf{q}} - \varphi\right) + K \cdot \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$$

Hierbei muss die Konstante K noch so gewählt werden, dass die Anfangsbedingung $u(0) = 0$ erfüllt ist. Dies führt auf

$$K = -\cos\left(\varphi_{\mathsf{q}} - \varphi\right) ,$$

und die in Abbildung 5.4 blau gezeichnete Lösung

$$u\,(t) = \frac{\sqrt{2}U_{\mathsf{q}}}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \left(\cos\left(\omega t + \varphi_{\mathsf{q}} - \varphi\right) - \cos\left(\varphi_{\mathsf{q}} - \varphi\right) \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) , \tag{5.7}$$

die den Zeitverlauf der Kondensatorspannung beim Einschalten der Wechselspannung zeigt. Der Einfachheit halber wurde für die Phase der Quellspannung $\varphi_{\mathsf{q}} = 0$ gesetzt. Die grüne Kurve für die stationäre Lösung aus Schritt 1 ist gegenüber dieser reinen Kosinus-Schwingung um $\varphi = \arctan\left(\omega\tau\right)$ phasenverzögert. Die Kondensatorentladung (Kurzschlusslösung) aus Schritt 2 ist rot eingezeichnet. Die Konstante K muss so gewählt werden, dass die Überlagerung $u(t)$ bei $t = 0$ verschwindet. Wenn man die rote Kurve umklappt und durch die gestrichelte rote ersetzt, ist dies der Fall. Die Überlagerung ergibt dann die blaue Kurve. Man sieht, dass bei der hier gewählten Parameterkombination $\omega\tau = 2$ schon nach etwa einer Schwingungsperiode der eingeschwungene Zustand praktisch erreicht ist.

5.1.3 Schaltgesetze

Um Ausgleichsvorgänge zu beschreiben, muss man verstehen, wie sich Strom und Spannung an den Bauteilen zum Schaltzeitpunkt verhalten. In den beiden obigen Beispielen wird dadurch die Konstante K in der Linearkombination

$$u(t) = u_{\mathsf{s}}\,(t) + K \cdot u_{\mathsf{f}}\,(t)$$

von stationärem Zustand und flüchtigem Vorgang festgelegt. Im ersten Beispiel haben wir schon anschaulich begründet, dass beim Schalten die Spannung am Kondensator stetig sein muss. Wir formulieren jetzt allgemein **Schaltgesetze** für Kondensator und Spule.

Schaltgesetze:

1. Das Zeitsignal der Spannung am Kondensator verläuft stetig und macht keine Sprünge
2. Das Zeitsignal des Stromes an der Spule verläuft stetig und macht keine Sprünge

Folgerungen aus den Schaltgesetzen:

1. Ein **ungeladener Kondensator** verhält sich unmittelbar nach dem Anlegen einer Spannung zunächst wie ein **Kurzschluss**:

   $$u(t) = 0 \text{ für } t < 0 \;\Rightarrow\; u(0^+) = 0$$

   Ein **geladener Kondensator** (mit der Spannung $U_{\mathsf{C}0}$) verhält sich unmittelbar nach dem Anlegen einer Spannung zunächst wie eine **Gleichspannungsquelle**

   $$u(t) = U_{\mathsf{C}0} \text{ für } t < 0 \;\Rightarrow\; u(0^+) = U_{\mathsf{C}0}$$

2. Eine **ungeladene Spule** (d.h. eine Spule, durch die kein Strom fließt) verhält unmittelbar nach dem Einschalten eines Stromes zunächst wie ein **Leerlauf**:

   $$i(t) = 0 \text{ für } t < 0 \;\Rightarrow\; i(0^+) = 0$$

   Eine **geladene Spule** (d.h. eine Spule, durch die der Strom $I_{\mathsf{L}0}$ fließt) verhält unmittelbar nach dem Einschalten eines Stromes zunächst wie ein **Gleichstromquelle**

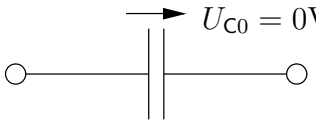
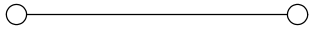
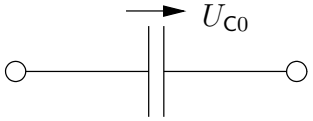
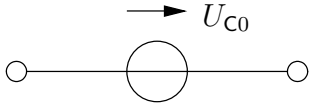
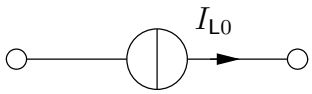
   $$i(t) = I_{\mathsf{L}0} \text{ für } t < 0 \;\Rightarrow\; i(0^+) = I_{\mathsf{L}0}$$

In Tabelle 5.1 sind diese Regeln zusammen gefasst.

Begründung der Schaltgesetze: Üblicherweise wird in der elektrotechnischen Literatur zur Begründung der Schaltgesetze physikalisch folgendermaßen argumentiert (siehe z.B. [1], Seite 520)[1]:

[1] Auch wenn diese Begründungen aus theoretische Sicht nicht sehr befriedigend sind, wird auf dieses Thema hier nicht weiter eingegangen.

Tabelle 5.1: Verhalten von Kondensatorspannung $u(0^+)$ bzw. Spulenstrom $i(0^+)$ unmittelbar nach dem Schaltzeitpunkt

Element	verhält sich wie (ein/eine)
ungeladener Kondensator 	Kurzschluss 
geladener Kondensator 	Gleichspannungsquelle 
stromfreie Spule	Leerlauf
stromdurchflossene Spule	Gleichstromquelle 

1. Am Kondensator gilt

$$C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u = i\,.$$

Ein Spannungssprung am Kondensator würde also einen unendlich großen Strom verursachen und ist deshalb physikalisch nicht möglich.

2. An der Spule gilt

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i = u$$

Ein Stromsprung an der Spule würde also eine unendlich großen Spannung verursachen und ist deshalb physikalisch nicht möglich.

Ein Beispiel zu den Schaltgesetzen: Wir betrachten als Beispiel die Schaltung in Abbildung 5.5 mit einer Gleichstromquelle $I_q > 0$. Für $t < 0$ ist der Schalter geöffnet und

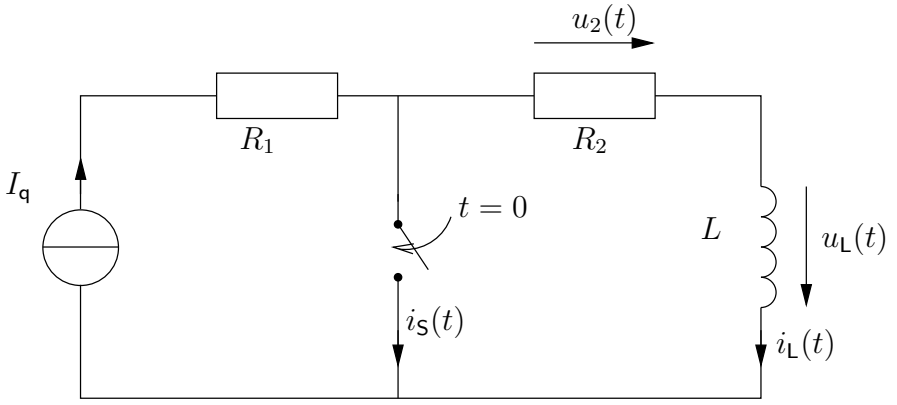


Abbildung 5.5: Beispiel zur Erläuterung des Schaltgesetzes für eine Induktivität.

für $t \geq 0$ geschlossen. Für $t < 0$ gilt für den Spulenstrom $i_L(t) = I_q$. Unmittelbar nach dem Schließen des Schalters fließt immer noch der selbe Strom durch die Spule:

$$i_L(0^+) = I_q$$

Die Spule wirkt also wie eine Stromquelle mit dem Quellstrom I_q. Aus der Knotenregel folgt für den Strom durch den geschlossenen Schalter:

$$i_S(0^+) = 0$$

Also fließt hier unmittelbar nach dem Schaltvorgang kein Strom, – obwohl ein Kurzschluss vorliegt. Die induzierte Spannung $u_L(0^+)$ an der Spule ist negativ. Das Vorzeichen ergibt sich aus der Maschenregel für die Masche aus R_2, L und dem Schalter:

$$u_2(0^+) + u_L(0^+) = 0$$

$$R_2 I_q + u_L(0^+) = 0$$

$$u_L(0^+) = -R_2 I_q$$

Aus $I_q > 0$ folgt $u_L(0^+) < 0$. Die *Spannung* an der Spule *springt* also von $u_L(t) = 0$ für $t < 0$ auf einen negativen Wert $u_L(t) < 0$ für $t = 0^+$.

Wie an späterer Stelle gezeigt wird, gilt für die Entladung der Spule über den Widerstand R_2 (für $t \geq 0$ bei geschlossenem Schalter) ebenso wie bei der Kondensator-Entladung ein

Exponentialgesetz:

$$i_{\mathsf{L}}(t) = I_{\mathsf{q}} \mathrm{e}^{-t/\tau} \text{ mit } \tau = L/R_2$$

Der Spannungsverlauf an der Spule ergibt nach dem Induktionsgesetz für $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} u_{\mathsf{L}}(t) &= L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i(t) \\ &= -\frac{L}{\tau} I_{\mathsf{q}} \mathrm{e}^{-t/\tau} \\ &= -R_2 I_{\mathsf{q}} \mathrm{e}^{-t/\tau} \end{aligned}$$

Also gilt:

$$i_{\mathsf{L}}(t) = \begin{cases} I_{\mathsf{q}} & : \ t < 0 \\ I_{\mathsf{q}} \mathrm{e}^{-t/\tau} & : \ t \geq 0 \end{cases}$$

$$u_{\mathsf{L}}(t) = \begin{cases} 0 & : \ t < 0 \\ -R_2 I_{\mathsf{q}} \mathrm{e}^{-t/\tau} & : \ t \geq 0 \end{cases}$$

Diese Zeitsignale sind in Abbildung 5.6 skizziert.

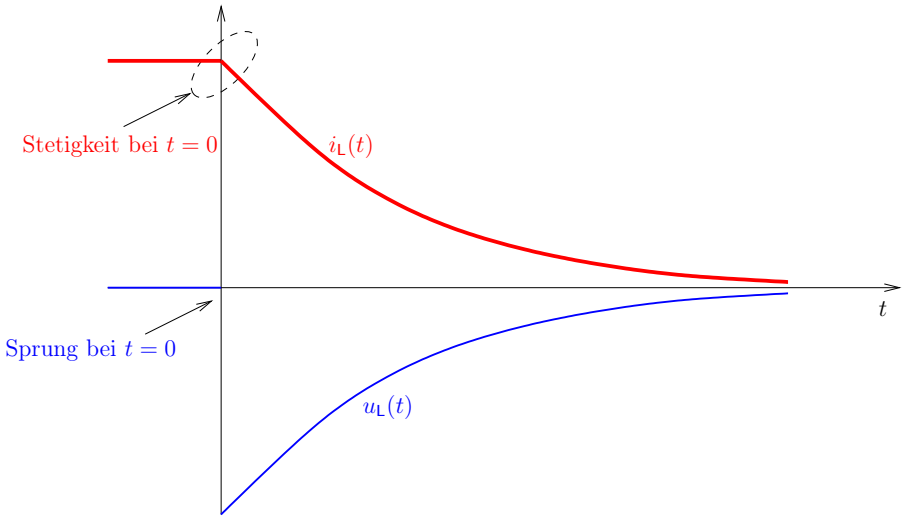


Abbildung 5.6: Der Zeitverlauf von Strom und Spannung an der Induktivität der Schaltung in Abbildung 5.5.

5.2 Ausgleichsvorgänge 1. Ordnung

Wir bezeichnen Ausgleichsvorgänge, bei denen nur ***ein Energiespeicher*** vorkommt, als ***Ausgleichsvorgänge 1. Ordnung***. Unter einem Energiespeicher versteht man eine Kapazität C oder eine Induktivität L. Ein Ohmscher Widerstand ist kein Energiespeicher.

Kapazitäten und Induktivitäten können Energie speichern. Eine Kapazität C , an der die Spannung U liegt, hat die Energie

$$E_{\mathsf{C}} = \frac{1}{2} C U^2 \tag{5.8}$$

gespeichert. Eine Induktivität L, durch die der Strom I fließt, hat die Energie

$$E_{\mathsf{L}} = \frac{1}{2} L I^2 \tag{5.9}$$

gespeichert.

Beiden Energiespeichern ist gemeinsam, dass bei der Beziehung zwischen dem zeitabhängigen Strom $i(t)$ und der zeitabhängigen Spannung $u(t)$ eine Ableitung vorkommt. Für den Kondensator gilt

$$i = C \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u \,,$$

und für die Spule gilt

$$u = L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i \,.$$

Wenn man nun mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze eine Schaltung mit einem Energiespeicher berechnen und eine Gleichung für den Strom oder für die Spannung hinschreibt, so taucht darin immer *eine* Ableitung der gesuchten Größe auf. Eine solche Gleichung bezeichnet man als **Differentialgleichung**. Im Folgenden zeigen wir an Hand der beiden einfachsten Beispiele, wie die Kirchhoffschen Gesetze auf eine Differentialgleichung führen und wie man diese Differentialgleichung löst. Wir zeigen außerdem, dass sich alle Schaltungen mit *nur einem* Energiespeicher durch *eben diese* eine Differentialgleichung 1. Ordnung beschreiben lassen. Dies vereinfacht die Behandlung natürlich sehr, und man braucht gar nicht so tief in die Theorie der Differentialgleichungen einzusteigen.

5.2.1 RC-Reihenschaltung

Das erste Beispiel ist die Reihenschaltung von Kondensator und Widerstand, wie sie in Abbildung 5.7 dargestellt ist. Die Anregung kann beim Aufstellen der Differential-

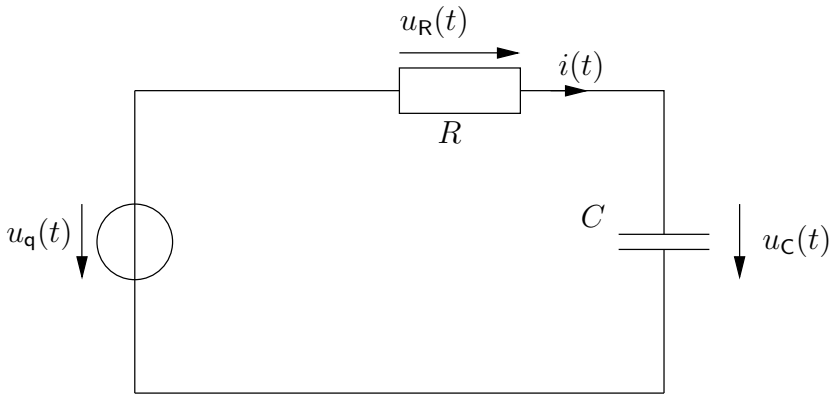


Abbildung 5.7: Schaltung aus Kondensator und Widerstand und einer idealen Spannungsquelle mit *allgemeiner* Zeitabhängigkeit $u_q(t)$.

gleichung eine beliebige Quellenspannung $u_q(t)$ sein. Konkret betrachten wir bei Ausgleichsvorgängen aber nur das Ein- oder Umschalten einer Gleich- oder Wechselspannung. Gesucht ist die zeitabhängige Spannung $u(t) = u_C(t)$ am Kondensator. Es gilt:

$$u_R + u_C = u_q$$

Aus

$$u_R = Ri$$

und

$$i = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_C$$

folgt:

$$RC\dot{u}_C + u_C = u_q$$

Wir definieren wieder die Zeitkonstante

$$\tau = RC$$

und erhalten für die gesuchte Spannung $u = u_\mathsf{C}$ die Differentialgleichung

$$\boxed{\tau\dot{u} + u = u_\mathsf{q}}\,. \tag{5.10}$$

Dies ist eine lineare inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Diese Begriffe zur Charakterisierung einer Differentialgleichung werden im Folgenden erläutert.

Charakterisierung der Differentialgleichung:

- **Linear,** d.h. die gesuchte Spannung u und ihre Ableitung(en) kommen nur linear vor (und nicht z.B. quadratisch): Auf der linken Seite von der Differentialgleichung (5.10) steht eine ***Linearkombination*** von u und $\dot{u}$.
- **Inhomogen,** d.h. die Inhomogenität u_q (Quelle) ist nicht null. Wenn man die Quelle deaktiviert (d.h. $u_\mathsf{q} = 0$ setzt und damit die Spannungsquelle durch einen Kurzschluss ersetzt), erhält man die **homogene Differentialgleichung**

  $$\tau\dot{u} + u = 0 \tag{5.11}$$

  der Kondensatorentladung. Die Lösung $u_\mathsf{h}(t)$ dieser homogenen Differentialgleichung bezeichnet man auch als *flüchtige Spannung* $u_\mathsf{f}(t)$.
- **1. Ordnung,** d.h. es kommt nur die 1. Ableitung $\dot{u}$ der gesuchten Größe u vor (und keine höheren Ableitungen).
- **Konstante Koeffizienten,** d.h. alle Vorfaktoren von u und $\dot{u}$ (hier ist τ der einzige) sind zeitlich konstant.

Aus der Mathematik ist bekannt (siehe z.B. [7]): Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung (5.10) ist die Summe einer speziellen Lösung u_s der Differentialgleichung (5.10) und der allgemeinen Lösung u_h der homogenen Differentialgleichung (5.11):

$$u = u_\mathsf{s} + K u_\mathsf{h}\,,\ K = konst\,.$$

Wir betrachten nun den Fall, dass zur Zeit $t = 0$ geschaltet wird und die Quelle für $t \geq 0$ entweder eine Gleichspannung oder eine Wechselspannung erzeugt. Die Vorgehensweise zur Lösung der Differentialgleichung (5.10) lässt sich in drei Schritte aufteilen. Dies ist genau die Vorgehensweise, die wir in den Unterabschnitten 5.1.1 und 5.1.2 – zunächst

ohne Begründung – vorgestellt haben. Hier kommt nun die Begründung mit Hilfe der Theorie der Differentialgleichungen.

1. Spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung: Es reicht, *eine einzige* spezielle Lösung $u_{\mathsf{s}}(t)$ der inhomogenen Gleichung zu finden. In der Mathematik lernt man dazu das Verfahren der *Variation der Konstanten*, welches für lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung immer funktioniert. Wir verweisen hierzu auf das Studienbuch *Ingenieurmathematik 2* [7], wo als Beispiel für dieses Verfahren genau die Differentialgleichung (5.10) gelöst wird. Dort wird auch erwähnt, dass man die spezielle Lösung natürlich auch raten darf. In dieser Vorlesung tun wir dies praktisch immer. Denn das *Lösungsraten* ist für den Ingenieur die einfachere Methode, weil man sich vorstellen kann, was elektrisch passiert: Die spezielle Lösung u_{s} ist der stationäre (eingeschwungene) Zustand. Dieser lässt sich – je nach Anregung – mit Gleichstrom- oder Wechselstromrechnung finden.

2. Lösung der homogenen Gleichung: Die homogene Gleichung (5.11) beschreibt die deaktivierte (kurzgeschlossene) Spannungsquelle, d.h. $u_{\mathsf{q}} = 0$. Sie beschreibt die Situation, dass der aufgeladene Kondensator in Abbildung 5.1 durch Umlegen des Schalters entladen wird. Die Bedingung

$$u = -\tau \dot{u}$$

für die Spannung beim Entladen des Kondensators wird offenbar von der abfallenden Exponentialfunktion

$$u_{\mathsf{h}}(t) = K\mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{5.12}$$

erfüllt, wobei K eine beliebige Konstante ist. Aus der Theorie weiß man, dass eine lineare, homogene Differentialgleichung 1. Ordnung (bis auf einen Proportionalitätsfaktor K) nur eine Lösung besitzt. In der Elektrotechnik wird diese Lösung (5.12) der homogenen Differentialgleichung als **flüchtige Spannung** $u_{\mathsf{f}}(t)$ bezeichnet, weil sie für $t \to \infty$ verschwindet.

3. Allgemeine Lösung und Anpassung der Anfangsbedingung: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ergibt sich als Überlagerung der stationären Lösung $u_{\mathsf{s}}(t)$ und der Lösung (5.12) der homogenen Differentialgleichung zu

$$u(t) = u_{\mathsf{s}}(t) + K\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

Die freie Konstante K wird durch die Anfangsbedingung festgelegt. Wir nehmen hierzu an, dass zur Zeit $t = 0$ die Spannung

$$u(0) = u_0$$

am Kondensator anliegt. Daraus folgt

$$K = u_0 - u_\mathsf{s}(0)\,,$$

und als Lösung ergibt sich

$$\boxed{u(t) = u_\mathsf{s}(t) - (u_\mathsf{s}(0) - u_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}\,. \tag{5.13}$$

Diskussion der Lösung mit angepassten Anfangsbedingungen

Die Differentialgleichung

$$\tau\dot{u} + u = u_\mathsf{q} \tag{5.14}$$

hat also die allgemein gültige Lösung

$$\boxed{u(t) = u_\mathsf{s}(t) - (u_\mathsf{s}(0) - u_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}\,. \tag{5.15}$$

Wir werden im Folgenden zeigen, dass alle Ausgleichsvorgänge 1. Ordnung immer durch die selbe Differentialgleichung beschrieben werden und die Lösung daher immer von dieser Gestalt ist. Die stationäre Lösung $u_\mathsf{s}(t)$ für den eingeschwungenen Zustand ergibt sich aus der Gleichstrom- oder Wechselstromrechnung und kann mit den aus der Vorlesung *Grundlagen der Elektrotechnik 1* bekannten Methoden ermittelt werden. Zur Wechselstromrechnung wurde auch im Kapitel 1 in diesem Buch einiges dazu wiederholt. Wir fassen die Ergebnisse zusammen:

Für eine Gleichspannungsquelle mit

$$u_\mathsf{q}(t) = U_\mathsf{q}\,, \tag{5.16}$$

ist die stationäre Lösung ebenfalls eine Gleichspannung. Sie lautet:

$$u_\mathsf{s}(t) = U_\mathsf{q} \tag{5.17}$$

Wegen $u_\mathsf{s}(0) = U_\mathsf{q}$ vereinfacht sich die Formel dann noch weiter zu

$$\boxed{u(t) = U_\mathsf{q} - (U_\mathsf{q} - u_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}\,. \tag{5.18}$$

Dieses Signal sieht für $U_\mathsf{q} - u_0 > 0$ *immer* vom Prinzip her so aus, wie es in Abbildung 5.8 gezeigt ist. Für $U_\mathsf{q} - u_0 < 0$ geht die Kurve nach unten.

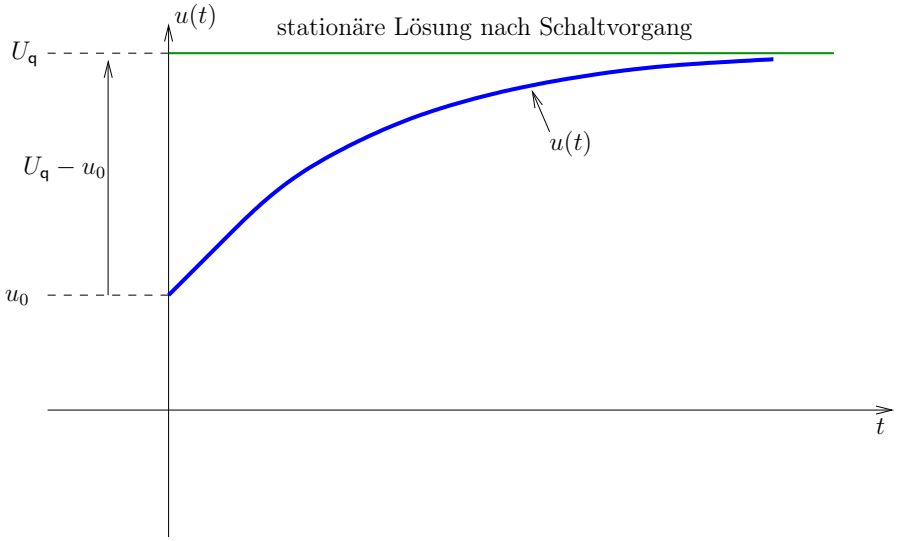


Abbildung 5.8: Allgemeine Form eines Zeitsignals beim Schalten einer Gleichspannung für einen Ausgleichsvorgang 1. Ordnung.

Für Wechselspannung betrachten wir die Quellsapnnung

$$u_\mathsf{q}(t) = \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\underline{U}_\mathsf{q}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} = \sqrt{2}U_\mathsf{q}\cos\left(\omega t + \varphi_\mathsf{q}\right)\,. \tag{5.19}$$

In Abschnitt 1.4 haben wir genau die selbe Schaltung untersucht und mit Hilfe der Wechselstromrechnung die folgende stationäre Lösung gefunden:

$$u_\mathsf{s}(t) = \mathrm{Re}\left\{\frac{\sqrt{2}\underline{U}_\mathsf{q}}{1 + j\omega\tau}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \tag{5.20}$$

Man kann dieses Zeitsignal entweder als Kosinusschwingung mit Amplitude und Phase schreiben

$$\boxed{u_{\mathsf{s}}(t) = \frac{\sqrt{2}U_{\mathsf{q}}}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \cos\left(\omega t + \varphi_{\mathsf{q}} - \varphi\right) \text{ mit } \varphi = \arctan(\omega\tau)} \tag{5.21}$$

oder als Überlagerung einer Kosinus- und einer Sinusschwingung:

$$\boxed{u_{\mathsf{s}}\left(t\right) = \frac{\sqrt{2}\,U_{\mathsf{q}}}{1+(\omega\tau)^2} \left(\cos\left(\omega t + \varphi_{\mathsf{q}}\right) + \omega\tau \sin\left(\omega t + \varphi_{\mathsf{q}}\right)\right)} \tag{5.22}$$

Wenn die komplexe Wechselstromrechnung richtig ist (und das ist sie)[2], dann *muss* das Zeitsignal in den Gleichungen (5.20)-(5.22) eine (spezielle) Lösung der Differentialgleichung (5.14) zur Anregung durch das Signal (5.19) sein. Das kann man natürlich überprüfen[3]: Hierzu muss man Gleichung (5.22) ableiten

$$\dot{u}_{\mathsf{s}}\left(t\right) = \frac{\sqrt{2}\,U_{\mathsf{q}}}{1+(\omega\tau)^2} \left(-\omega \sin\left(\omega t + \varphi_{\mathsf{q}}\right) + \omega^2\tau \cos\left(\omega t + \varphi_{\mathsf{q}}\right)\right)$$

und in die linke Seite der Differentialgleichung (5.14) einsetzen:

$$\begin{aligned}
\tau\dot{u}_{\mathsf{s}}\left(t\right) + u_{\mathsf{s}}\left(t\right) &= \frac{\sqrt{2}\,U_{\mathsf{q}}}{1+(\omega\tau)^2} \left(-\omega\tau \sin\left(\omega t + \varphi_{\mathsf{q}}\right) + \omega^2\tau^2 \cos\left(\omega t + \varphi_{\mathsf{q}}\right)\right) \\
&\quad + \frac{\sqrt{2}\,U_{\mathsf{q}}}{1+(\omega\tau)^2} \left(\cos\left(\omega t + \varphi_{\mathsf{q}}\right) + \omega\tau \sin\left(\omega t + \varphi_{\mathsf{q}}\right)\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}\,U_{\mathsf{q}}}{1+(\omega\tau)^2} \left(1+\omega^2\tau^2\right) \cos\left(\omega t + \varphi_{\mathsf{q}}\right) \\
&= \sqrt{2}\,U_{\mathsf{q}} \cos\left(\omega t + \varphi_{\mathsf{q}}\right)
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite steht gerade die Quellspannung $u_{\mathsf{q}}(t)$. Damit ist das Signal (5.22) eine Lösung der Differentialgleichung (5.14). Diese Rechnung sieht zwar etwas mühsam aus, aber der Bezug zur Elektrotechnik (komplexe Wechselstromrechnung) bleibt erkennbar. Beim *Lösungsraten* ohne diesen Hintergrund an Hand der Tabellen in Mathematikbü-

[2] Die komplexe Wechselstromrechnung lässt sich als Spezialfall (einer kosinusförmigen Anregung) aus der Theorie der Differentialgleichungen begründen. In der Elektrotechnik ist diese Vorgehensweise – anders als in der Physik – eher unüblich.

[3] Die folgende kleine Rechnung dient mehr dem mathematischen als dem elektrotechnischen Verständnis. Sie soll vor allem den Bezug zu der Behandlung dieser Differentialgleichung in der Vorlesung *Ingenieurmathematik 2* [7] herstellen.

chern (siehe z.B. [6], Tabelle auf Seite 381) würde man den *Ansatz*

$$u_{\mathsf{s}}(t) = A\cos(\omega t + \varphi_{\mathsf{q}}) + B\sin(\omega t + \varphi_{\mathsf{q}})$$

machen und die Konstanten A und B durch Einsetzen in die Differentialgleichung (5.14) bestimmen.

5.2.2 Reihen- und Parallelschaltung mit Spule und Widerstand

Die Differentialgleichung bei Anregung durch eine Spannungsquelle

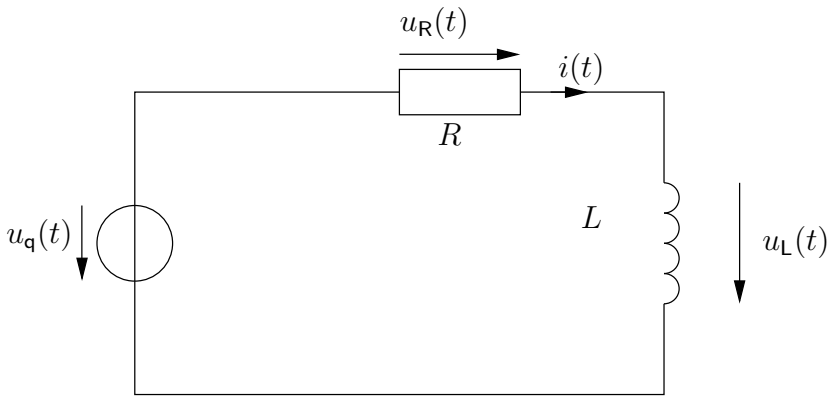


Abbildung 5.9: Schaltung aus Spule und Widerstand und einer idealen Spannungsquelle mit *allgemeiner* Zeitabhängigkeit $u_{\mathsf{q}}(t)$.

Wir betrachten die in Abbildung 5.9 gezeigte Reihenschaltung von Spule und Widerstand, die durch eine ideale Spannungsquelle mit (im Prinzip) beliebiger Zeitabhängigkeit $u_{\mathsf{q}}(t)$ angeregt wird. Konkret betrachten wir bei den Ausgleichsvorgängen aber nur das Ein- oder Umschalten einer Gleich- oder Wechselspannung. Gesucht ist der Strom $i(t)$. Es gilt:

$$u_{\mathsf{L}} + u_{\mathsf{R}} = u_{\mathsf{q}}$$

Aus

$$u_{\mathsf{R}} = Ri$$

und

$$u_{\mathsf{L}} = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i$$

folgt:

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i + Ri = u_{\mathsf{q}}$$

Wir führen die Zeitkonstante

$$\tau = \frac{L}{R}$$

ein und erhalten die Differentialgleichung für i:

$$\boxed{\tau\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i + i = \frac{u_{\mathsf{q}}}{R}} \tag{5.23}$$

Diese Differentialgleichung für den Strom ist von der selben Gestalt wie die Differentialgleichung (5.14) für die Kondensatorspannung bei der RC-Schaltung. Die Lösung mit der Anfangsbedingung $i(0) = i_0$ lautet daher in Analogie zu Gleichung (5.15):

$$\boxed{i(t) = i_{\mathsf{s}}(t) - (i_{\mathsf{s}}(0) - i_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}} \tag{5.24}$$

Wegen der Schaltgesetze ist $i(t)$ bei $t = 0$ stetig. Die stationäre Lösung $i_{\mathsf{s}}(t)$ erhält man wieder aus der Gleich- oder Wechselstromrechnung.

Wenn man lieber eine Differentialgleichung für eine Spannung haben möchte, kann man $i = u_{\mathsf{R}}/R$ einsetzen und erhält die Differentialgleichung für die Spannung $u = u_{\mathsf{R}}$ am Widerstand:

$$\boxed{\tau\dot{u} + u = u_{\mathsf{q}}} \tag{5.25}$$

Diese Differentialgleichung für die Spannung am Widerstand ist also genau die selbe Differentialgleichung wie für die Kondensatorspannung bei der RC-Schaltung, – nur hängt τ jetzt anders von den Parametern ab.

Da $i(t)$ bei $t = 0$ stetig ist, gilt dies auch für $u(t) = Ri(t)$. Wenn man jetzt ebenfalls die Anfangsbedingung $u(0) = u_0$ fordert und für $t \geq 0$ eine Gleich- oder Wechselspannungs-

quelle vorliegt, ergibt sich die selbe Lösung für $u(t)$:

$$\boxed{u(t) = u_{\mathsf{s}}(t) - (u_{\mathsf{s}}(0) - u_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}\,. \tag{5.26}$$

Die stationäre Lösung $u_{\mathsf{s}}(t)$ erhält man wieder aus der Gleich- oder Wechselstromrechnung.

Die Differentialgleichung bei Anregung durch eine Stromquelle

Wir betrachten eine Parallelschaltung von Induktivität und Widerstand, die durch eine ideale Stromquelle mit beliebiger Zeitabhängigkeit $i_{\mathsf{q}}(t)$ angeregt wird. Diese Schaltung ist in Abbildung 5.10 dargestellt. Es soll eine Differentialgleichung für den Strom $i(t) =$

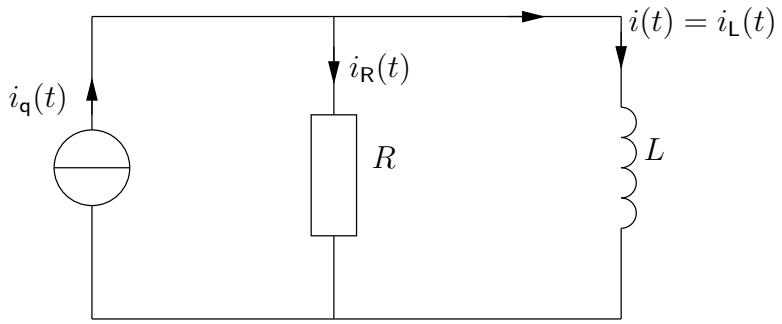


Abbildung 5.10: Parallelschaltung aus Spule und Widerstand und einer idealen Stromquelle mit beliebiger Zeitabhängigkeit $i_{\mathsf{q}}(t)$.

$i_{\mathsf{L}}(t)$ durch die Spule aufgestellt werden. Wegen der Knotenregel gilt

$$i_{\mathsf{R}} + i = i_{\mathsf{q}}\,.$$

Mit

$$i_{\mathsf{R}} = \frac{u}{R} \text{ und } u = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i$$

folgt

$$i_{\mathsf{R}} = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i$$

und damit die Differentialgleichung

$$\boxed{\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i + i = i_{\mathsf{q}}}. \tag{5.27}$$

Dies ist die selbe Differentialgleichung wie Gleichung (5.23), wenn man dort

$$i_{\mathsf{q}}(t) = \frac{u_{\mathsf{q}}(t)}{R} \tag{5.28}$$

ersetzt. Das ist kein Zufall: Tatsächlich zeigt ja die Schaltung in Abbildung 5.10 eine *lineare Stromquelle* mit parallelem Innenwiderstand R und der Induktivität als Last. Die Schaltung in Abbildung 5.9 zeigt eine *lineare Spannungsquelle* mit seriellem Innenwiderstand R und der Induktivität als Last. Beide Quellen sind äquivalent, wenn an die Transformationsregel (5.28) anwendet.

Wenn man jetzt die Anfangsbedingung $i(0) = i_0$ fordert und für $t \geq 0$ eine Gleich- oder Wechselstromquelle vorliegt, ergibt sich wieder die folgende Lösung für $i(t)$:

$$\boxed{i(t) = i_{\mathsf{s}}(t) - (i_{\mathsf{s}}(0) - i_0)\, \mathrm{e}^{-t/\tau}} \tag{5.29}$$

Hierbei ist $i_{\mathsf{s}}(t)$ die stationäre Lösung aus der Gleich- oder Wechselstromrechnung.

5.2.3 Die Lösung für allgemeine Schaltungen mit einem Energiespeicher

Wir beschränken uns weiterhin auf Schaltungen, die nur einen einzigen Energiespeicher enthalten. Ansonsten dürfen beliebig viele beliebig geschaltete Ohmsche Widerstände und auch Schalter darin vorkommen. Auch mehrere ideale Strom- und Spannungsquellen sind erlaubt, aber es sollten entweder alles Gleich- oder alles Wechselspannungsquellen (bzw. -stromquellen) der selben Frequenz sein. Wir zeigen im Folgenden, dass alle diese Schaltungen äquivalent zu einer der beiden obigen einfachen Beispielschaltungen sind und deshalb durch die selbe Differentialgleichung beschrieben werden.

Hierzu betrachten wir den Energiespeicher als Verbraucher-Zweipol und fassen alles andere zu einem Erzeuger-Zweipol zusammen, wie dies in Abbildung 5.11 dargestellt ist.

Für eine solche Schaltung könnte man wieder mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze eine Differentialgleichung 1. Ordnung aufstellen und mit der oben dargestellten Methode lösen. Das bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten, und die gebräuchlichen Programme zur Schaltungssimulation arbeiten auch so. Das im folgenden beschriebene Schema zur

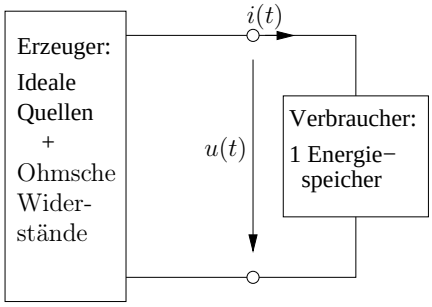


Abbildung 5.11: Beliebige Schaltung (Zweipol) aus idealen Quellen und Ohmschen Widerständen mit einem Energiespeicher: Zusammenfassung zu einem Erzeuger-Zweipol (links) und einem Verbraucher-Zweipol (rechts).

Berechnung des Ausgleichsvorgangs ist aber für den Elektrotechniker in der Praxis einfacher, weil es mit vertrauten Methoden der Elektrotechnik arbeitet und das Aufstellen der vollen inhomogenen Differentialgleichung vermeidet. Die Vorgehensweise ist dabei im wesentlichen die selbe wie bei der Berechnung von Ersatz-Innenwiderständen und Ersatzquellen bei der Gleichstromrechnung. Dies ist ein Spezialfall der Methoden, die in Abschnitt 1.8 beschrieben wurden.

Wir betrachten $t = 0$ als Schaltzeitpunkt. Die folgenden Überlegungen gelten für die Zeit $t \geq 0$ nach dem Schalten. Dann gilt die

Regel:

1. Wenn der Energiespeicher ein Kondensator ist, gilt für die Kondensatorspannung u die Differentialgleichung 1. Ordnung der Gestalt (5.10), d.h.

$$\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u + u = u_{\mathsf{qe}} \,. \tag{5.30}$$

2. Wenn der Energiespeicher eine Spule ist, gilt für den Spulenstrom i die Differentialgleichung 1. Ordnung der Gestalt (5.27), d.h.

$$\tau \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i + i = i_{\mathsf{qe}} \,. \tag{5.31}$$

Warum das so ist und wie die Zeitkonstante τ und die Ersatzquellen u_{qe} bzw. i_{qe} zu berechnen sind, wird im Folgenden erklärt.

Die Idee besteht darin, den Energiespeicher (C oder L) als eine Last an den Klemmen einer linearen Quelle mit Ersatzinnenwiderstand R_{ie} aufzufassen, wie es in Abbildung

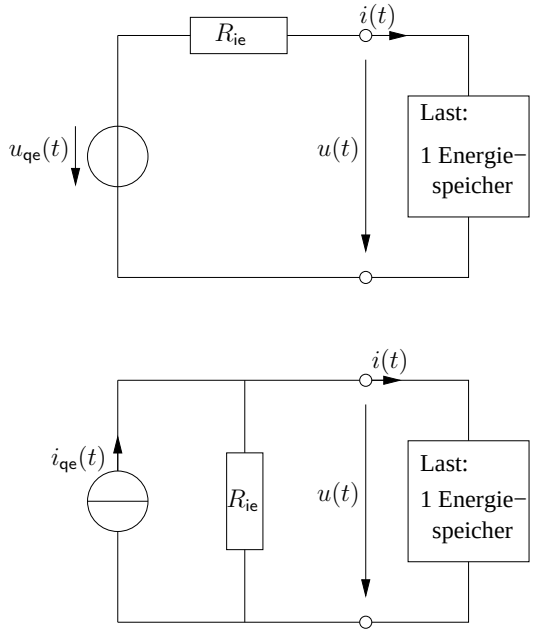


Abbildung 5.12: Ersatzschaltbilder für eine beliebige Schaltung aus idealen Quellen und Ohmschen Widerständen und einem Energiespeicher. Oben: Lineare Spannungsquelle. Unten: Lineare Stromquelle.

5.12 gezeigt ist. Denn auch bei beliebig zeitabhängigen Strömen und Spannungen gilt folgende

Tatsache: Bei Schaltungen ohne Energiespeicher darf man auch bei beliebigen zeitabhängigen Strömen und Spannungen wie mit Gleichstrom rechnen[4].

Alle Ohmschen Widerstände und zeitabhängigen Quellen lassen sich daher (wie bei Gleichstrom) zu einer linearen Quelle zusammenfassen. Das linke Bild in der Abbildung 5.12 zeigt das Ersatzschaltbild der linearen Spannungsquelle

$$u(t) = u_{\mathsf{qe}}(t) - R_{\mathsf{ie}} i(t)\,, \tag{5.32}$$

und das rechte Bild zeigt das äquivalente Ersatzschaltbild der linearen Stromquelle

$$i(t) = i_{\mathsf{qe}}(t) - \frac{1}{R_{\mathsf{ie}}} u(t)\,. \tag{5.33}$$

[4]Dies ist zulässig, obwohl die Quellen zeitabhängig sind. Entscheidend ist dabei, dass nur Ohmsche Widerstände vorkommen und deshalb ein *rein algebraischer* linearer Zusammenhang zwischen Strom und Spannung besteht (also ohne Ableitungen und Integrale).

Die Differentialgleichungen für diese Ersatzschaltbilder wurden im vorherigen Abschnitt bereits aufgestellt. Für einen Kondensator und die Spannungsquelle und ist dies die Differentialgleichung (5.30) bzw. für eine Spule und die Stromquelle[5] die Differentialgleichung (5.31). Die Zeitkonstante ist dann jeweils gegeben durch

$$\tau = R_{\mathsf{ie}} C \text{ (Kondensator) bzw. } \tau = \frac{L}{R_{\mathsf{ie}}} \text{ (Spule)}. \tag{5.34}$$

Den Ersatzinnenwiderstand erhält man mit der in Abschnitt 1.8 beschriebenen Methode, indem man den Eingangswiderstand der Quelle bei deaktivierten Quellen (Spannungsquelle $\mapsto$ Kurzschluss, Stromquelle $\mapsto$ Leerlauf) berechnet. Die Quellen $u_{\mathsf{qe}}(t)$ bzw. $i_{\mathsf{qe}}(t)$ erhält man ebenfalls mit den dort beschrieben Methoden: $u_{\mathsf{qe}}(t)$ ist die Leerlaufspannung und $i_{\mathsf{qe}}(t)$ der Kurzschlussstrom an den Klemmen.

Ströme und Spannungen am Energiespeicher

Mit Hilfe des Ersatzschaltbildes der linearen Quelle erhält man als Lösung der Differentialgleichung die Spannung am Kondensator als

$$u_{\mathsf{C}}(t) = u_{\mathsf{s}}(t) - (u_{\mathsf{s}}(0) - u_0)\, \mathrm{e}^{-t/\tau} \tag{5.35}$$

bzw. den Strom durch die Spule als

$$i_{\mathsf{L}}(t) = i_{\mathsf{s}}(t) - (i_{\mathsf{s}}(0) - i_0)\, \mathrm{e}^{-t/\tau}\,. \tag{5.36}$$

Die Lösung ist also immer von der Gestalt

$$\boxed{y(t) = y_{\mathsf{s}}(t) - (y_{\mathsf{s}}(0) - y_0)\, \mathrm{e}^{-t/\tau}}, \tag{5.37}$$

wobei y jeweils entweder für die Kondensatorspannung oder den Spulenstrom steht.

Insbesondere wenn die Anregung eine Gleichstrom- oder Gleichspannungsquelle ist, erweist es meist als vorteilhaft, bei einer Kapazität eine lineare Ersatz*spannungs*quelle zu wählen und bei einer Induktivität eine lineare Ersatz*strom*quelle, so wie es in Abbildung 5.13 gezeigt ist. Der stationäre Zustand an der Kapazität ist nämlich bei einer Gleichspannungsquelle gerade die Spannung der Ersatzquelle (die Leerlaufspannung), und der stationäre Zustand an der Induktivität ist bei einer Gleichstromquelle gerade der Strom

[5] Bei einem Kondensator und einer Stromquelle muss man $i_{\mathsf{qe}} = u_{\mathsf{qe}}/R_{\mathsf{ie}}$ setzen, um die Stromquelle durch eine äquivalente Spannungsquelle auszudrücken. Bei einer Kondensator und einer Spannungsquelle muss man entsprechend $u_{\mathsf{qe}} = R_{\mathsf{ie}} i_{\mathsf{qe}}$ ersetzen.

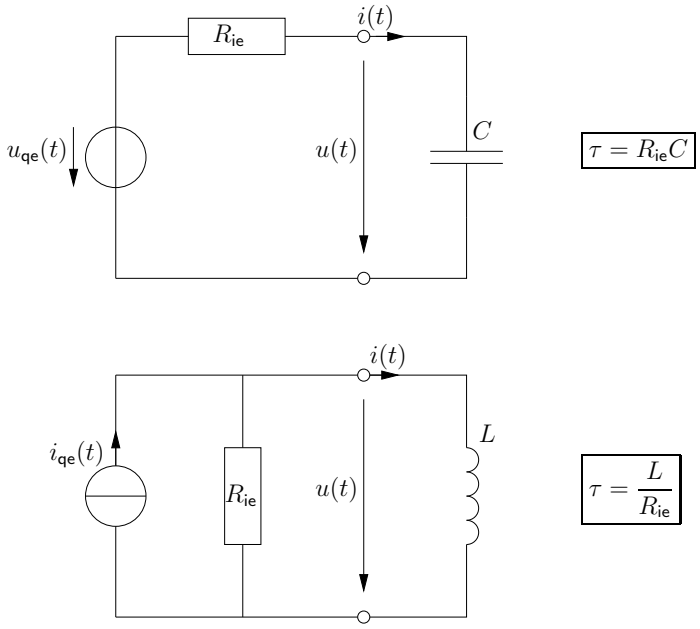
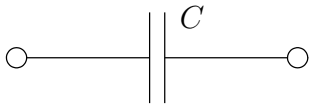
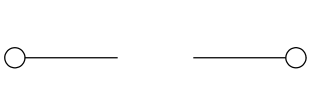


Abbildung 5.13: Ersatzschaltbilder für eine beliebige Schaltung aus idealen Quellen und Ohmschen Widerständen und einem Energiespeicher. Oben: Lineare Spannungsquelle mit Kondensator. Unten: Lineare Stromquelle mit Spule.

der Ersatzquelle (der Kurzschlussstrom). Zur Veranschaulichung sind sind diese Regeln in Tabelle 5.2 zusammengefasst.

Tabelle 5.2: Bestimmung des stationären Zustands y_s bei Gleichstrom bzw. Gleichspannung

Element	wird ersetzt durch
Kondensator 	Leerlauf 
Spule	Kurzschluss

Berechnung der jeweils anderen Größe (Strom oder Spannung) am Energiespeicher

Wir haben gezeigt, wie man die Spannung am Kondensator und den Strom durch die Spule berechnet. Die jeweils andere Größe am Energiespeicher (Strom durch den Kondensator und Spannung an der Spule) kann man direkt ausrechnen. Es gibt dazu zwei Möglichkeiten:

1. Durch Ableitung: Für den Strom durch den Kondensator gilt

$$i_{\mathsf{C}} = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_{\mathsf{C}}\,. \tag{5.38}$$

Die Spannung an der Spule erhält man aus dem Induktionsgesetz

$$u_{\mathsf{L}} = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_{\mathsf{L}}\,. \tag{5.39}$$

2. Durch die Kirchhoffschen Gesetze: Die selben Größen kann man alternativ (ohne Differentialrechnung) direkt mit Hilfe der Maschen- bzw. Knotenregel berechnen. Für den Kondensator an einer linearen Spannungsquelle in Abbildung 5.13 (links) ergibt sich der Strom $i = i_{\mathsf{C}}$ aus

$$u_{\mathsf{qe}} = R_{\mathsf{ie}}i_{\mathsf{C}} + u_{\mathsf{C}}$$

zu

$$i_{\mathsf{C}} = \frac{1}{R_{\mathsf{ie}}}\left(u_{\mathsf{qe}} - u_{\mathsf{C}}\right)\,. \tag{5.40}$$

Für die Spule an der an einer linearen Stromquelle in Abbildung 5.13 (rechts) erhält man die Spannung $u = u_{\mathsf{L}}$ alternativ über

$$i_{\mathsf{qe}} = \frac{u_{\mathsf{L}}}{R_{\mathsf{ie}}} + i_{\mathsf{L}}$$

zu

$$u_{\mathsf{L}} = R_{\mathsf{ie}}\left(i_{\mathsf{qe}} - i_{\mathsf{L}}\right)\,. \tag{5.41}$$

Die Äquivalenz der beiden Berechnungsmethoden soll hier exemplarisch nur für den Kondensatorstrom gezeigt werden. Für die Kondensatorspannung $u = u_\mathsf{C}$ gilt

$$u(t) = u_\mathsf{s}(t) - (u_\mathsf{s}(0) - u_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

Aus Gleichung (5.38) folgt für den Strom

$$i = i_\mathsf{C} = C\dot{u}(t)$$

durch **Ableitung**

$$i(t) = C\dot{u}_\mathsf{s}(t) + \frac{C}{\tau}\,(u_\mathsf{s}(0) - u_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

Der erste Term ist gerade der stationäre Strom $i_\mathsf{s}(t)$. Bei einer Gleichspannungsquelle verschwindet dieser. Bei einer Wechselspannungsquelle kann man diesen über die Ableitung ausrechnen oder kann die Wechselstromrechnung zur Hilfe nehmen. Mit $\tau = R_\mathsf{ie}C$ folgt dann

$$i(t) = i_\mathsf{s}(t) + \frac{1}{R_\mathsf{ie}}\,(u_\mathsf{s}(0) - u_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,. \tag{5.42}$$

Wenn man den Strom alternativ dazu über die **Maschenregel** nach Gleichung (5.40) ausrechnet, muss man

$$u(t) = u_\mathsf{s}(t) - (u_\mathsf{s}(0) - u_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

in

$$i(t) = \frac{1}{R_\mathsf{ie}}\,(u_\mathsf{qe}(t) - u(t))$$

einsetzen und erhält

$$i(t) = \frac{1}{R_\mathsf{ie}}\,(u_\mathsf{qe}(t) - u_\mathsf{s}(t)) + \frac{1}{R_\mathsf{ie}}\,(u_\mathsf{s}(0) - u_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,. \tag{5.43}$$

Die Größe $u_\mathsf{qe}(t) - u_\mathsf{s}(t)$ ist die Spannung am Widerstand R_ie für den stationären Zustand (bei einer Gleichspannungsquelle verschwindet diese Größe). Daher ist

$$i_\mathsf{s}(t) = \frac{1}{R_\mathsf{ie}}\,(u_\mathsf{qe}(t) - u_\mathsf{s}(t))$$

der Strom für den stationären Zustand. Damit stimmt die Gleichung (5.43) für den Strom mit der Gleichung (5.42) überein, – wie es natürlich auch sein muss.

Berechnung der restlichen Ströme und Spannungen (außerhalb des Energiespeichers)

Für den Energiespeicher-Zweipol (Kondensator oder Spule) lassen sich mit den oben dargestellten Methoden der zeitabhängige Strom $i(t)$ und die zeitabhängige Spannung $u(t)$ berechnen. Zur Berechnung der Zeitverläufe der anderen Ströme und Spannungen in der Schaltung verwendet man die Kirchhoffschen Gesetze.

Auch für jeden anderen Strom oder jede andere Spannung in der Schaltung ist der Ausgleichsvorgang von der Gestalt

$$y(t) = y_{\mathsf{s}}(t) - (y_{\mathsf{s}}(0) - y_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,, \tag{5.44}$$

wobei y für Strom oder Spannung steht. Man muss allerdings beachten, dass diese Größe bei $t = 0$ im Allgemeinen nicht mehr stetig ist. Dies wurde schon in dem einführenden Beispiel zu den Schaltgesetzen deutlich: Bei der Schaltung in Abbildung 5.5 springt zur Zeit $t = 0$ die Spannung $u_{\mathsf{L}}(t)$ an der Spule. Der zeitliche Verlauf

$$u_{\mathsf{L}}(t) = \begin{cases} 0 & : \ t < 0 \\ -R_2 I_{\mathsf{q}} \mathrm{e}^{-t/\tau} & : \ t \geq 0 \end{cases}$$

dieser Spannung ist in Abbildung 5.6 blau eingezeichnet. Wegen möglicher auftretender Sprünge muss deshalb in der allgemeinen Formel (5.44) der *rechtsseitige Grenzwert* $y_0 = y(0^+)$ eingesetzt werden (anstatt einfach $y_0 = y(0)$). Diese Werte unmittelbar nach dem Schalten ergeben sich aus den Schaltgesetzen entsprechend Tabelle 5.1 und den Kirchhoffschen Gesetzen.

Anwendung auf Gleichstrom

Bei Schaltvorgängen *nur mit Gleichstrom* (bzw. *nur mit Gleichspannung*) ist

$$y_{\mathsf{s}}\,(t) = y_{\mathsf{s}}\,(0) = y_{\mathsf{s}}$$

konstant. Dann gilt

$$\boxed{y\,(t) = y_\mathsf{s} - (y_\mathsf{s} - y_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \text{ für } t \geq 0}\,. \tag{5.45}$$

Der erste Term y_s beschreibt den stationären Zustand für $t \to \infty$. In Abbildung 5.13 ist für die obere Ersatzschaltung (Spannungsquelle und Kondensator)

$$y_s = U_\mathsf{qe}$$

zu setzen und für die untere (Stromquelle und Spule)

$$y_s = I_\mathsf{qe}\,.$$

Die Größe $(y_\mathsf{s} - y_0)$ ist die *Sprunghöhe* (die positiv oder negativ sein kann). Der *Sprung* erfolgt wegen des Energiespeichers aber nicht plötzlich, sondern geglättet durch die Exponentialfunktion. Das sieht dann für $y_\mathsf{s} - y_0 > 0$ *immer* vom Prinzip her so aus, wie es in Abbildung 5.14 gezeigt ist. Für $y_\mathsf{s} - y_0 < 0$ geht der Kurvenverlauf nach unten. Der stationäre Zustand lässt sich mit Hilfe der Gleichstromrechnung ermitteln, wobei Kondensator bzw. Induktivität entsprechend Tabelle 5.2 zu ersetzen sind. Konkrete Beispiele hierzu werden weiter unten behandelt.

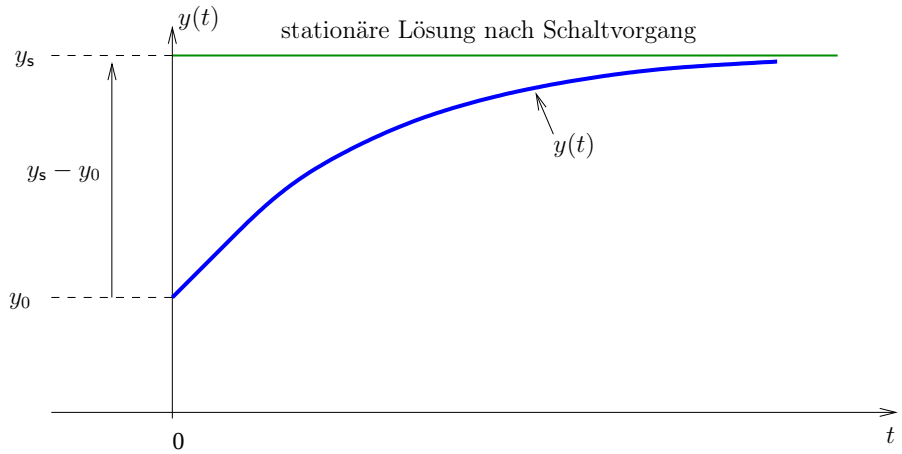


Abbildung 5.14: Zeitlicher Verlauf eines beliebigen Signals (Strom oder Spannung) innerhalb der Schaltung mit einem Energiespeicher beim Schalten eines Gleichstroms bzw. einer Gleichspannung.

Das jeweils andere Signal am Energiespeicher (den Strom durch den Kondensator bzw. die induzierte Spannung an der Spule) kann man aus der Ableitung der Gleichung (5.45)

berechnen. Es gilt

$$\dot{y}\,(t) = \frac{1}{\tau}\,(y_\mathsf{s} - y_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \text{ für } t \geq 0\,. \tag{5.46}$$

Setzt man für den Kondensator $y(t) = u_\mathsf{C}(t)$ und $\tau = R_\mathsf{ie}C$, so ergibt sich aus

$$i_\mathsf{C}(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_\mathsf{C}(t)$$

für den **Strom durch den Kondensator** die Formel

$$\boxed{i_\mathsf{C}(t) = \frac{1}{R_\mathsf{ie}}\,(U_\mathsf{qe} - u_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}\,. \tag{5.47}$$

Setzt man für die Spule $y(t) = i_\mathsf{L}(t)$ und $\tau = L/R_\mathsf{ie}$, so ergibt sich aus dem Induktionsgesetz

$$u_\mathsf{L}(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i_\mathsf{L}(t)$$

für die **induzierte Spannung an der Spule** die Formel

$$\boxed{u_\mathsf{L}(t) = R_\mathsf{ie}\,(I_\mathsf{qe} - i_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}\,. \tag{5.48}$$

Falls sich das System vor dem Schalten im stationären Zustand befindet, verschwinden $i_\mathsf{C}(t)$ bzw. $u_\mathsf{L}(t)$ für $t < 0$ und springen bei $t = 0$ auf die durch Gleichung (5.47) bzw. Gleichung (5.48) gegebenen Werte.

Merke: Beim Schalten springt im Allgemeinen der Kondensatorstrom bzw. die induzierte Spannung an der Spule.

1. Beispiel für Gleichstrom: Überbrücken eines seriellen Widerstandes am RL-Kreis

Bei der in Abbildung 5.15 gezeigten Schaltung sind zwei Widerstände mit einer Spule in Reihe geschaltet und eine Gleichspannungsquelle U_q angeschlossen. Bei offenem Schalter befindet sich das System im stationären Zustand. Zur Zeit $t = 0$ wird der Schalter geschlossen und so der Widerstand R_2 überbrückt. Gesucht sind der Strom $i(t)$ und die Spannung $u(t)$ für die Spule.

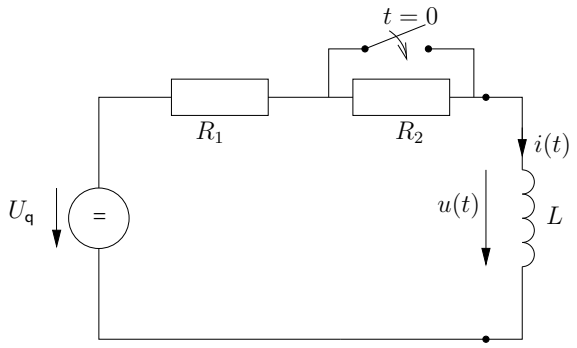


Abbildung 5.15: Überbrücken eines Widerstandes am RL-Kreis.

Berechnung des Stroms $i(t)$ Vor dem Umschalten fließt der konstante Strom

$$i(t) = I_0 = \frac{U_\mathsf{q}}{R_1 + R_2} \quad (\text{für } t < 0)\,.$$

Die stationäre Lösung für den Strom bei geschlossenem Schalter lautet

$$i_\mathsf{s}(t) = I_\mathsf{s} = \frac{U_\mathsf{q}}{R_1}\,,$$

und die Zeitkonstante ist

$$\tau = \frac{L}{R_1}\,.$$

Die Lösung für den **Strom** bei $t \geq 0$ lautet also

$$i\,(t) = I_\mathsf{s} - (I_\mathsf{s} - I_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

bzw.

$$i\,(t) = U_\mathsf{q}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{R_2}{R_1\,(R_1 + R_2)}\mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \quad (\text{für } t \geq 0)\,.$$

Dieser Zeitverlauf für den Strom ist in Abbildung 5.16 skizziert.

Berechnung der induzierten Spannung $u(t)$ **an der Spule** Im stationären Zustand vor dem Schaltzeitpunkt wird keine Spannung induziert, d.h. $u(t) = 0$ für $t < 0$. Die

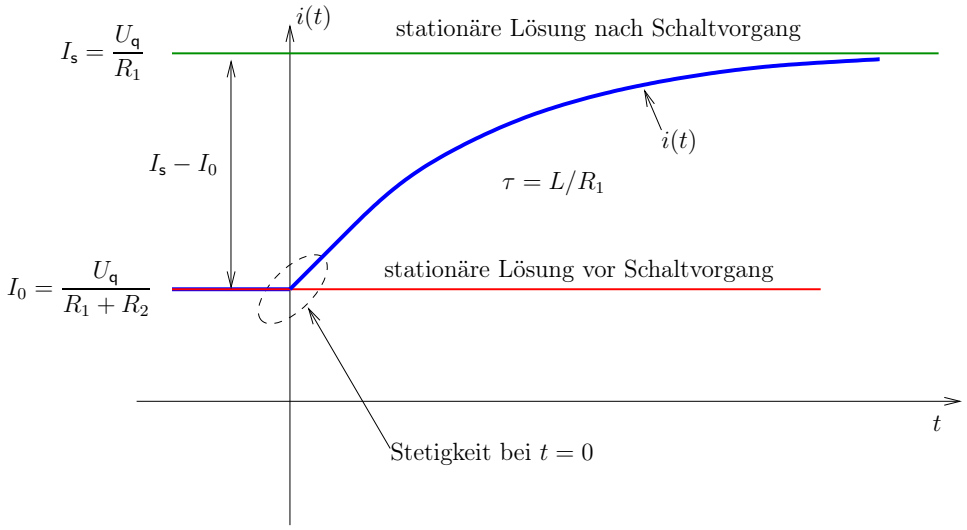


Abbildung 5.16: Zeitsignal für den Strom durch die Spule in Abbildung 5.15 bei der Überbrückung eines Widerstandes.

induzierte Spannung für $t \geq 0$ ergibt sich nach dem Induktionsgesetz zu

$$\begin{aligned} u(t) &= L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) \\ &= U_q \frac{R_2 L}{\tau R_1 (R_1 + R_2)} \mathrm{e}^{-t/\tau} \end{aligned}$$

$$u(t) = U_q \frac{R_2}{R_1 + R_2} \mathrm{e}^{-t/\tau} .$$

Der Zeitverlauf ist in Abbildung 5.17 skizziert. Die Spannung springt zur Zeit $t = 0$ auf den positiven Wert

$$u_0 = U_q \frac{R_2}{R_1 + R_2} .$$

Das *positive* Vorzeichen für die induzierte Spannung $u(t)$ ergibt sich, weil der Strom nach dem Schaltvorgang *ansteigt*. Würde man den Schalter wieder öffnen, würde eine negative Spannung induziert. Als *erste Alternative* zu der eben gezeigten Vorgehensweise kann man die induzierte Spannung auch nach der allgemeinen Formel

$$u(t) = u_s - (u_s - u_0)\, \mathrm{e}^{-t/\tau}$$

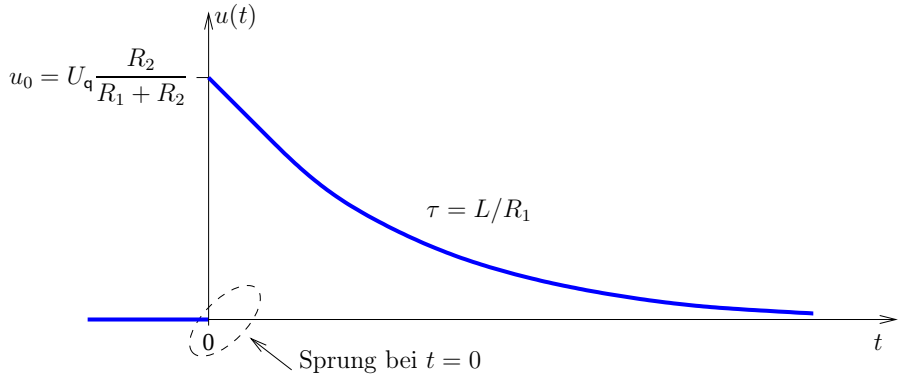


Abbildung 5.17: Zeitsignal für die an der Spule in Abbildung 5.15 induzierte Spannung bei der Überbrückung eines Widerstandes.

berechnen. Im stationären Zustand gilt $u_\mathsf{s} = 0$, denn die Spule verhält sich wie ein Kurzschluss. Für den Zeitpunkt unmittelbar nach dem Schalten gilt für den Strom

$$i(0^+) = I_0 = \frac{U_\mathsf{q}}{R_1 + R_2}$$

und dem nach Maschensatz

$$U_\mathsf{q} = u(0^+) + R_1 i(0^+)$$

und damit

$$\begin{aligned} u_0 &= U_\mathsf{q} - \frac{R_1 U_\mathsf{q}}{R_1 + R_2} \\ &= \frac{R_2 U_\mathsf{q}}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u(t) = U_\mathsf{q}\frac{R_2}{R_1 + R_2}\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

Als eine *zweite Alternative* kann man $u(t)$ auch aus dem bekannten Strom $i(t)$ und der Maschenregel

$$U_\mathsf{q} = u(t) + R_1 i(t)$$

gleich für alle Zeiten ausrechnen.

In dem obigen Beispiel wurden alle drei Möglichkeiten beschrieben, um die induzierte Spannung auszurechnen. Der Rechenaufwand der Varianten ist vergleichbar. Es gibt aber Fälle, wo eine der Varianten günstiger ist als die anderen. Je unübersichtlicher die Schaltung ist, desto leichter passieren Fehler beim Rechnen mit den Kirchhoffschen Gesetzen (das war die zweite Alternative). Dann empfiehlt es sich, das Induktionsgesetz zu verwenden (wie es zuerst beschrieben wurde).

2. Beispiel für Gleichstrom: Hinzuschalten eines parallelen Widerstandes am RL-Kreis

In der Schaltung mit der Gleichstromquelle $i_\mathrm{q}(t) = 1\,\mathrm{A}$, die in Abbildung 5.18 skizziert ist, wird zur Zeit $t = 0$ der Schalter geschlossen. Vorher befindet sich das System im stationären Zustand. Gesucht sind der Strom $i(t)$ und die Spannung $u(t)$ für die Spule

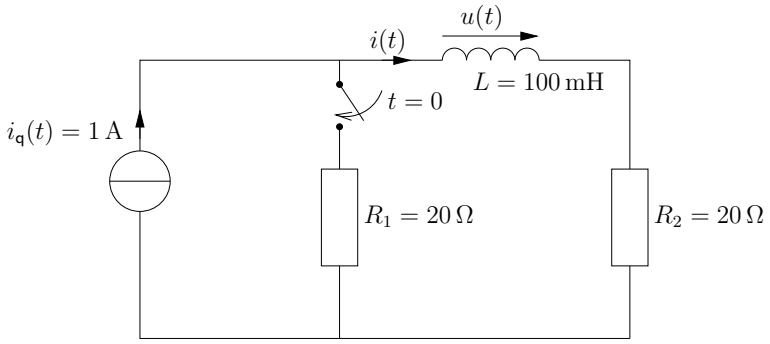


Abbildung 5.18: Schaltung für das 2. Beispiel: Hinzuschalten eines parallelen Widerstandes am RL-Kreis.

für $t \geq 0$.

Berechnung des Stroms $i(t)$ durch die Spule Der Ersatzinnenwiderstand (Schalter geschlossen, Stromquelle durch Leerlauf ersetzt) ist $R_1 + R_2 = 40\,\Omega$. Die Zeitkonstante ergibt sich dann als

$$\tau = \frac{L}{R_1 + R_2} = 2,5\,\mathrm{ms}\,.$$

Wegen der Schaltgesetze (Stetigkeit des Stroms) ist der Anfangsstrom zur Zeit $t = 0$ gleich dem Strom der Quelle

$$i_0 = i_\mathrm{q} = 1\,\mathrm{A}\,.$$

Im stationären Zustand ($t \to \infty$) ist die Spule wie ein Kurzschluss zu behandeln, und durch die beiden gleichen parallelen Widerstände fließt jeweils der halbe Quellstrom

$$i_\mathsf{s} = \frac{1}{2} i_\mathrm{q} = 0,5\,\mathrm{A}\,.$$

Setzt man dies in die allgemeine Formel

$$i(t) = i_\mathsf{s} - (i_\mathsf{s} - i_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

für den Strom ein, so ergibt sich

$$i(t) = 0,5\,\mathrm{A}\left(1 + \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,.$$

Der Zeitverlauf dieses Stromes ist in Abbildung 5.19 oben dargestellt.

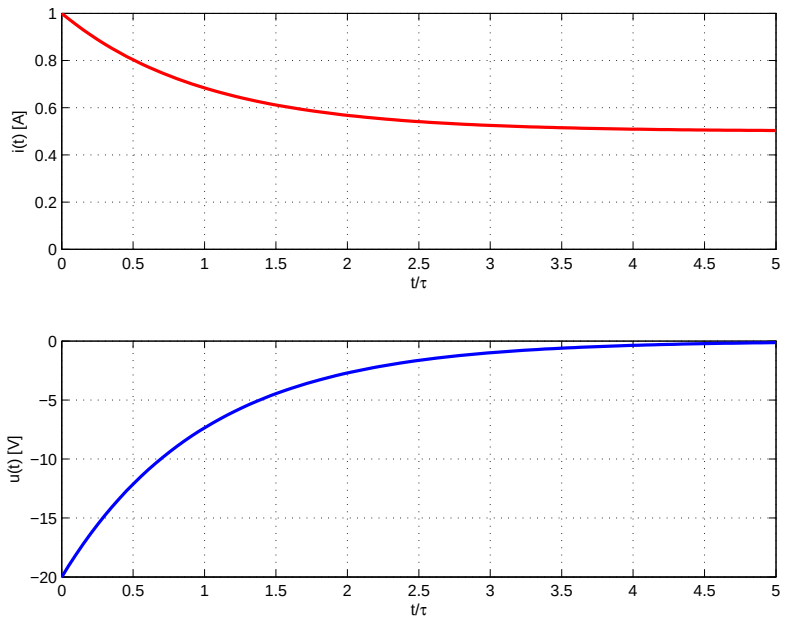


Abbildung 5.19: Zeitsignal für den Strom $i(t)$ durch die Spule (oben) und die induzierte Spannung (unten) beim Hinzuschalten eines parallelen Widerstandes in der Schaltung der Abbildung 5.18.

Berechnung der induzierten Spannung $u(t)$ Der direkteste Weg zur Berechnung der Spannung ergibt sich nach dem Induktionsgesetz über die Ableitung:

$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t) = -0,5\,\mathrm{A}\,\frac{L}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau} = -0,5\,\mathrm{A}\;(R_1 + R_2)\;\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$u(t) = -20\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Vor dem Schalten liegt keine Spannung an. Die Spannung springt also bei $t = 0$ von $u = 0$ auf den negativen Wert $u = -20\,\mathrm{V}$.

Als *erste Alternative* kann man die *allgemeine Formel* benutzen und die Anfangsbedingung $u_0 = u(0^+)$ einsetzen. Zur Bestimmung der Anfangsspannung $u_0 = u(0^+)$ betrachten wir die eingezeichnete Masche mit den Spannungen $u_1(t)$, $u_2(t)$ und $u(t)$ zum Zeitpunkt unmittelbar nach dem Einschalten. Nach der Maschenregel gilt für die in Ab-

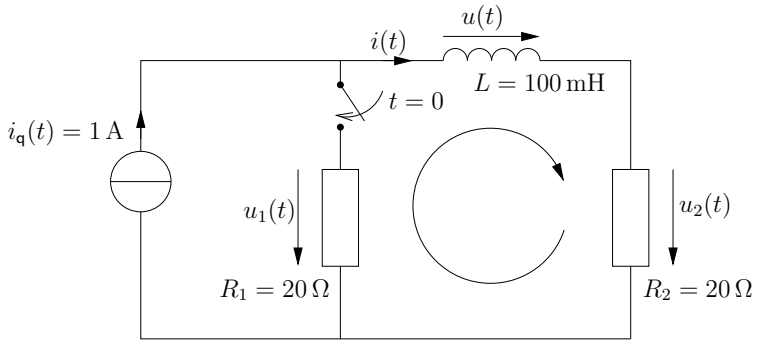


Abbildung 5.20: Bestimmung der Anfangsspannung $u_0 = u(0^+)$.

bildung 5.20 eingezeichneten Spannungen:

$$u_1(t) = u(t) + u_2(t)$$

Zum Zeitpunkt $t = 0^+$ unmittelbar nach dem Einschalten wirkt die Induktivität (wegen der Schaltgesetze) wie eine Stromquelle i_q =1 A. Durch den Widerstand R_2 fließt dann folglich genau dieser Strom, und die Spannung lautet

$$u_2(0^+) = 20\,\mathrm{V}\,.$$

Durch den Widerstand R_1 kann nach der Stromteilerregel kein Strom fließen, also gilt

$$u_1(0^+) = 0\,\mathrm{V}\,.$$

Daraus folgt nach der Maschenregel

$$u_0 = u(0^+) = -20\,\mathrm{V}\,.$$

Im stationären Zustand wirkt die Spule wie ein Kurzschluss:

$$u_\mathsf{s} = 0\,\mathrm{V}$$

Mit der Allgemeinen Formel

$$u(t) = u_\mathsf{s} - (u_\mathsf{s} - u_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

folgt

$$u(t) = -20\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

Als *zweite Alternative* zu dieser Berechnungsmethode erhält man das selbe Ergebnis über die Kombination von Knotenregel

$$i_\mathsf{q} = i_1 + i$$

und Maschenregel

$$R_1 i_1 = u + R_2 i\,,$$

wobei i_1 der Strom durch R_1 ist. Es folgt

$$\begin{aligned} u &= R_1 i_1 - R_2 i \\ &= R_1 i_\mathsf{q} - (R_1 + R_2)\,i \\ &= 20\,\mathrm{V} - 20\,\mathrm{V}\left(1 + \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) \end{aligned}$$

und damit

$$u(t) = -20\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.$$

Anwendung der allgemeinen Formel auf Wechselstrom

Wir betrachten eine Wechselstromquelle $i_{\mathsf{qe}}(t)$ oder eine Wechselspannungsquelle $u_{\mathsf{qe}}(t)$. Um beide gemeinsam zu behandeln, schreiben wir

$$y_{\mathsf{qe}}(t) = \hat{y}\cos(\omega t + \varphi_{\mathsf{qe}}) \ ,$$

wobei y jeweils für i oder u steht. Um nicht immer den Faktor $\sqrt{2}$ mitschreiben zu müssen, wird hier der an Stelle des Effektivwertes der Spitzenwert $\hat{y}$ verwendet. Wie wir in Gleichung (5.21) gesehen haben, ist die stationäre Lösung der Differentialgleichung

$$\tau\dot{y} + y = y_{\mathsf{qe}}$$

gegeben durch

$$y_{\mathsf{s}}(t) = A\hat{y}\cos(\omega t + \varphi_{\mathsf{qe}} - \varphi)$$

mit

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} \text{ und } \varphi = \arctan\omega\tau \ .$$

Das Einsetzen in Gleichung (5.37) ergibt

$$\boxed{y(t) = A\hat{y}\cos(\omega t + \varphi_{\mathsf{qe}} - \varphi) - (A\hat{y}\cos(\varphi_{\mathsf{qe}} - \varphi) - y_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}\,. \tag{5.49}$$

Man braucht also gar nicht viel zu rechnen, um diese Formel für das zeitliche Verhalten des Ausgleichsvorgang zu erhalten. Denn mit Hilfe der vereinfachten Methode nach Gleichung (5.37) ergibt sich direkt die Lösung der zugehörigen Differentialgleichung für die entsprechende Anfangsbedingung $y(0) = y_0$. Häufig lautet die Anfangsbedingung $y_0 = 0$. Dann vereinfacht sich die obige Formel zu

$$\boxed{y(t) = A\hat{y}\left(\cos(\omega t + \varphi_{\mathsf{qe}} - \varphi) - \cos(\varphi_{\mathsf{qe}} - \varphi)\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}}\,. \tag{5.50}$$

Genau diesen Fall hatten wir bei dem einführenden Beispiel in Unterabschnitt 5.2.1 betrachtet.

5.3 Ausgleichsvorgänge 2. Ordnung (Schwingkreise)

Eine Schaltung mit zwei verschiedenen Energiespeichern (also einer Kapazität und einer Induktivität) führt auf eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung. Um das zeitliche Verhalten eines Stromes oder einer Spannung innerhalb der Schaltung zu berechnen, muss man die Differentialgleichung lösen und zwei Anfangsbedingungen einsetzen, welche sich wieder aus den Schaltgesetzen ergeben. Wir betrachten hierzu den Reihenschwingkreis. Der Parallelschwingkreis ist dazu äquivalent, wenn man die Größen entsprechend ersetzt.

Wie schon in Kapitel 3 erwähnt, ist das mechanische Analogon zu einem solchen Schwingkreis das gedämpfte Federpendel. Dieses wird im Studienbuch Physik 2 [4] in den Abschnitten 1.4 und 1.5 ausführlich behandelt. In der Tabelle 3.1 wurden bereits die Analogien zwischen den elektrischen und den mechanischen Größen dargestellt.

5.3.1 Die Differentialgleichung für die Kondensatorspannung

Wir betrachten den Reihenschwingkreis aus Abbildung 3.1, beschränken uns jetzt allerdings nicht auf den eingeschwungenen Zustand, sondern lassen als Anregung eine Quellspannung $u_\mathsf{q}(t)$ zu, die einen Schaltvorgang (für eine Gleich- oder Wechselspannung) enthält. Die zeitabhängigen Größen sind in der Schaltung in Abbildung 5.21 eingezeichnet.

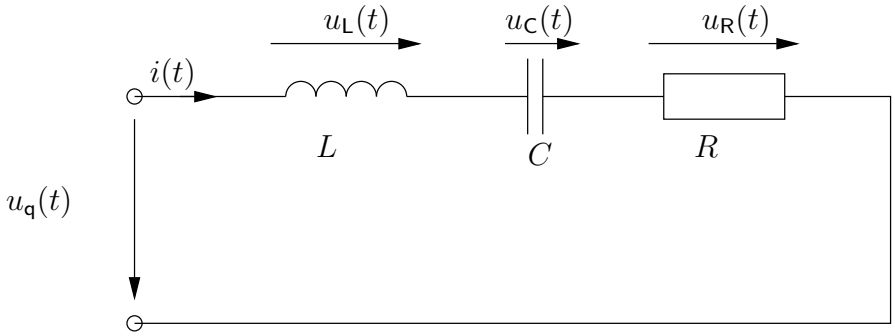


Abbildung 5.21: Der LCR-Reihenschwingkreis mit Anregung durch eine allgemein zeitabhängige Spannungquelle $u_\mathsf{q}(t)$.

Um die Differentialgleichung bei einer allgemeinen zeitabhängigen Anregung aufzustellen, wird die Maschenregel verwendet:

$$u_\mathsf{L} + u_\mathsf{R} + u_\mathsf{C} = u_\mathsf{q} \tag{5.51}$$

Zunächst werden alle Spannungen in dieser Gleichung durch die Ladung q auf dem Kondensator ausgedrückt. Es gilt

$$u_{\mathsf{C}} = \frac{1}{C} q \,.$$

Aus dem Ohmschen Gesetz

$$u_{\mathsf{R}} = Ri$$

und $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ folgt

$$u_{\mathsf{R}} = R \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q \,.$$

Aus dem Induktionsgesetz

$$u_{\mathsf{L}} = L \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} i$$

und $i = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ folgt

$$u_{\mathsf{L}} = L \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} q \,.$$

Wenn man diese drei Spannungen in die Gleichung (5.51) einsetzt, folgt für die Ladung die Differentialgleichung

$$L \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} q + R \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q + \frac{1}{C} q = u_{\mathsf{q}} \,.$$

Nun wird die Ladung q durch die Kondensatorspannung

$$u = u_{\mathsf{C}} = \frac{1}{C} q$$

ausgedrückt, und es ergibt sich die lineare inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\boxed{LC\ddot{u} + RC\dot{u} + u = u_{\mathsf{q}}} \,. \tag{5.52}$$

Zur Vereinfachung der Notation drücken wir die Konstanten der Bauelemente durch die schon weiter oben im Kapitel 3 mit Gleichung (3.5) hergeleitete Resonanzfrequenz

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

und die durch Gleichung (3.23) eingeführte Dämpfungskonstante

$$\boxed{\delta = \frac{R}{2L}}$$

aus. Die ***Schwingungsgleichung*** lautet dann

$$\boxed{\ddot{u} + 2\delta\dot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_{\mathsf{q}}}\,. \tag{5.53}$$

Dies ist eine inhomogene, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Diese allgemeine Schwingungsgleichung beschreibt nicht nur den elektrischen Schwingkreis, sondern auch ein gedämpftes Federpendel, – wenn man die Größen entsprechend umbenennt. Das mechanische Analogon zu der Kondensatorladung $q(t) = Cu(t)$ ist die Auslenkung $x(t)$ des Pendels, und das Analogon zum Strom $i(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}q(t)$ ist die Geschwindigkeit $v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$. Zum Vergleich sei hierzu auf die ausführliche Diskussion in den Abschnitten 1.4 und 1.5 des Studienbuchs *Physik 2* [4] verwiesen. Die Mathematik hierzu – gerade auch im Hinblick auf diese Anwendung – ist ausführlich im Kapitel 4 des Studienbuches *Ingenieurmathematik 2* [7] dargestellt.

Um die Lösung der Differentialgleichung (5.53) zu finden, ist die Vorgehensweise in drei Schritten im Prinzip die selbe wie schon bei der entsprechenden Differentialgleichung 1. Ordnung. Allerdings muss man bei Differentialgleichungen 2. Ordnung berücksichtigen, dass es *zwei* linear unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung gibt [7].

1. Schritt (Auffinden einer speziellen Lösung): Für Ausgleichsvorgänge ist die spezielle Lösung der stationäre (d.h. eingeschwungene) Zustand, den man mit Hilfe der Gleichstrom- oder Wechselstromrechnung berechnet. Das Verhalten von Schwingkreisen für Wechselstrom wurde ausführlich im Kapitel 3 über Resonanzen behandelt. Die stationäre Lösung für Gleichstrom lässt sich daraus berechnen, dass der Kondensator dann wie ein Leerlauf wirkt und die Spule wie ein Kurzschluss.

2. Schritt (Lösung der homogenen Gleichung): Die Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$\ddot{u} + 2\delta\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

beschreibt das *Ausschwingen* des kurzgeschlossenen Schwingkreises. Es gibt zwei linear unabhängige Lösungen, die zu einer allgemeinen Lösung überlagert werden. Es gibt drei verschieden Fälle (Schwingung, Kriechfall, aperiodischer Grenzfall), die von den Parametern der Bauteile abhängen.

3. Schritt (Überlagerung der Lösungen): Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist die Überlagerung der speziellen Lösung und der Lösung der homogenen Gleichung. Hierbei müssen *zwei Konstanten* an die Anfangsbedingungen angepasst werden.

Diese drei Schritte werden in den folgenden Unterabschnitten für den den LCR-Reihenschwingkreis diskutiert.

5.3.2 Die Lösungen der homogenen Differentialgleichung für den Reihenschwingkreis und die freie Schwingung

Die homogene Differentialgleichung erhält man aus Gleichung (5.53), indem man dort $u_{\mathsf{q}}(t) = 0$ setzt. Dies entspricht dem in Abbildung 5.22 gezeigten *kurzgeschlossenen Schwingkreis*, der bei geschlossenem Schalter frei schwingen kann. Die homogene Differentialgleichung

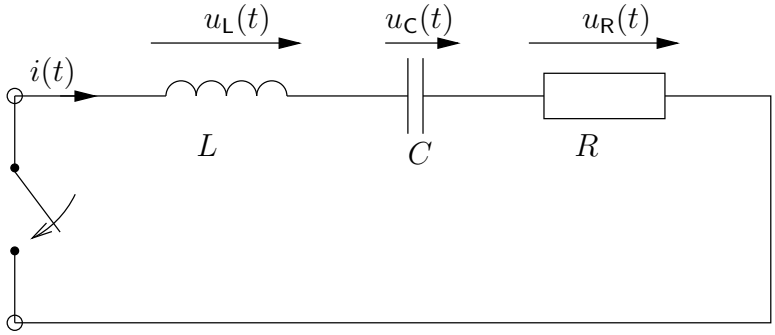


Abbildung 5.22: Der freie LCR-Reihenschwingkreis.

$$\ddot{u} + 2\delta\dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \tag{5.54}$$

der **freien Schwingung** der Kondensatorspannung u lässt sich mit einem exponentiellen Ansatz lösen. Zur Herleitung der Lösung sei auf die Studienbücher *Ingenieurmathematik 2* [7] und *Physik 2* [4] verwiesen. Hier sind nur die Ergebnisse zusammengefasst. Es sind drei Fälle zu unterscheiden, die vom Wert der Güte

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

abhängen. Typischerweise wird ein Schwingkreis so entworfen, dass er eine hohe Güte besitzt. Dann *schwingt* der kurzgeschlossene *Schwing*kreis auch (sofern er gespeicherte

Energie enthält). Bei einer sehr geringen Güte (für $Q_0 \leq 1/2$) gibt es keine Schwingung mehr, sondern nur noch ein exponentiell gedämpftes *Zurückkriechen* in den stromlosen Zustand. Dazwischen gibt es noch den aperiodischen Grenzfall genau bei $Q_0 = 1/2$. Abhängig von der Güte sind die folgenden drei Fälle für die Lösung der Differentialgleichung (5.54) zu unterscheiden, in denen jeweils die beiden noch unbestimmten Konstanten K_1 und K_2 vorkommen:

1. Der Schwingfall: Hier gilt $\delta^2 < \omega_0^2$. Das System schwingt mit der *durch die Dämpfung verringerten* Kreisfrequenz

$$\omega_\mathsf{d} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \tag{5.55}$$

   und wird dabei exponentiell gedämpft mit der Dämpfungskonstanten δ. Die Lösung lautet also

$$u_\mathsf{h}(t) = \mathrm{e}^{-\delta t} \left(K_1 \cos\left(\omega_\mathsf{d} t\right) + K_2 \sin\left(\omega_\mathsf{d} t\right)\right) . \tag{5.56}$$

2. Der Kriechfall: Hier gilt $\delta^2 > \omega_0^2$. Das System ist *überdämpft* und schwingt nicht, sondern *kriecht* aus seinem Anfangszustand zurück auf die Null-Lösung. Der Spannungsverlauf ist gegeben durch das exponentiell gedämpfte Signal

$$u_\mathsf{h}(t) = K_1 \exp\left(-\left(\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) t\right) + K_2 \exp\left(-\left(\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right) t\right) . \tag{5.57}$$

3. Der aperiodische Grenzfall liegt zwischen dem Kriechfall und dem Schwingfall. Hier gilt $\delta^2 = \omega_0^2$. Die Lösung lautet

$$u_\mathsf{h}(t) = K_1 \mathrm{e}^{-\delta t} + K_2 t \mathrm{e}^{-\delta t} . \tag{5.58}$$

In der Elektrotechnik am wichtigsten ist der Schwingfall mit $\delta^2 < \omega_0^2$, den wir nun betrachten. Zunächst ist der Schalter am Schwingkreis in Abbildung 5.22 offen (d.h. die Klemmen im Leerlauf), und der Kondensator trägt eine Ladung $q_0 = Cu_0$. Es fließt kein Strom. Zur Zeit $t = 0$ wird der Schalter geschlossen. Für $t \geq 0$ wird der Kondensatorspannung durch die Lösung

$$u(t) = \mathrm{e}^{-\delta t} \left(K_1 \cos\left(\omega_\mathsf{d} t\right) + K_2 \sin\left(\omega_\mathsf{d} t\right)\right) \tag{5.59}$$

der homogenen Differentialgleichung beschrieben. Die beiden Konstanten K_1, K_2 bestimmt man aus den Anfangsbedingungen: Wegen der Schaltgesetze müssen $u(t)$ und $i(t)$ bei $t = 0$ stetig sein. Es gilt also

$$u(0) = u_0 \text{ und } i(0) = 0\,. \tag{5.60}$$

Der Strom ist die Ableitung der Kondensatorladung:

$$i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q = C\dot{u}$$

Die beiden Anfangsbedingungen lauten also

$$u(0) = u_0 \text{ und } \dot{u}(0) = 0\,. \tag{5.61}$$

Wegen der zweiten Bedingung wird noch die Ableitung von Gleichung (5.59) benötigt, die man nach der Produktregel erhält:

$$\dot{u}(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\left(\left(\omega_\mathsf{d} K_2 - \delta K_1\right)\cos\left(\omega_\mathsf{d} t\right) - \left(\omega_\mathsf{d} K_1 + \delta K_2\right)\sin\left(\omega_\mathsf{d} t\right)\right)\,. \tag{5.62}$$

Setzt man die Anfangsbedingungen (5.61) in die Gleichungen (5.59) und (5.62) ein, so führt dies auf:

$$\begin{aligned} K_1 &= u_0 \\ \omega_\mathsf{d} K_2 - \delta K_1 &= 0\,. \end{aligned}$$

Daraus berechnet man die Konstanten zu

$$K_1 = u_0 \text{ und } K_2 = \frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}} u_0\,.$$

Eingesetzt in Gleichung (5.59) ergibt sich für die Spannung die freie gedämpfte Schwingung

$$\boxed{u(t) = u_0 \mathrm{e}^{-\delta t}\left(\cos\left(\omega_\mathsf{d} t\right) + \frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}}\sin\left(\omega_\mathsf{d} t\right)\right)}, \tag{5.63}$$

deren Verlauf für $Q_0 = 8$ in Abbildung 5.23 als blaue Kurve gezeigt ist[6]. Für diesen

[6] Das mechanische Analogon hierzu findet sich im *Studienbuch Physik 2* [4] in Gleichung (1.58). Dort muss man allerdings die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 0$ setzen, weil wir hier für den Anfangsstrom

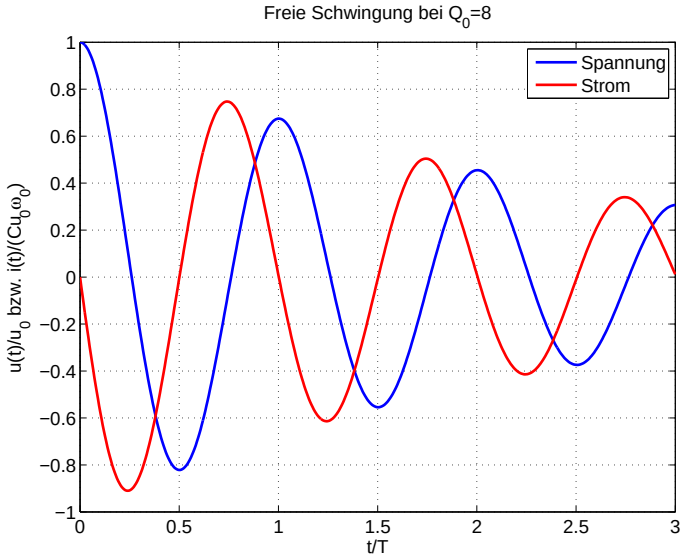


Abbildung 5.23: Spannungs- und Stromverlauf der freien Schwingung als Funktion von t/T für $Q_0 = 8$. Hierbei ist $T = 2\pi/\omega_0$ die Periode der *ungedämpften* Schwingung. Die Periode der im Bild dargestellten *gedämpften* Schwingung unterscheidet sich nur unmerklich davon.

hohen Wert der Güte ist wegen Gleichung (5.55) die Kreisfrequenz

$$\omega_\mathrm{d} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \approx 0,998\,\omega_0$$

der Schwingung gegenüber der Resonanzfrequenz ω_0 nur so geringfügig reduziert, dass dies im Bild nicht zu erkennen ist. Für den Strom $i = C\dot{u}$ ergibt sich

$$\boxed{i(t) = -Cu_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \left(\omega_\mathrm{d} + \frac{\delta^2}{\omega_\mathrm{d}}\right) \sin\left(\omega_\mathrm{d} t\right)}$$

Dessen Zeitverlauf ist in Abbildung 5.23 als rote Kurve dargestellt.

Genau das selbe Bild ergibt sich beim gedämpften Federpendel, das um x_0 ausgelenkt ist und zur Zeit $t = 0$ losgelassen wird. Hier entspricht die blaue Kurve der Auslenkung $x(t)$ und die rote der Geschwindigkeit $v(t)$.

$i_0 = 0$ angenommen haben.

Darstellung der Schwingung mit Amplitude und Phase (Herleitung mit komplexer Rechnung): In Gleichung (5.63) steht in dem exponentiell gedämpften Term die Überlagerung einer Kosinus- und einer Sinusschwingung. Elektrotechniker mögen es meist lieber, statt dessen eine Kosinus-Schwingung mit Amplitude und Phase hin zu schreiben. Mit komplexer Rechnung kommt man von der einen zur anderen Darstellung. Hierzu schreibt man

$$\cos(\omega_\mathsf{d} t) + \frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}} \sin(\omega_\mathsf{d} t) = \mathrm{Re}\left\{ \left(1 - j\frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}}\right) \mathrm{e}^{j\omega_\mathsf{d} t} \right\}$$

und wandelt den komplexen Ausdruck in der geschweiften Klammer auf der rechten Seite vollständig in die exponentielle Form um:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left\{ \left(1 - j\frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}}\right) \mathrm{e}^{j\omega_\mathsf{d} t} \right\} &= \mathrm{Re}\left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}}\right)^2}\, \mathrm{e}^{-j\varphi_\mathrm{d}} \mathrm{e}^{j\omega_\mathsf{d} t} \right\} \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}}\right)^2} \cos(\omega_\mathsf{d} t - \varphi_\mathrm{d}) \end{aligned}$$

mit

$$\varphi_\mathsf{d} = \arctan\left(\frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}}\right).$$

Aus der Definition von ω_d in Gleichung (5.55) folgt

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}}\right)^2} = \frac{\omega_0}{\omega_\mathsf{d}}.$$

Daraus folgt

$$\boxed{\cos(\omega_\mathsf{d} t) + \frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}} \sin(\omega_\mathsf{d} t) = \frac{\omega_0}{\omega_\mathsf{d}} \mathrm{e}^{-\delta t} \cos(\omega_\mathsf{d} t - \varphi_\mathsf{d}) \;\text{ mit }\; \varphi_\mathsf{d} = \arctan\left(\frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}}\right)}. \quad (5.64)$$

Damit ergibt sich für die Spannung am Kondensator

$$\boxed{u(t) = u_0 \frac{\omega_0}{\omega_\mathsf{d}} \mathrm{e}^{-\delta t} \cos(\omega_\mathsf{d} t - \varphi_\mathsf{d})}$$

Darstellung der Schwingung mit Amplitude und Phase (Herleitung mit Additionstheorem): Alternativ zu der obigen Rechnung mit komplexen Zahlen kann man auch

mit dem Additionstheorem rechnen. Obwohl das etwas umständlicher ist und man dazu ein paar Eigenschaften von Winkelfunktionen auswendig kennen (oder nachschlagen) muss, wird dieser Weg von vielen Elektrotechniker bevorzugt. Wir zeigen deshalb, wie das geht. Das verwendete Additionstheorem lautet

$$\cos\left(\omega_\mathsf{d} t - \varphi_\mathsf{d}\right) = \cos\varphi_\mathsf{d} \cos\omega_\mathsf{d} t + \sin\varphi_\mathsf{d} \sin\omega_\mathsf{d} t\,,$$

wobei φ_d eine zunächst unbekannte Phase ist. Wir dividieren durch $\cos\varphi_\mathsf{d}$ und erhalten

$$\frac{1}{\cos\varphi_\mathsf{d}} \cos\left(\omega_\mathsf{d} t - \varphi_\mathsf{d}\right) = \cos\omega_\mathsf{d} t + \tan\varphi_\mathsf{d} \sin\omega_\mathsf{d} t\,.$$

Wir drücken nun $\cos\varphi_\mathsf{d}$ durch den Tangens aus. Wegen

$$\frac{1}{\cos^2\varphi_\mathsf{d}} = 1 + \tan^2\varphi_\mathsf{d}$$

folgt

$$\sqrt{1+\tan^2\varphi_\mathsf{d}}\, \cos\left(\omega_\mathsf{d} t - \varphi_\mathsf{d}\right) = \cos\omega_\mathsf{d} t + \tan\varphi_\mathsf{d} \sin\omega_\mathsf{d} t\,.$$

Setzt man

$$\tan\varphi_\mathsf{d} = \frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}} \text{ d.h. } \varphi_\mathsf{d} = \arctan\left(\frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}}\right)\,,$$

so ergibt sich

$$\sqrt{1+\left(\frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}}\right)^2}\, \cos\left(\omega_\mathsf{d} t - \varphi_\mathsf{d}\right) = \cos\omega_\mathsf{d} t + \frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}} \sin\omega_\mathsf{d} t$$

und mit

$$\sqrt{1+\left(\frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}}\right)^2} = \frac{\omega_0}{\omega_\mathsf{d}}$$

dann

$$\frac{\omega_0}{\omega_\mathsf{d}} \cos\left(\omega_\mathsf{d} t - \varphi_\mathsf{d}\right) = \cos\omega_\mathsf{d} t + \frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}} \sin\omega_\mathsf{d} t\,.$$

5.3.3 Das Einschalten einer Gleichspannung am LCR-Reihenschwingkreis

Wir betrachten nun den LCR-Reihenschwingkreis in Abbildung 5.24, bei dem zur Zeit $t = 0$ eine Gleichspannungsquelle

$$u_{\mathsf{q}}(t) = U_{\mathsf{q}}$$

eingeschaltet wird. Dabei nehmen wir an, dass der Kondensator vor dem Schalten nicht geladen ist. Das Raten einer speziellen Lösung für die Kondensatorspannung ergibt sich direkt aus der Physik: Die stationäre Lösung für $t \geq 0$ ist der eingeschwungene Zustand,

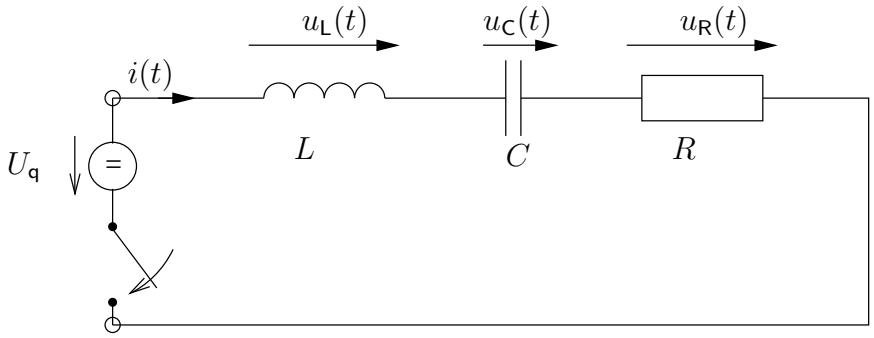


Abbildung 5.24: Der LCR-Reihenschwingkreis beim Einschalten einer Gleichspannungsquelle.

bei dem die volle Gleichspannung

$$u_{\mathsf{s}}(t) = U_{\mathsf{q}}$$

am Kondensator anliegt. Man rechnet direkt nach, das dies eine Lösung der Differentialgleichung ist. Wir betrachten einen Schwingkreis mit schwacher Dämpfung, d.h. den *Schwingfall* mit $\delta^2 < \omega_0^2$. Für $t \geq 0$ lautet die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $u = u_{\mathsf{s}} + u_{\mathsf{h}}$ also

$$u(t) = U_{\mathsf{q}} + \mathrm{e}^{-\delta t} \left(K_1 \cos\left(\omega_{\mathsf{d}} t\right) + K_2 \sin\left(\omega_{\mathsf{d}} t\right) \right) . \tag{5.65}$$

Die Konstanten K_1 und K_2 werden nach der selben Methode wie beim freien Schwingkreis aus den Anfangsbedingungen berechnet. Für $t < 0$ ist der Schwingkreis energielos, d.h. der Kondensator ist entladen, und es fließt kein Strom. Wegen der Schaltgesetze ist $u(t)$

und $i(t)$ stetig. Daher gilt

$$u(0) = 0 \text{ und } i(0) = 0\,. \tag{5.66}$$

Der Strom ist die Ableitung der Kondensatorladung:

$$i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} q = C\dot{u}$$

Die Anfangsbedingungen lauten also

$$u(0) = 0 \text{ und } \dot{u}(0) = 0\,. \tag{5.67}$$

Die Ableitung der Gleichung (5.65) ergibt nach der Produktregel:

$$\dot{u}(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\left((\omega_\mathsf{d} K_2 - \delta K_1)\cos(\omega_\mathsf{d} t) - (\omega_\mathsf{d} K_1 + \delta K_2)\sin(\omega_\mathsf{d} t)\right)$$

Die Anfangsbedingungen (5.67) führen auf die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} U_\mathsf{q} + K_1 &= 0 \\ \omega_\mathsf{d} K_2 - \delta K_1 &= 0 \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$K_1 = -U_\mathsf{q}\,,\quad K_2 = -\frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}} U_\mathsf{q}\,.$$

Als Lösung der Differentialgleichung ergibt sich daraus die Spannung

$$\boxed{u(t) = U_\mathsf{q}\left(1 - \mathrm{e}^{-\delta t}\left(\cos(\omega_\mathsf{d} t) + \frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}}\sin(\omega_\mathsf{d} t)\right)\right)}. \tag{5.68}$$

Um diese Schwingung durch Amplitude und Phase auszudrücken, setzten wir Gleichung (5.64) ein und erhalten

$$\boxed{u(t) = U_\mathsf{q}\left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_\mathsf{d}}\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega_\mathsf{d} t - \varphi_\mathsf{d})\right) \text{ mit } \varphi_\mathsf{d} = \arctan\left(\frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}}\right)}. \tag{5.69}$$

Der zeitliche Verlauf dieser Spannung ist für $Q_0 = 2$ in Abbildung 5.25 (oben) als blaue Kurve gezeigt. Für diesen recht niedrigen Wert der Güte ist die Kreisfrequenz ω_d der

Schwingung gegenüber der Resonanzfrequenz ω_0 immerhin so weit reduziert, dass dies im Bild bei genauem Hinsehen zu erkennen ist. Denn man sieht an der Stelle $t = T$, dass die dargestellte Periode der gedämpften Schwingung ein klein wenig größer als die Periode T der ungedämpften Schwingung ist. Die Schwingung ist bei dieser geringen Güte sehr deutlich gedämpft, und schon nach wenigen Perioden stellt sich praktisch der stationäre Zustand ein. Vorher gibt es aber noch einen deutlichen ***Überschwinger*** . Für den Strom $i = C\dot{u}$ erhält man

$$\boxed{i(t) = Cu_0 \mathrm{e}^{-\delta t} \left(\omega_\mathsf{d} + \frac{\delta^2}{\omega_\mathsf{d}} \right) \sin\left(\omega_\mathsf{d} t\right)}$$

was im Bild als rote Kurve dargestellt ist. Der Strom erreicht nach wenigen Schwingungsperioden praktisch den Wert null. Der Wert $Q_0 = 0,5$ entspricht dem aperiodischen Grenzfall, bei dem der stationäre Zustand auf dem schnellsten Weg und ohne Überschwinger erreicht wird. Der untere Teil der Abbildung zeigt die Schwingung für den Wert $Q_0 = 0,6$, was dem aperiodischen Grenzfall schon so nahe kommt, dass der Überschwinger im Bild kaum erkennbar ist.

Genau das selbe Bild ergibt sich beim gedämpften Federpendel, das zur Zeit $t = 0$ durch einen *Kraftsprung* angeregt wird, indem man z.B. ruckartig daran zieht. Dies wird im *Studienbuch Physik 2* [4] in Abschnitt 1.5.3.3 behandelt. In dem Kasten dort unten auf Seite 87 findet sich die Formel für die Auslenkung $x(t)$, die der obigen Formel (5.69) für $u(t)$ entspricht. Hier entspricht wieder die blaue Kurve der Auslenkung $x(t)$ und die rote der Geschwindigkeit $v(t)$. Das Federpendel schwingt aus und pendelt gedämpft um die neue Ruhelage herum. [7]

[7] Dieses Beispiel wird im Studienbuch Physik 2 [4] behandelt. Der aperiodische Grenzfall ist übrigens genau das, was man beim Stoßdämpfer eines Autos erreichen möchte: Bei einer plötzlich einwirkenden Kraft soll die Ruhelage schnell wieder erreicht werden, ohne dass das Auto anfängt zu schaukeln.

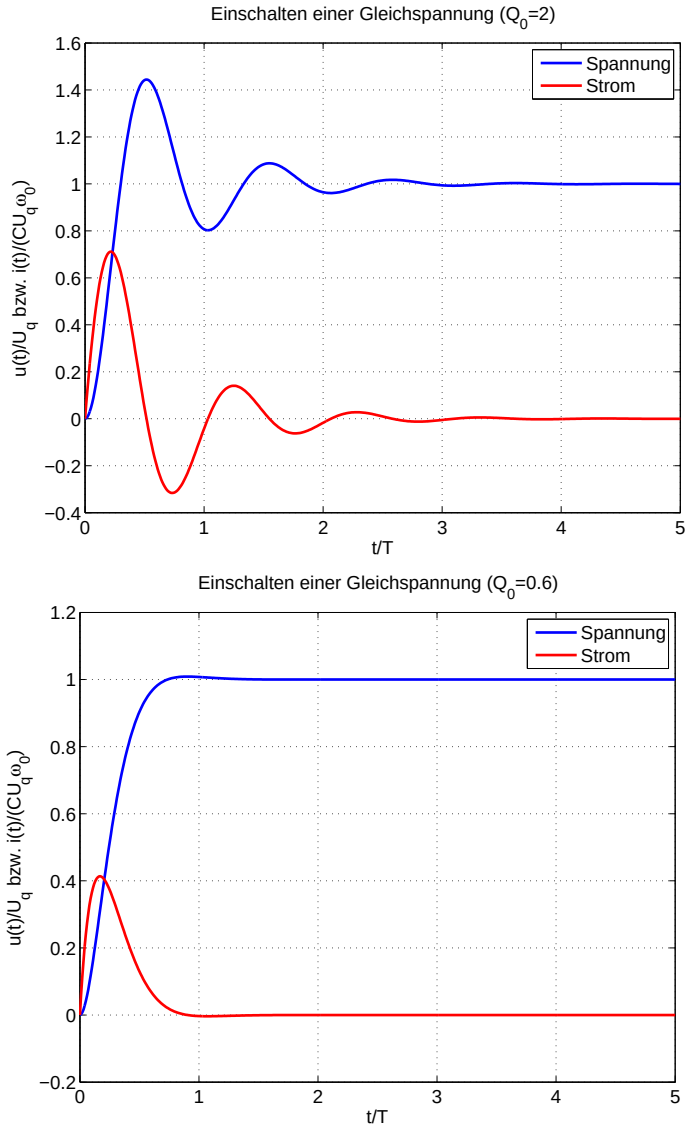


Abbildung 5.25: Spannungs- und Stromverlauf beim Einschalten einer Gleichspannung am Schwingkreis als Funktion von t/T ($\omega_0 = 2\pi/T$) für $Q_0 = 2$ (oben) und $Q_0 = 0,6$ (unten).

5.3.4 Das Einschalten einer Wechselspannung am LCR-Reihenschwingkreis

Wir betrachten einen LCR-Reihenschwingkreis, bei dem zur Zeit $t = 0$ eine Wechselspannung

$$u_{\mathsf{q}}(t) = \sqrt{2}\, U_{\mathsf{q}} \cos(\omega t + \varphi_{\mathsf{q}}) = \sqrt{2}\mathrm{Re}\left\{\underline{U}_{\mathsf{q}} \mathrm{e}^{j\omega t}\right\}$$

eingeschaltet wird. Vor dem Schalten liegt keine Spannung am Kondensator, und es fließt kein Strom. Die stationäre Lösung für die Kondensatorspannung bei der betrachteten Schaltung erhält man mit der komplexen Wechselstromrechnung. Damit erhält man als Zeitsignal für die Kondensatorspannung

$$u_{\mathsf{s}}(t) = \sqrt{2}\mathrm{Re}\left\{\underline{U}_{\mathsf{C}} \mathrm{e}^{j\omega t}\right\} ,$$

wobei $\underline{U}_{\mathsf{C}}$ nach Gleichung (3.27) gegeben ist durch

$$\underline{U}_{\mathsf{C}} = \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\delta\omega} \underline{U}_{\mathsf{q}} \,.$$

Dieser Zeiger für die Kondensatorspannung lautet in exponentieller Darstellung

$$\underline{U}_{\mathsf{C}} = A(\omega) U_{\mathsf{q}} \mathrm{e}^{-j\Delta\varphi}$$

mit dem Amplitudenfaktor

$$A(\omega) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + (2\delta\omega)^2}}$$

und der Phasendifferenz

$$\Delta\varphi = \arctan\left(\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) - \varphi_{\mathsf{q}} \,.$$

Diese beiden obigen Formeln finden sich für das mechanische Analogon des Federpendels im Studienbuch *Physik 2* [4] in den Gleichungen (1.82) und (1.83).

Das Zeitsignal für den stationären Zustand ist nun gegeben durch

$$u_{\mathsf{s}}(t) = \sqrt{2}\, U_{\mathsf{q}} A(\omega) \cos(\omega t - \Delta\varphi) \,.$$

Mit der Überlagerung der Lösung der homogenen Gleichung

$$u_{\mathrm{h}}(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\left(K_1 \cos\left(\omega_{\mathrm{d}} t\right) + K_2 \sin\left(\omega_{\mathrm{d}} t\right)\right)$$

ergibt sich die allgemeine Lösung

$$\boxed{u(t) = \sqrt{2}\, U_{\mathrm{q}} A(\omega) \cos(\omega t - \Delta\varphi) + \mathrm{e}^{-\delta t}\left(K_1 \cos\left(\omega_{\mathrm{d}} t\right) + K_2 \sin\left(\omega_{\mathrm{d}} t\right)\right)},$$

deren Ableitung als

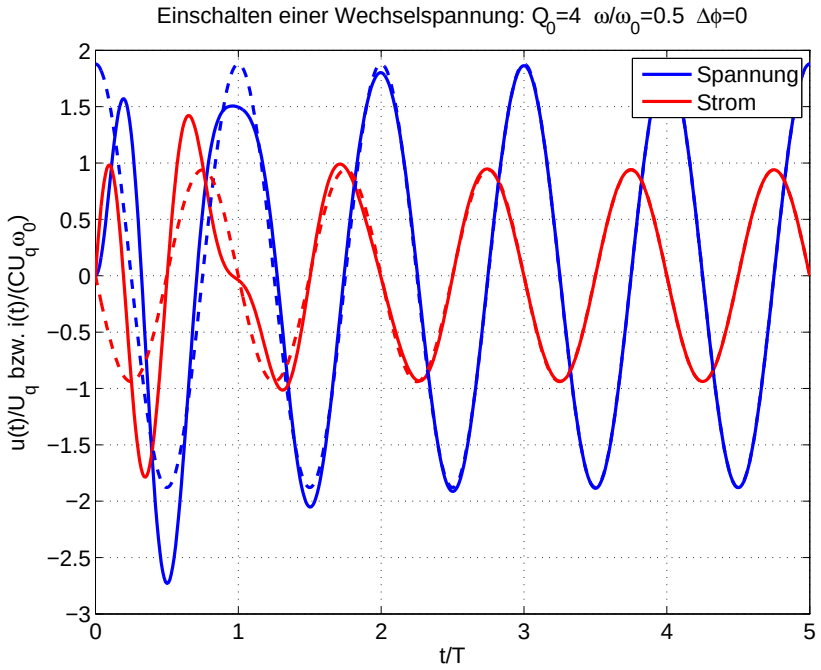


Abbildung 5.26: Spannungs- und Stromverlauf am Schwingkreis beim Einschalten einer Wechselspannung der halben Resonanzfrequenz. Als Zeitachse ist aufgetragen t/T ($\omega = 2\pi/T$). Die Güte ist $Q_0 = 4$ und die Phasenverschiebung $\Delta\varphi = 0$. Der eingeschwungene Zustand ist mit gestrichelten Linien gezeichnet.

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) \quad = \quad & -\sqrt{2}\, U_{\mathrm{q}} A(\omega)\omega \sin(\omega t - \Delta\varphi) \\ & +\mathrm{e}^{-\delta t}\left(\left(\omega_{\mathrm{d}} K_2 - \delta K_1\right)\cos\left(\omega_{\mathrm{d}} t\right) - \left(\omega_{\mathrm{d}} K_1 + \delta K_2\right)\sin\left(\omega_{\mathrm{d}} t\right)\right)\end{aligned}$$

berechnet wird. Die Anfangsbedingungen

$$u(0) = u_0 \text{ und } \dot{u}(0) = 0$$

führen auf die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \sqrt{2}\,U_{\mathsf{q}} A(\omega)\cos(\Delta\varphi) + K_1 &= 0 \\ \sqrt{2}\,U_{\mathsf{q}} A(\omega)\omega\sin(\Delta\varphi) + \omega_{\mathsf{d}} K_2 - \delta K_1 &= 0 \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} K_1 &= -\sqrt{2}\,U_{\mathsf{q}} A(\omega)\cos(\Delta\varphi) \\ K_2 &= -\frac{\sqrt{2}\,U_{\mathsf{q}} A(\omega)}{\omega_{\mathsf{d}}}\left(\delta\cos(\Delta\varphi) + \omega\sin(\Delta\varphi)\right) . \end{aligned}$$

Ein Beispiel für einen möglichen Zeitverlauf für Strom und Spannung des Einschwingvorgangs ist in Abbildung 5.26 gezeigt. Die Anregungsfrequenz liegt bei der halben Resonanzfrequenz ($\omega = \omega_0/2$). Der Zeitverlauf kann – abhängig von der der Anregungsfrequenz – sehr unterschiedlich aussehen. Beispiele hierzu findet man im Studienbuch Physik 2 [4] in Abbildung 1.24.

Bei der Güte $Q_0 = 4$ liegt

$$\omega_{\mathsf{d}=}\omega_0\sqrt{1-\left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} \approx 0,99\,\omega_0$$

schon sehr nahe bei ω_0. Man sieht am Stromverlauf, dass die Schwingung zunächst mit der höheren Frequenz der freien Schwingung startet, aber dann nach wenigen Perioden die Anregungsfrequenz aufgezwungen bekommt.

Für die Praxis wichtig ist die Tatsache, dass es bei Einschaltvorgängen an Schwingkreisen während des Einschwingvorgangs zu ***Überschwingern*** kommen kann. Es können dabei Amplitudenwerte für Strom und Spannung auftreten, die deutlich höher sind als die entsprechenden Werte im eingeschwungenen Zustand. In Abbildung 5.26 sind solche Überschwinger zu erkennen, allerdings in relativ harmloser Ausprägung.

5.4 Die Berechnung von Ausgleichsvorgängen mit dem Superpositionsprinzip

Bisher haben wir Ausgleichsvorgänge betrachtet, bei denen nur einmal geschaltet wird. Wenn mehrmals geschaltet wird (z.B. eine eingeschaltete Spannungsquelle wieder ausgeschaltet wird), kann man dies mit Hilfe des **Superpositionsprinzips** (**Überlagerungsprinzips**) auf einzelne Schaltvorgänge zurückführen. Ausschalten ist dasselbe wie Einschalten, nur mit negativem Vorzeigen. In Abbildung 5.27 ist die blaue Kurve einer

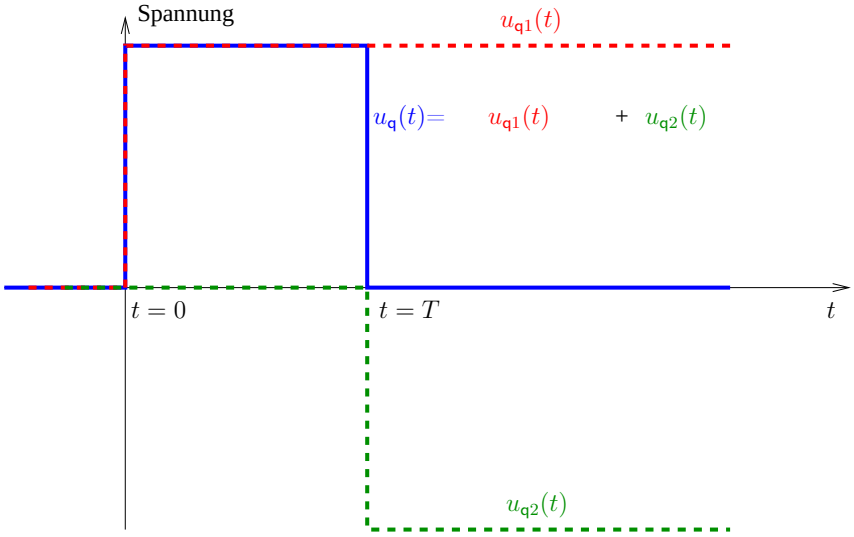


Abbildung 5.27: Ein- und Ausschalten einer Quelle als Superposition.

Gleichspannungsquelle $u_q(t)$ gezeigt, die zur Zeit $t = 0$ eingeschaltet und zu Zeit $t = T$ wieder ausgeschaltet wird. Man kann $u_q(t)$ darstellen als Überlagerung

$$u_q = u_{q1} + u_{q2}$$

eines Einschaltvorgangs $u_{q1}(t)$ zur Zeit $t = 0$ (rot gestrichelt) und eines Ausschaltvorgangs $u_{q2}(t)$ zur Zeit $t = T$ (grün gestrichelt). Das Ausschaltsignal ist das negative und um die Zeit T verzögerte Einschaltsignal:

$$u_{q2}(t) = -u_{q1}(t - T)$$

Wenn man den Ausgleichsvorgang einer Schaltung für die rot gestrichelte Quelle $u_{q1}(t)$ berechnet hat, kennt man ihn auch für die grün gestrichelte Quelle $u_{q2}(t)$: Man muss

die Lösung für den Ausgleichsvorgang nur um die Zeit T verzögern und das Vorzeichen umdrehen. Das Superpositionsprinzip besagt, dass man das Zeitsignal für die blaue Quelle $u_{\mathsf{q}}(t)$ gerade als Summe dieser beiden Ausgleichsvorgänge erhält.

Wir formulieren hier das Superpositionsprinzip nur für eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, obwohl es für alle linearen Differentialgleichungen gilt.

Das Superpositionsprinzip:

Es sei eine Schaltung durch eine Differentialgleichung

$$\tau\dot{u} + u = u_{\mathsf{q}}$$

gegeben. Es seien folgende Lösungen bekannt:

1. Für eine (beliebig zeitabhängige) Quellenspannung $u_{\mathsf{q}1} \rightsquigarrow$ Lösung u_1

2. Für eine (andere beliebig zeitabhängige) Quellenspannung $u_{\mathsf{q}2} \rightsquigarrow$ Lösung u_2

Dann gilt: Zu der überlagerten Quellenspannung

$$u_{\mathsf{q}} = u_{\mathsf{q}1} + u_{\mathsf{q}2}$$

lautet die Lösung

$$u = u_1 + u_2$$

Für Ströme formuliert gilt das entsprechend dasselbe.

Beispiel: Ein- und Ausschalten der Gleichspannungsquelle am RC-Kreis

Wir betrachten wieder eine Schaltung aus Kondensator und Widerstand mit Gleichspannungsquelle wie in Abbildung 5.28. Zur Zeit $t = 0$ wird der Schalter geschlossen (Stellung 1), und der Kondensator lädt sich auf. Zur Zeit $t = T$ wird der Schalter umgelegt, und der Kondensator entlädt sich. Der Zeitverlauf der Quellspannung an der Schaltung ist also gerade durch Abbildung 5.27 gegeben. Wir zerlegen diesen wie beschrieben in einen Einschaltvorgang (rot gestrichelt) und einen Ausschaltvorgang (grün gestrichelt). Für

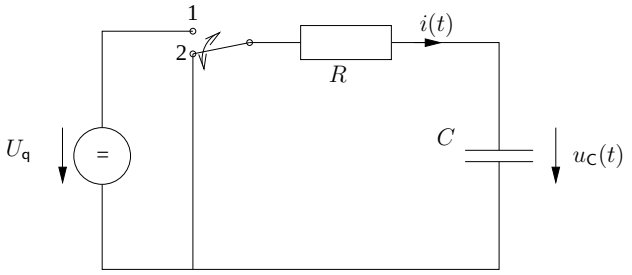


Abbildung 5.28: Schaltung aus Kondensator und Widerstand mit Gleichspannungsquelle (Schalterstellung 1) bzw. mit Kurzschluss (Schalterstellung 2).

den Einschaltvorgang lautet die Lösung für den Spannungsverlauf am Kondensator

$$u_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ U_q\left(1 - e^{-t/\tau}\right) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

mit $\tau = RC$. Die Lösung für den Ausschaltvorgang ist $u_2(t) = -u_1(t - T)$, d.h.

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < T \\ -U_q\left(1 - e^{-(t-T)/\tau}\right) & \text{für } t \geq T \end{cases}$$

Der gesuchte Zeitverlauf der Spannung am Kondensator ist dann die Summe

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t)\,.$$

Diese kann man schreiben als

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ U_q\left(1 - e^{-t/\tau}\right) & \text{für } 0 \leq t < T \\ U_q\left(e^{T/\tau} - 1\right) e^{-t/\tau} & \text{für } t \geq T \end{cases}$$

Die Spannungsverläufe $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u(t)$ am Kondensator sowie (gestrichelt) die zugehören Quellsignale sind in Abbildung 5.29 gezeigt.

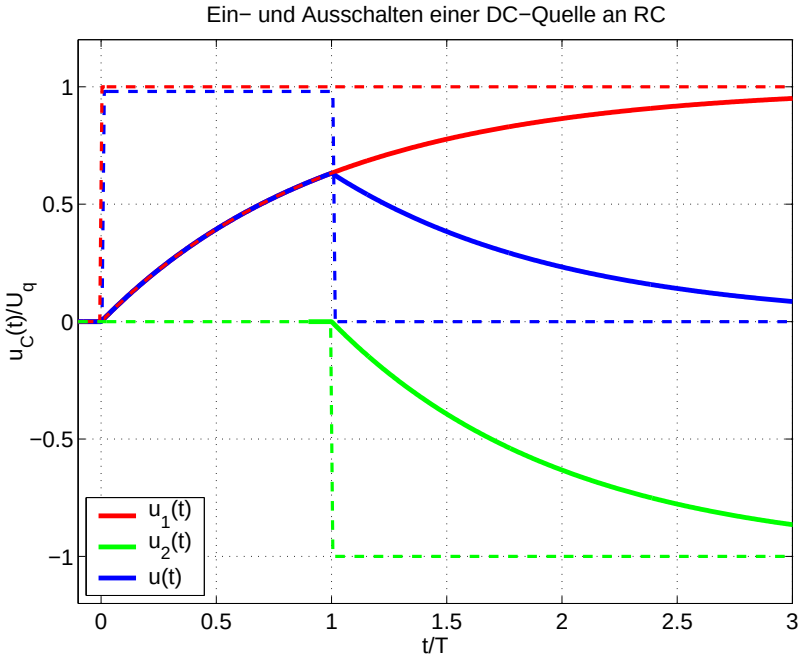


Abbildung 5.29: Der Zeitverlauf der Kondensatorspannung $u(t)$ in Abbildung 5.28 beim Ein- und Ausschalten der Spannungsquelle.

Beispiel: Umschalten der Gleichspannungsquelle am RC-Kreis

Wir betrachten eine RC-Schaltung mit Gleichspannungsquelle, die zur Zeit $t = 0$ auf einen anderen Wert springt:

$$u_{\mathrm{q}}(t) = \begin{cases} U_{\mathrm{q1}} & \text{für } t < 0 \\ U_{\mathrm{q2}} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Gesucht ist wieder die Kondensatorspannung $u(t) = u_C(t)$. Um die Quellspannung als Überlagerung zu schreiben, betrachten wir zunächst die konstante Gleichspannung

$$u_{\mathrm{q1}}(t) = U_{\mathrm{q1}} \text{ (für alle Zeiten)}$$

und addieren dazu und die eingeschaltete Gleichspannungs*differenz*

$$u_{\mathrm{q2}}(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ U_{\mathrm{q2}} - U_{\mathrm{q1}} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}.$$

Die zugehörigen Lösungen lauten:

$$u_1(t) = U_{q1} \text{ (für alle Zeiten)}$$

$$u_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ (U_{q2} - U_{q1})\left(1 - e^{-t/\tau}\right) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

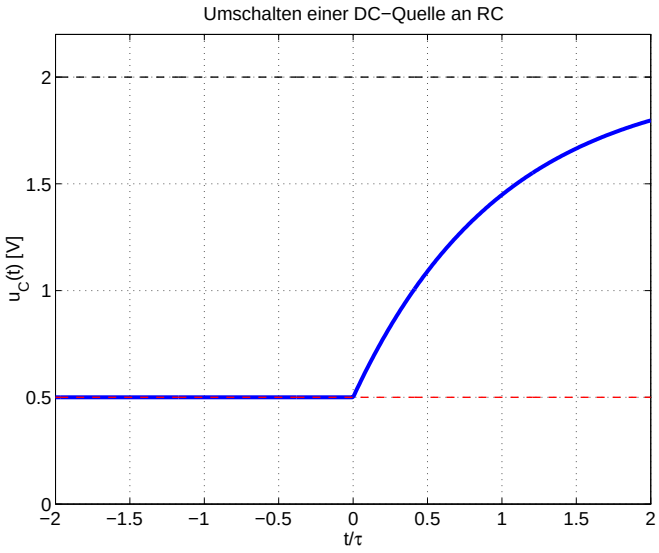


Abbildung 5.30: Kondensatorspannung $u(t) = u_C(t)$ beim Umschalten einer Gleichspannungsquelle von $0,5\,\mathrm{V}$ auf $2\,\mathrm{V}$.

Als Überlagerung ergibt sich:

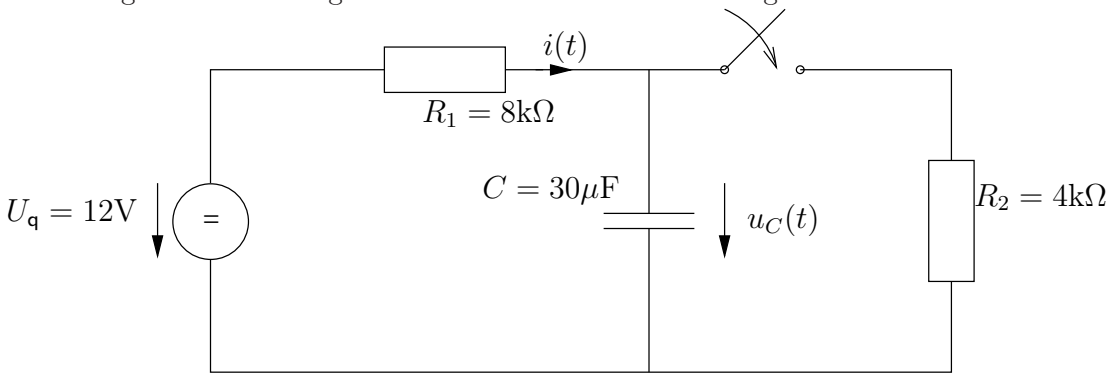
$$u(t) = \begin{cases} U_{q1} & \text{für } t < 0 \\ U_{q2} - (U_{q2} - U_{q1})\, e^{-t/\tau} & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Der Spannungsverlauf am Kondensator für speziell gewählte Werte der Gleichspannungen ist in Abbildung 5.30 gezeigt.

Aufgaben zu Kapitel 5

Aufgabe 5.1

In der folgenden Schaltung wird zur Zeit $t = 0$ der Schalter geschlossen.



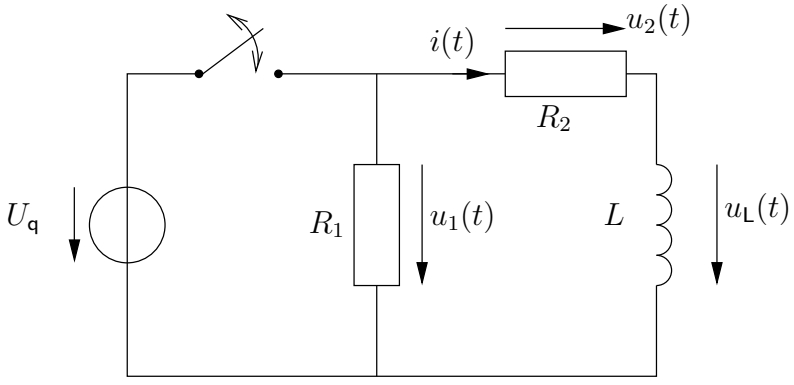
(a) Berechnen und skizzieren Sie für $t \geq 0$ den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung $u\,(t) = u_C\,(t)$ und des Stromes $i\,(t)$.

(b) Zu welchem Zeitpunkt t_1 hat die Kondensatorspannung den Wert $u_C\,(t_1) = 8$ V?

Aufgabe 5.2

In der unten skizzierten Schaltung mit Gleichspannungsquelle $U_\text{q} = 12\,\text{V}$ wird zur Zeit $t_1 = 0$ bei energieloser Spule der Schalter geschlossen und zur Zeit $t_2 = 21,5\,\text{ms}$ wieder geöffnet. Berechnen und skizzieren Sie $i(t)$, $u_L(t)$ sowie $u_2(t)$ und $u_1(t)$. Die Parameter lauten:

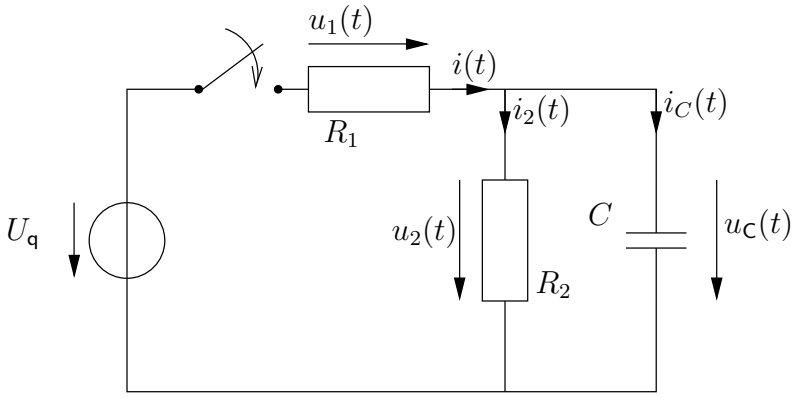
$$L = 0,12\,\text{H}\,,\quad R_1 = 40\,\Omega\,,\quad R_2 = 10\,\Omega$$



Aufgabe 5.3

Berechnen und skizzieren Sie für die unten gezeigte Schaltung mit Gleichspannungsquelle $U_\mathrm{q} = 10\,\mathrm{V}$ den zeitlichen Verlauf der Spannungen $u(t) = u_C(t)$ und $u_1(t)$, wenn der Kondensator unmittelbar vor dem Schalten (zur Zeit $t = 0$) mit einer Spannung $u_0 = 2\,\mathrm{V}$ aufgeladen ist. Gegeben sind die Größen

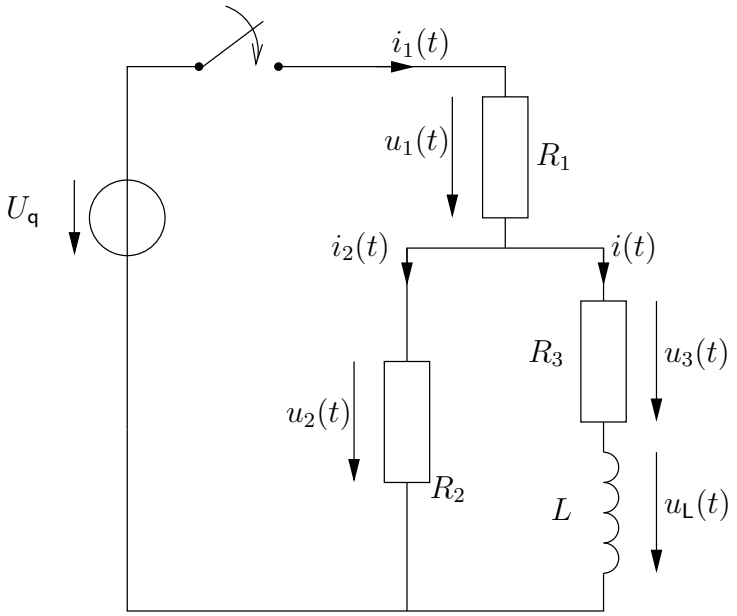
$$R_1 = 20\,\mathrm{k\Omega}\,, \quad R_2 = 30\,\mathrm{k\Omega}\,, \quad C = 50\,\mathrm{nF}\,.$$



Aufgabe 5.4

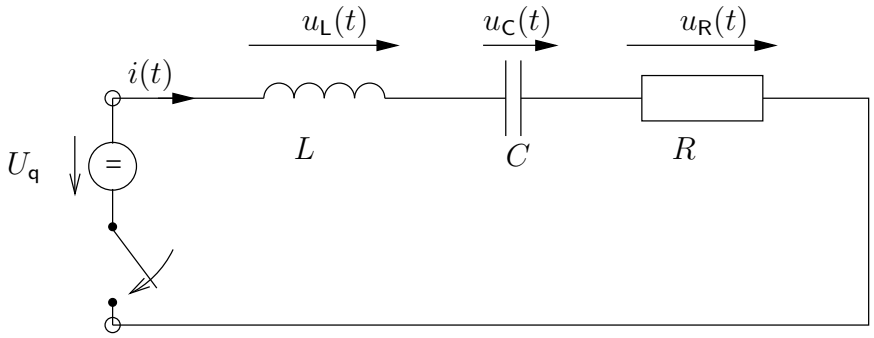
Berechnen und skizzieren Sie für die unten gezeigte Schaltung mit Gleichspannungsquelle $U_\mathrm{q} = 15,5\,\mathrm{V}$ den zeitlichen Verlauf der Ströme $i(t)$ und $i_1(t)$, wenn vor dem Einschalten das Netzwerk energielos ist. Gegeben sind die Größen

$$R_1 = 20\,\Omega\,, \quad R_2 = 30\,\Omega\,, \quad R_3 = 50\,\Omega\,, \quad L = 310\,\mathrm{mH}\,.$$



Aufgabe 5.5

Bei dem LCR-Reihenschwingkreis



mit der Gleichspannungsquelle $U_\mathrm{q} = 10\,\mathrm{V}$ wird zur Zeit $t = 0$ der Schalter geschlossen. Gegeben sind die Größen

$$L = 4\,\mathrm{mH}\,,\quad C = 20\,\mathrm{nF}\,,\quad R = 100\,\Omega\,.$$

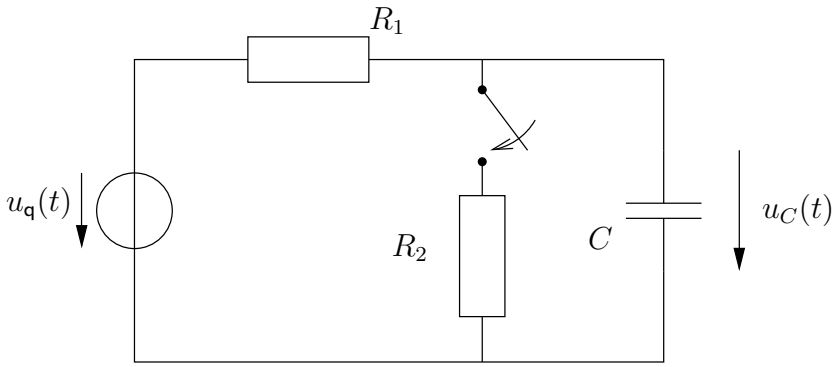
(a) Berechnen Sie den Zeitverlauf der Spannung $u(t) = u_C(t)$.

(b) Wie muss man den Wert des Widerstandes R ändern, damit der aperiodische Grenzfall vorliegt.

(c) Ersetzten Sie $R = 2000\,\Omega$ und führen Sie mit diesem Wert die Berechnungen von Teil (a) durch.

Aufgabe 5.6

Gegeben ist die folgende Schaltung



mit

$$R_1 = 10\,\mathrm{k\Omega}\,,\ R_2 = 1\,\mathrm{k\Omega}\,,\ C = 1\,\mu\mathrm{F}$$

und

$$u_q(t) = 15\sqrt{2}\,\mathrm{V}\cos\omega t,\ \ \omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}\,.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird der Schalter geschlossen. Wie lautet die Spannung $u(t) = u_C(t)$?

6 Leitungstheorie

6.1 Das Modell einer Zweidrahtleitung als Ersatzschaltbild

Elektrische Signale in der Nachrichtentechnik werden entweder über Funkwellen oder über Wellen auf Leitungen übertragen. In diesem Kapitel werden ***Zweidrahtleitungen*** behandelt. Typische Beispiele für Zweidrahtleitungen sind Koaxialkabel (zum Beispiel bei Antennenleitungen) und symmetrische Datenleitungen (*twisted pair*). Andere Leitungen (wie z.B. Hohlleiter) sind nicht Gegenstand dieser Vorlesung.

Wenn die Länge elektrischer Leitungen nicht vernachlässigbar klein ist, so spielen nicht nur Leistungsverluste durch Ohmsche Widerstände eine Rolle, sondern auch Kapazitäten und Induktivitäten. Zwischen den beiden Adern der (Zweidraht-) Leitung gibt es Kapazitäten und Verluste durch Ohmsche Leitwerte, entlang der Leitung gibt es Induktivitäten und Verluste durch Ohmsche Widerstände. Wir nehmen an, dass die Leitung überall gleich gebaut ist, also jedes kleine Leitungsstück einer bestimmten Länge die gleichen elektrischen Eigenschaften hat. Man definiert deshalb die sogenannten Leiterbeläge R', L', G', C'. Dies sind der Ohmsche Widerstand, die Induktivität, der Leitwert und die Kapazität *pro Längeneinheit*. Ein Leiterstück der Länge Δx besitzt also die Kapazität $C'\Delta x$ zwischen den den beiden Drähten. Der Leitwert $G'\Delta x$ zwischen den den beiden Drähten kommt dadurch zustande, dass das Füllmedium kein idealer Isolator ist. Der Ohmsche Widerstand $R'\Delta x$ des Leitungsstücks ergibt sich, weil die Drähte keine idealen Leiter sind. Die Induktivität $L'\Delta x$ kommt dadurch zustande, dass die stromdurchflossenen Leiter ein Magnetfeld erzeugen, welches wieder eine Spannung induziert.

Das Ersatzschaltbild einer Zweidrahtleitung für ein kleines Leitungsstück der Länge Δx zwischen x und $x + \Delta x$ ist in Abbildung 6.1 gezeigt.

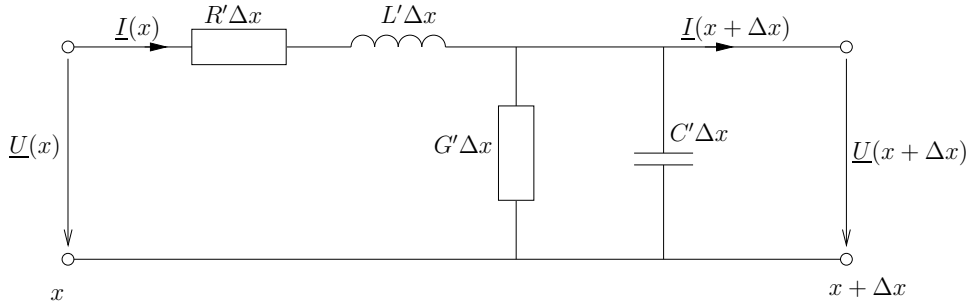


Abbildung 6.1: Ersatzschaltbild für ein kleines Leitungsstück einer Zweidrahtleitung.

6.2 Aufstellen der Leitungsgleichungen

Am linken Ende des Leitungsstücks in Abbildung 6.1 liegt die Spannung $\underline{U}\,(x)$, am rechten Ende die Spannung $\underline{U}\,(x+\Delta x)$. Aus der Maschenregel folgt:

$$\underline{U}\,(x) = \left(R'\Delta x + j\omega L'\Delta x\right)\,\underline{I}\,(x) + \underline{U}\,(x+\Delta x)$$

Wir formen die obige Gleichung um und erhalten

$$\frac{\underline{U}\,(x+\Delta x) - \underline{U}\,(x)}{\Delta x} = -\left(R' + j\omega L'\right)\,\underline{I}\,(x)\ .$$

Im Grenzübergang $\Delta x \to 0$ ergibt dies

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\underline{U}\,(x) = -\left(R' + j\omega L'\right)\,\underline{I}\,(x)}\,. \tag{6.1}$$

Am linken Ende des Leitungsstücks fließt der Strom $\underline{I}\,(x)$, am rechten Ende der Strom $\underline{I}\,(x+\Delta x)$. Aus der Knotenregel folgt:

$$\underline{I}\,(x) = \left(G'\Delta x + j\omega C'\Delta x\right)\,\underline{U}\,(x+\Delta x) + \underline{I}\,(x+\Delta x)$$

Wir formen diese Gleichung um und erhalten

$$\frac{\underline{I}\,(x+\Delta x) - \underline{I}\,(x)}{\Delta x} = -\left(G' + j\omega C'\right)\,\underline{U}\,(x+\Delta x)$$

Im Grenzübergang $\Delta x \to 0$ ergibt dies

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\underline{I}\,(x) = -\left(G' + j\omega C'\right)\,\underline{U}\,(x)} \tag{6.2}$$

Die Gleichung (6.1) und (6.2) bilden ein Paar von gekoppelten linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung für die beiden unbekannten Größen Strom und Spannung. Man kann daraus ungekoppelte Differentialgleichungen 2. Ordnung jeweils für Strom und Spannung machen. Dazu leitet man die erste Differentialgleichung (6.1) noch einmal ab, setzt dann in diesen Ausdruck die zweite Differentialgleichung ein und erhält so eine Differentialgleichung 2. Ordnung für die Spannung:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\underline{U}(x) = \left(R' + j\omega L'\right)\left(G' + j\omega C'\right)\,\underline{U}(x)} \tag{6.3}$$

Wir schreiben die beiden komplexen Zeiger $R' + j\omega L'$ und $G' + j\omega C'$ in Exponentialdarstellung als[1]

$$R' + j\omega L' = \sqrt{R'^2 + (\omega L')^2}\mathrm{e}^{j\varphi_1}\,,\ 0 \leq \varphi_1 \leq 90^\circ \tag{6.4}$$

und

$$G' + j\omega C' = \sqrt{G'^2 + (\omega C')^2}\mathrm{e}^{j\varphi_2}\,,\ 0 \leq \varphi_2 \leq 90^\circ\,. \tag{6.5}$$

Diese in Abbildung 6.2 blau und rot dargestellten komplexen Zeiger liegen beide im I. Quadranten[2]. Das Produkt $(R' + j\omega L')\,(G' + j\omega C')$ liegt deshalb in der oberen Halbebene. Dann hat die Gleichung

$$z^2 = \left(R' + j\omega L'\right)\left(G' + j\omega C'\right) = \sqrt{R'^2 + (\omega L')^2}\sqrt{G'^2 + (\omega C')^2}\mathrm{e}^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

zwei Lösungen z_1 und z_2, wobei z_1 im I. Quadranten liegt und $z_2 = -z_1$ im III. Quadranten. Wir wählen die erste dieser beiden komplexen Wurzeln und nennen sie $\gamma = z_1$. Der Zeiger dazu ist in Abbildung 6.2 schwarz eingezeichnet. Er liegt genau auf der Winkelhalbierenden zwischen den Zeigern zu $R' + j\omega L'$ und $G' + j\omega C'$. Sein Winkel ist das arithmetische Mittel $(\varphi_1 + \varphi_2)/2$ der Winkel dieser beiden Zeiger, und sein Betrag ist das geometrische Mittel $\sqrt{|R' + j\omega L'|\,|G' + j\omega C'|}$ ihrer Beträge. In Exponentialdarstellung geschrieben lautet der Zeiger für diese komplexe Wurzel:

$$\gamma = \sqrt[4]{R'^2 + (\omega L')^2}\sqrt[4]{G'^2 + (\omega C')^2}\mathrm{e}^{j(\varphi_1+\varphi_2)/2} \tag{6.6}$$

[1] Siehe Vorlesung zur Ingenieurmathematik 1 [8].

[2] Genau genommen muss man die beiden Halbachsen hinzunehmen: Im verlustfreien Fall sind $R' + j\omega L'$ und $G' + j\omega C'$ rein imaginär. Für $\omega = 0$ sind diese Größen rein reell, aber dieser letztere Fall ist hier nicht interessant.

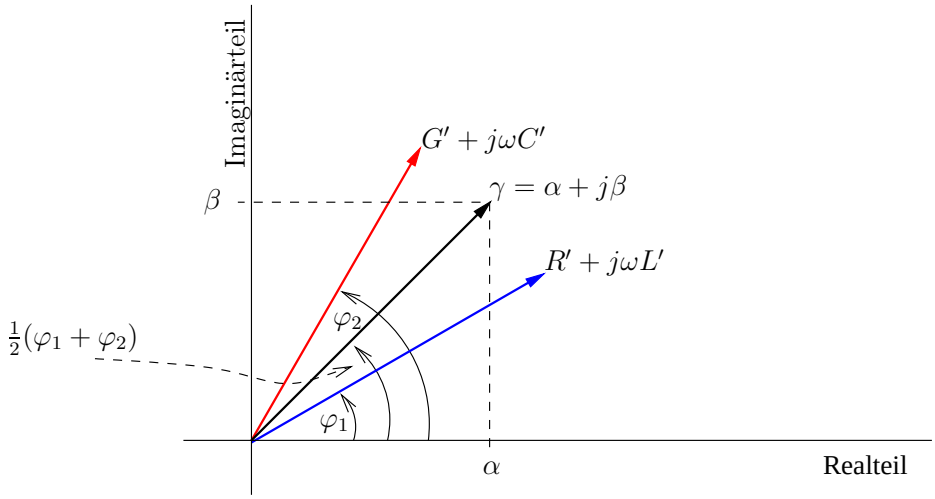


Abbildung 6.2: Die Ausbreitungskonstante γ als Zeiger in der komplexen Ebene.

Ihr Realteil wird mit α und der Imaginärteil mit β bezeichnet. Die kartesische Darstellung lautet dann:

$$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta} \text{ mit } \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0 \tag{6.7}$$

Man bezeichnet γ als **Ausbreitungskonstante**. Ihre Bedeutung wird im folgenden Abschnitt erklärt. In der Elektrotechnik schreibt man γ meist einfach als Quadratwurzel:

$$\boxed{\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')\,(G' + j\omega C')}} \tag{6.8}$$

Hierbei muss man natürlich erklären, welche der beiden komplexen Wurzeln gemeint ist. Dies haben wir eben getan, als wir die Wurzel im I. Quadranten ausgewählt haben. Die Differentialgleichung (6.3) für die Spannung lautet jetzt

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\underline{U}\,(x) - \gamma^2\,\underline{U}\,(x) = 0} \tag{6.9}$$

Diese Differentialgleichung besitzt die allgemeine Lösung

$$\boxed{\underline{U}\,(x) = \underline{U}_{\mathsf{h}}\mathrm{e}^{-\gamma x} + \underline{U}_{\mathsf{r}}\mathrm{e}^{\gamma x}} \tag{6.10}$$

mit den später noch durch die Anfangsbedingungen festzulegenden Integrationskonstanten $\underline{U}_{\mathsf{h}}$ und $\underline{U}_{\mathsf{r}}$. Dabei steht h für *hinlaufende* Welle und r für *rücklaufende* Welle.

6.3 Die Beschreibung von Wellen auf Leitungen

Um zu verstehen, dass die Lösung (6.10) tatsächlich die Ausbreitung als gedämpfte Welle beschreibt, betrachten wir das entsprechende Zeitsignal

$$u(x,t) = u_{\mathsf{h}}(x,t) + u_{\mathsf{r}}(x,t)$$

mit

$$\begin{aligned} u_{\mathsf{h}}(x,t) &= \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\underline{U}_{\mathsf{h}}\mathrm{e}^{-\gamma x}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \\ &= \sqrt{2}U_{\mathsf{h}}\mathrm{e}^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x + \varphi_{\mathsf{h}}) \end{aligned} \tag{6.11}$$

und

$$\begin{aligned} u_{\mathsf{r}}(x,t) &= \mathrm{Re}\left\{\sqrt{2}\underline{U}_{\mathsf{r}}\mathrm{e}^{\gamma x}\mathrm{e}^{j\omega t}\right\} \\ &= \sqrt{2}U_{\mathsf{r}}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos(\omega t + \beta x + \varphi_{\mathsf{r}}) \end{aligned} \tag{6.12}$$

Gleichung (6.11) beschreibt eine von links nach rechts (in positive x-Richtung) laufende Welle mit **Wellenzahl** β. Sie ist exponentiell gedämpft mit der **Dämpfungskonstanten** α. Diese beiden Kennzahlen der Welle sind in der **Ausbreitungskonstante** $\gamma = \alpha + j\beta$ zusammen gefasst.

Gleichung (6.12) beschreibt eine von rechts nach links (in negative x-Richtung) laufende Welle mit der selben Dämpfung und Wellenzahl. Eine ausführliche Darstellung zur Wellenausbreitung findet sich im Studienbuch Physik 2 [4]. Einige wichtige Begriffe werden im Folgenden wiederholt.

Wellenzahl, Wellenlänge und Phasengeschwindigkeit

Die Kreisfrequenz ω ist die Änderung des Phasenwinkels pro Zeit. Wenn f die Frequenz und $T = 1/f$ die Periode der Schwingung ist, so gilt:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \tag{6.13}$$

Die Wellenzahl β ist die *räumliche Entsprechung* dazu: Während die Kreisfrequenz den *Phasenwinkel pro Zeit* angibt, gibt die Wellenzahl β den *Phasenwinkel pro Länge* an. Die

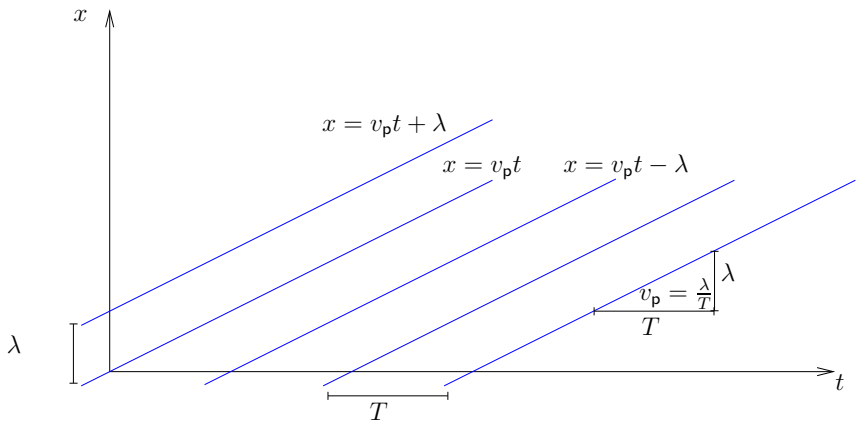


Abbildung 6.3: Darstellung einer hinlaufenden Welle im Orts- Zeitdiagramm. Die blauen Geraden kennzeichnen jeweils das Wellenmaximum bei den Phasenzuständen 0, 2π, 4π,... usw. Mit fortschreitender Zeit bewegt sich der Phasenzustand in positive x-Richtung fort.

Wellenlänge λ ist die Strecke, in der sich die Phase um 2π ändert. Deshalb gilt

$$\boxed{\beta = \frac{2\pi}{\lambda}}. \tag{6.14}$$

Die Einheit ist also [rad/m] oder [°/m]. Die Ausbreitung der hinlaufenden Welle ist in Abbildung 6.3 veranschaulicht: Zustände konstanter Phase

$$\omega t - \beta x = \text{konst.} \;\Leftrightarrow\; \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} = \text{konst.}$$

entsprechen jeweils Geradengleichungen

$$x = \frac{\lambda}{T}t + \text{konst.}$$

mit Steigung

$$\boxed{v_\mathsf{p} = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{\beta}} \text{ bzw. } \boxed{v_\mathsf{p} = \lambda f}. \tag{6.15}$$

Ein Zustand fester Phase bewegt sich also mit der Geschwindigkeit v_p im Raum fort. Deshalb wird diese Größe als ***Phasengeschwindigkeit*** v_p bezeichnet.

Die Phasengeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle im Vakuum ist die Lichtgeschwindigkeit $c_0 = 3 \cdot 10^8\,\text{m/s}$. Zweidrahtleitungen sind aber etwas anderes als das

Vakuum. Die Phasengeschwindigkeit v_p für eine Leitung ist meist deutlich kleiner als die Lichtgeschwindigkeit und hängt von den Materialkonstanten C', L', R' und G' ab. Das Zahlenverhältnis

$$\mathsf{VF} = \frac{v_\mathsf{p}}{c_0} \tag{6.16}$$

wird als Verkürzungsfaktor bezeichnet. Um diesen Faktor ist die Wellenlänge bei der Ausbreitung in der Leitung gegenüber der Ausbreitung im Vakuum verkürzt.

Für die anschauliche Vorstellung ist die Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

oft besser geeignet als die Wellenzahl β. Entlang eines Leitungsstücks der Länge l dreht sich die *Phase* der *hinlaufenden Welle*

$$\underline{U}\,(x) = \underline{U}_\mathsf{h}\mathrm{e}^{-\gamma x} = \underline{U}_\mathsf{h}\mathrm{e}^{-\alpha x}\mathrm{e}^{-j\beta x}$$

um den Winkel

$$\boxed{\beta l = 2\pi\frac{l}{\lambda} = 360^\circ\frac{l}{\lambda}}$$

im *mathematisch negativen Drehsinn*, d.h. im *Uhrzeigersinn.*

Merke: Die Anzahl der Umdrehungen innerhalb eines Leitungsstücks der Länge l ist gleich dieser Länge, gemessen in Einheiten der Wellenlänge.

Das Spannungsverhältnis

$$z(l) = \frac{\underline{U}\,(x+l)}{\underline{U}\,(x)} = \mathrm{e}^{-\alpha l}\mathrm{e}^{-j2\pi l/\lambda}$$

für die hinlaufende Welle ist in Abbildung 6.4 als komplexe Ortskurve mit l als dem Parameter dargestellt. Der Einfachheit halber wurde die Wellenlänge $\lambda = 1\,\mathrm{m}$ und die Dämpfung $\alpha = 1\,\mathrm{dB/m}$ gewählt[3]. Nach $l = \lambda = 1\,\mathrm{m}$ hat sich die Phase um 360° im Uhrzeigersinn gedreht, und die Leistung ist um 1 dB gedämpft. Dies entspricht einer Amplitudendämpfung auf etwa 90%. Nach $l = 3\,\mathrm{m}$ hat sich die Phase dreimal um den

[3]Die Dämpfung wird gleich im Folgenden diskutiert.

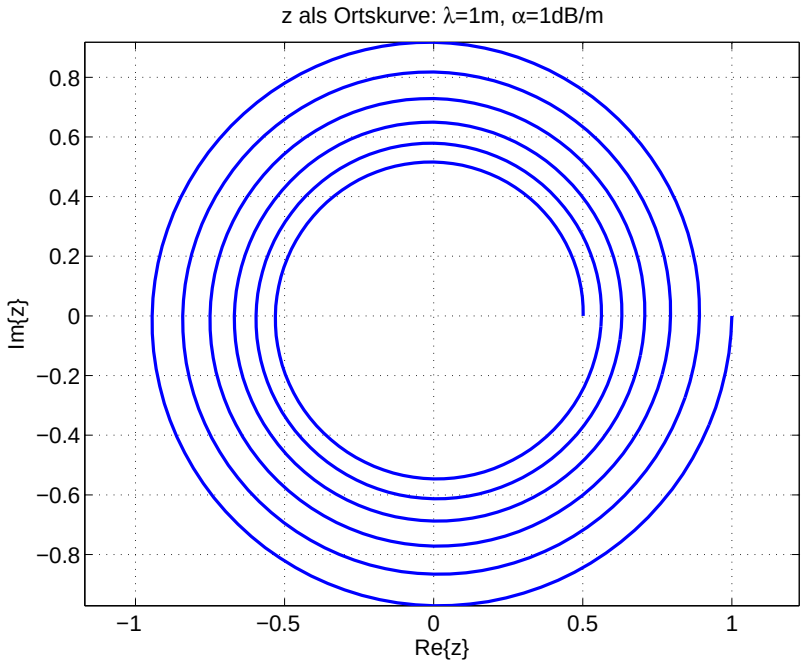


Abbildung 6.4: Ortskurve für die Amplitudendämpfung und die Phasendrehung durch die Wellenausbreitung der hinlaufenden Welle in Abhängigkeit vom Parameters l (Leitungslänge).

Vollkreis gedreht, und die Leistung ist um 3 dB gedämpft, was $1/\sqrt{2} = 70{,}7\%$ der Amplitude entspricht.

Dämpfungskonstante

Die durch die Gleichungen (6.11) und (6.12) beschriebene Wellenausbreitung ist exponentiell gedämpft mit der **Dämpfungskonstanten** α. Pro Meter verringert sich die Amplitude also immer um den selben Faktor. Die Einheit von α ist [1/m]. Üblicherweise gibt man die Dämpfung in einem der beiden logarithmischen Maße **Dezibel** (dB) oder **Neper** (Np) an. Das *Dezibel-Maß* verwendet den *Zehnerlogarithmus des Leistungsverhältnisses* und das *Neper-Maß* den *natürlichen Logarithmus des Amplitudenverhältnisses*. Zur Definition dieser beiden Maße betrachten wir die hinlaufende Welle

$$\underline{U}\,(x) = \underline{U}_{\mathrm{h}} \mathrm{e}^{-\gamma x}\,.$$

Entlang eines Leitungsstücks der Länge Δx wird die *Amplitude* der Welle um den Faktor

$$\frac{U(x+\Delta x)}{U(x)} = \mathrm{e}^{-\alpha \Delta x}$$

gedämpft. Die Dämpfung in **Neper** (Np) ist der natürliche Logarithmus des Amplitudenverhältnisses:

$$\boxed{\frac{U(x)}{U(x+\Delta x)}\,[\mathrm{Np}] = \ln\left(\frac{U(x)}{U(x+\Delta x)}\right) = \alpha \Delta x} \tag{6.17}$$

Man gibt dann die Dämpfung α in Np/m (Neper pro Meter) oder Np/km an. Die Angabe der Dämpfung in Neper ist bei Leitungen eigentlich die natürlichere Variante. Trotzdem wird die Dämpfung – z.B. in Datenblättern – meist in Dezibel angegeben, weil das in der Elektrotechnik vertrauter ist. Dabei ist zu beachten, dass sich Dezibelzahlen auf die Leistung beziehen und die Leistung quadratisch von der Amplitude abhängt. Die Dämpfung in **Dezibel** ist das Zehnfache des Zehnerlogarithmus des Leistungsverhältnisses:

$$\boxed{\left(\frac{U(x)}{U(x+\Delta x)}\right)^2\,[\mathrm{dB}] = 10\,\mathrm{lg}\left(\frac{U(x)}{U(x+\Delta x)}\right)^2 = 20\,\mathrm{lg}(\mathrm{e}) \cdot \alpha \Delta x \approx 8,686\,\alpha \Delta x} \tag{6.18}$$

In Worten: Wenn man die Neper-Zahl $\alpha \Delta x$ der Dämpfung mit 8,686 multipliziert, erhält man die Dezibel-Zahl. Man gibt die Dämpfung dann oft in dB/m (Dezibel pro Meter) an. Einige wichtige Dezibel-Werte sowie die zugehörigen Leistungsverhältnisse $(U(x)/U(x+\Delta x))^2$ und Amplitudenverhältnisse $U(x)/U(x+\Delta x)$ sowie die Neper-Werte sind in Tabelle 6.1 aufgelistet. Eine Dämpfung um 3 dB entspricht dem Faktor 2 in der Leistung und dem Faktor $\sqrt{2}$ in der Amplitude. Die **3-dB-Länge** $l_{1/2}$ einer Leitung ist definiert als die Länge, bei der die Leistung der hinlaufenden Welle um den Faktor 2 gedämpft ist. Es gilt

$$\mathrm{e}^{-2\alpha l_{1/2}} = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; \boxed{l_{1/2} = \frac{\ln 2}{2\alpha} \approx \frac{0,35}{\alpha}} \tag{6.19}$$

Bei der 3-dB Länge beträgt die Dämpfung also ungefähr 0,35 Np, was man auch in der Tabelle überprüfen kann. Bei 6 dB Dämpfung ist die Amplitude um den Faktor 2 gedämpft, was ungefähr 0,7 Np entspricht.

Tabelle 6.1: Einige wichtige Dezibelwerte, Leistungsverhältnisse, Amplitudenverhältnisse und Neperwerte.

Dezibelzahl $10\lg\left(\frac{U(x)}{U(x+\Delta x)}\right)^2$	Leistungsverhältnis $\left(\frac{U(x)}{U(x+\Delta x)}\right)^2$	Amplitudenverhältnis $\frac{U(x)}{U(x+\Delta x)}$	Neperzahl $\ln\left(\frac{U(x)}{U(x+\Delta x)}\right)$
0 dB	1	1	0 Np
1 dB	$1,26 \approx 5/4$	1,12	0,12 Np
2 dB	$1,58 \approx (5/4)^2$	1,26	0,23 Np
3 dB	2,00	1,41	0,35 Np
4 dB	$2,51 \approx 5/2$	1,58	0,46 Np
5 dB	$3,16 \approx \pi$	1,78	0,58 Np
6 dB	$3,98 \approx 4$	2,00	0,69 Np
7 dB	$5,01 \approx 5$	2,24	0,81 Np
8 dB	$6,31 \approx (5/2)^2$	2,51	0,92 Np
9 dB	$7,94 \approx 8$	2,82	1,04 Np
10 dB	10	3,16	1,15 Np

Praktische Berechnung der Ausbreitungskonstanten

Für praktische Berechnungen wird die Ausbreitungskonstante oft folgendermaßen geschrieben:

$$\boxed{\gamma = j\omega\sqrt{L'C'}\sqrt{\left(1 - j\frac{R'}{\omega L'}\right)\left(1 - j\frac{G'}{\omega C'}\right)}} \quad (\text{für } \omega > 0) \tag{6.20}$$

Diesen Ausdruck erhält man durch formale Wurzelumformungen aus Gleichung (6.8):

$$\begin{aligned}
\gamma &= \sqrt{(R' + j\omega L')\,(G' + j\omega C')} \\
&= \sqrt{(j\omega)^2\, L'C' \left(1 - j\frac{R'}{\omega L'}\right)\left(1 - j\frac{G'}{\omega C'}\right)} \\
&= j\omega\sqrt{L'C'}\sqrt{\left(1 - j\frac{R'}{\omega L'}\right)\left(1 - j\frac{G'}{\omega C'}\right)}
\end{aligned}$$

Die komplexe Wurzel

$$\sqrt{\left(1-j\frac{R'}{\omega L'}\right)\left(1-j\frac{G'}{\omega C'}\right)}$$

muss jetzt so verstanden werden, dass γ im richtigen (d.h. im ersten) Quadranten liegt, siehe Abbildung 6.2. Der Radikand $\left(1-j\frac{R'}{\omega L'}\right)\left(1-j\frac{G'}{\omega C'}\right)$ ist ein komplexer Zeiger in der unteren Halbebene. Die beiden Wurzeln liegen dann im 4. und im 2. Quadranten. Multiplikation mit $j\omega$ dreht den jeweiligen Zeiger in den 1. bzw. 3. Quadranten. Also muss man die erstere der beiden Wurzeln nehmen.

Merke: Man muss in Gleichung (6.20) die Wurzel im 4. Quadranten nehmen (d.h. die mit einem Winkel zwischen 0° und -90°), damit γ im 1. Quadranten liegt.

Näherung für die Ausbreitungskonstante bei schwach verlustbehafteten Leitungen

Der Ausdruck (6.20) für die Ausbreitungskonstante ist deshalb günstig für die praktische Anwendung, weil die Leitungsverluste häufig klein sind. Leitungen werden als schwach verlustbehaftet bezeichnet, wenn die beiden folgenden Annahmen gültig sind:

$$\boxed{\frac{R'}{\omega L'} \ll 1} \text{ und } \boxed{\frac{G'}{\omega C'} \ll 1}. \tag{6.21}$$

Dann gilt zunächst folgenden Näherung:

$$\begin{aligned}\sqrt{\left(1-j\frac{R'}{\omega L'}\right)\left(1-j\frac{G'}{\omega C'}\right)} &= \sqrt{1-j\left(\frac{R'}{\omega L'}+\frac{G'}{\omega C'}\right)+\frac{R'}{\omega L'}\cdot\frac{G'}{\omega C'}} \\ &\approx \sqrt{1-j\left(\frac{R'}{\omega L'}+\frac{G'}{\omega C'}\right)}\end{aligned}$$

Für diesen Wurzelausdruck kann man folgende Näherung verwenden, die im Anhang B genauer erläutert ist:

$$\sqrt{1+jy} \approx 1+\frac{1}{2}jy \quad \text{für} \quad |y| \ll 1 \tag{6.22}$$

Daraus ergibt sich mit dem Ausdruck (6.20) die folgende Näherung für die Ausbreitungskonstante:

$$\begin{aligned}\gamma &\approx j\omega\sqrt{L'C'}\left(1-\frac{j}{2}\left(\frac{R'}{\omega L'}+\frac{G'}{\omega C'}\right)\right)\\ &= \sqrt{L'C'}\left(\frac{R'}{2L'}+\frac{G'}{2C'}+j\omega\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\gamma \approx \frac{1}{2}\left(R'\sqrt{\frac{C'}{L'}}+G'\sqrt{\frac{L'}{C'}}\right)+j\omega\sqrt{L'C'}} \tag{6.23}$$

Die Dämpfungskonstante und die Wellenzahl sind dann näherungsweise gegeben durch

$$\boxed{\alpha \approx \frac{1}{2}\left(R'\sqrt{\frac{C'}{L'}}+G'\sqrt{\frac{L'}{C'}}\right)} \text{ und } \boxed{\beta \approx \omega\sqrt{L'C'}}. \tag{6.24}$$

In der Praxis gilt oft

$$G'\sqrt{\frac{L'}{C'}} \ll R'\sqrt{\frac{C'}{L'}},$$

so dass der zweite Term in dem Ausdruck (6.24) für die Dämpfungskonstante α vernachlässigbar ist.

Bei schwacher Dämpfung gilt für die Wellenlänge und die Phasengeschwindigkeit:

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \approx \frac{1}{f\sqrt{L'C'}}} \text{ und } \boxed{v_\mathsf{p} = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{1}{\sqrt{L'C'}}} \tag{6.25}$$

Berechnung des Stroms und Definition des Wellenwiderstands

Die ortsabhängige Spannung auf der Leitung ist nach Gleichung (6.10) gegeben durch

$$\underline{U}\,(x) = \underline{U}_\mathsf{h}\mathrm{e}^{-\gamma x} + \underline{U}_\mathsf{r}\mathrm{e}^{\gamma x}\,.$$

Den Strom erhält man, indem man diese Lösung in die Gleichung (6.1)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\underline{U}\,(x) = -\left(R'+j\omega L'\right)\,\underline{I}\,(x)$$

einsetzt und die Ableitung bildet. Man erhält so den Ausdruck

$$\begin{aligned} \underline{I}(x) &= -\frac{1}{(R' + j\omega L')} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \underline{U}(x) \\ &= \frac{\gamma}{(R' + j\omega L')} \left(\underline{U}_{\mathsf{h}} \mathrm{e}^{-\gamma x} - \underline{U}_{\mathsf{r}} \mathrm{e}^{\gamma x} \right) . \end{aligned} \tag{6.26}$$

Der Vorfaktor auf der rechten Seite wird als **Wellenwiderstand** der Leitung definiert:

$$\underline{Z}_{\mathsf{L}} := \frac{R' + j\omega L'}{\gamma} \tag{6.27}$$

Für den wichtigen Spezialfall, dass es nur eine hinlaufende Welle gibt (d.h. $\underline{U}_{\mathsf{r}} = 0$), gilt also

$$\underline{Z}_{\mathsf{L}} = \frac{\underline{U}(x)}{\underline{I}(x)} \text{ für } \underline{U}_{\mathsf{r}} = 0 .$$

Um einen einfacheren Ausdruck für den Wellenwiderstand zu bekommen, schreiben wir die komplexen Größen in Zähler und Nenner von Gleichung (6.27) entsprechend den Gleichungen (6.4) und (6.6) in exponentieller Darstellung und erhalten so aus Gleichung (6.27) folgenden Ausdruck für den Wellenwiderstand

$$\underline{Z}_{\mathsf{L}} = \sqrt[4]{\frac{R'^2 + (\omega L')^2}{G'^2 + (\omega C')^2}} \, \mathrm{e}^{j(\varphi_1 - \varphi_2)/2} . \tag{6.28}$$

mit

$$\varphi_1 = \arctan \frac{L'}{R'} \text{ und } \varphi_2 = \arctan \frac{C'}{G'} .$$

Beide Winkel liegen zwischen 0° und 90°. Der Phasenwinkel des Wellenwiderstandes $(\varphi_1 - \varphi_2)/2$ liegt also zwischen -45° und 45°. In Abbildung 6.5 ist der Zeiger für den Wellenwiderstand $\underline{Z}_{\mathsf{L}}$ (grün) zusammen mit der Ausbreitungskonstante γ (schwarz) und den beiden Zeigern $R' + j\omega L'$ (blau) und $G' + j\omega C'$ (rot) eingezeichnet. Bei üblichen Leitungen gilt meist $\varphi_1 < \varphi_2$, so dass der Zeiger einen negativen Imaginärteil besitzt, so wie in der Abbildung eingezeichnet ist. In der Elektrotechnik ist es üblich, einfach

$$\boxed{\underline{Z}_{\mathsf{L}} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}} \tag{6.29}$$

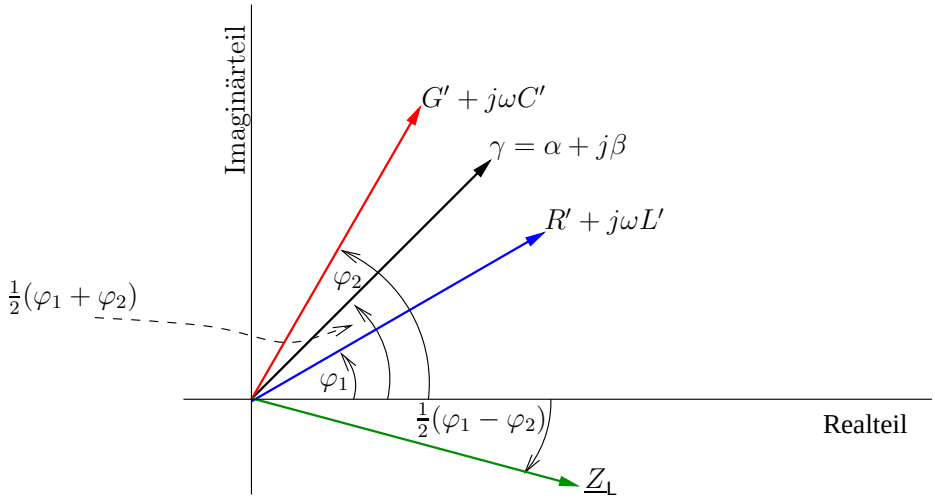


Abbildung 6.5: Der Wellenwiderstand $\underline{Z}_\mathrm{L}$ als Zeiger in der komplexen Ebene.

zu schreiben und stillschweigend davon auszugehen, dass klar ist, welche komplexe Wurzel gemeint ist (nämlich die in der rechten Halbebene). Für praktische Rechnungen nützlich ist auch die folgende Schreibweise:

$$\boxed{\underline{Z}_\mathrm{L} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \sqrt{\frac{1 - j\frac{R'}{\omega L'}}{1 - j\frac{G'}{\omega C'}}}} \tag{6.30}$$

Manchmal sind in diesem Ausdruck die Terme

$$\frac{R'}{\omega L'} \text{ und } \frac{G'}{\omega C'}$$

so klein, dass sie vernachlässigt werden können. Dies gilt immer im Grenzfall hoher Frequenzen:

$$\underline{Z}_\mathrm{L} \to \sqrt{\frac{L'}{C'}} \text{ für } \omega \to \infty \tag{6.31}$$

Der Grenzwert ist gerade der Wellenwiderstand

$$\boxed{\underline{Z}_{\mathrm{L},\infty} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}} \tag{6.32}$$

für den verlustfreien Fall.

Der Wellenwiderstand ist (neben der Ausbreitungskonstanten) *die entscheidende Kenn-*

größe der Leitung. In der Consumer-Elektronik (Fernsehen, Radio) ist der Standard-Wellenwiderstand 75 Ω, in der professionellen Technik 50 Ω. Zum Beispiel besitzen Antennenkabel in diesen beiden Bereichen jeweils den genannten Wellenwiderstand.

Die hin- und rücklaufende Welle für den Strom wird durch Gleichung (6.26) beschrieben. Setzt man dort den den Wellenwiderstand ein, so erhält man:

$$\boxed{\underline{I}(x) = \frac{1}{\underline{Z}_{\mathsf{L}}} \left(\underline{U}_{\mathsf{h}} \mathrm{e}^{-\gamma x} - \underline{U}_{\mathsf{r}} \mathrm{e}^{\gamma x} \right)} \tag{6.33}$$

Man beachte bei der rücklaufenden Welle das umgekehrte Vorzeichen für die Stromrichtung.

Der Wellenwiderstand bei schwach verlustbehafteten Leitungen

Für schwach verlustbehaftete Leitungen mit

$$\boxed{\frac{R'}{\omega L'} \ll 1} \text{ und } \boxed{\frac{G'}{\omega C'} \ll 1} \tag{6.34}$$

lässt sich der Ausdruck (6.30) durch einen einfacheren Ausdruck annähern. Wenn man die Formel

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + ...$$

für die geometrische Reihe nach der 1. Ordnung abbricht, so erhält man die Näherung

$$\frac{1}{1 - j\frac{G'}{\omega C'}} \approx 1 + j\frac{G'}{\omega C'}$$

und deshalb

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1 - j\frac{R'}{\omega L'}}{1 - j\frac{G'}{\omega C'}}} &\approx \sqrt{\left(1 - j\frac{R'}{\omega L'}\right)\left(1 + j\frac{G'}{\omega C'}\right)} \\
&= \sqrt{1 - j\left(\frac{R'}{\omega L'} - \frac{G'}{\omega C'}\right) + \frac{R'}{\omega L'} \cdot \frac{G'}{\omega C'}} \\
&\approx \sqrt{1 - j\left(\frac{R'}{\omega L'} - \frac{G'}{\omega C'}\right)} \\
&\approx 1 - \frac{j}{2}\left(\frac{R'}{\omega L'} - \frac{G'}{\omega C'}\right)
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben haben wir die selbe Näherung (6.22) verwendet wie bei der Herleitung des Näherungsausdrucks für die Ausbreitungskonstante. Für den Wellenwiderstand gilt dann die Näherungsformel:

$$\boxed{\underline{Z}_\mathsf{L} \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} \left(1 - \frac{j}{2}\left(\frac{R'}{\omega L'} - \frac{G'}{\omega C'}\right)\right)} \tag{6.35}$$

In der Praxis gilt oft

$$G'\sqrt{\frac{L'}{C'}} \ll R'\sqrt{\frac{C'}{L'}}\,,$$

so dass der zweite Term in dem obigen Ausdruck vernachlässigbar ist. Dann gilt:

$$\boxed{\underline{Z}_\mathsf{L} \approx \sqrt{\frac{L'}{C'}} \left(1 - \frac{j}{2}\frac{R'}{\omega L'}\right)} \tag{6.36}$$

Beispiel (Wellenwiderstand beim Koaxialkabel RG58): Wir berechnen für ein in der Messtechnik häufig eingesetztes Koaxialkabel mit der Bezeichnung RG58 den frequenzabhängigen Wellenwiderstand $\underline{Z}_\mathsf{L}$. Aus dem Datenblatt entnehmen wir:

$$Z_\mathsf{L} = 50\,\Omega,\ C' = 101\,\mathrm{nF/km},\ R' = 53\,\Omega/\mathrm{km}$$

Dielektrikum: Voll-PE (Polyethylen)

Die Verluste durch die (geringe) Leitfähigkeit des Dielektrikums sind bei diesem Kabel so klein, dass sie vernachlässigt werden können und man in guter Näherung $G' = 0$ setzen darf. Wie in Datenblättern üblich, bezieht sich der oben genannte Wellenwiderstand $Z_\mathsf{L} = 50\,\Omega$ auf die Näherung bei hohen Frequenzen. Genauer müsste man also für Z_L den Grenzwert in Gleichung (6.32) hinschreiben:

$$Z_{\mathsf{L},\omega\to\infty} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = 50\,\Omega$$

Mit diesen Angaben kann der Induktivitätsbelag zu

$$L' = C' Z^2_{\mathsf{L},\omega\to\infty} = 101\,\mathrm{nF/km} \cdot (50\,\Omega)^2 = 253\,\mu\mathrm{H/km}$$

bestimmt werden. Damit folgt

$$\frac{R'}{\omega L'} = \frac{1}{2\pi f} \cdot \frac{53\,\Omega/\mathrm{km}}{253\,\mu\mathrm{H/km}} = \frac{33,34}{f/\mathrm{kHz}}.$$

Die (erste) Bedingung (6.34) ist also nur für

$$f \gg 33,34\,\mathrm{kHz} \tag{6.37}$$

erfüllt. Für solche Frequenzen darf man mit der Näherungfomel (6.36) rechnen, die für die hier eingesetzten Parameter folgendermaßen lautet:

$$\underline{Z}_\mathsf{L} \approx \underline{Z}_\mathsf{L}^{(\mathsf{approx})} = 50\,\Omega \left(1 - j\frac{16,67}{f/\mathrm{kHz}}\right) \tag{6.38}$$

Wenn die Bedingung (6.37) für die Frequenz nicht erfüllt ist, muss man mit der ursprünglichen Formel (6.30) rechnen, die für für $G' = 0$ und die hier eingesetzten Parameter auf folgenden Ausdruck führt:

$$\underline{Z}_\mathsf{L} = \sqrt{1 - j\frac{R'}{\omega L'}} = \sqrt{1 - j\frac{33,34}{f/\mathrm{kHz}}} \tag{6.39}$$

Die Werte nach dieser Formel sind in der zweiten Spalte von Tabelle 6.2 für Frequenzen zwischen 1 kHz und 100 kHz eingetragen. Für niedrige Frequenzen deutlich unter 33, 34 kHz liegt der Radikand in Gleichung (6.39) fast auf der negativen imaginären Achse. Der Winkel des Radikanden ist also nahezu -90°, und der Winkel von $\underline{Z}_\mathsf{L}$ ist daher nahezu -45°. Deshalb haben für kleine Frequenzen Realteil und Imaginärteil ungefähr den gleichen Betrag. Je höher die Frequenz, um so kleiner wird der Betrag des Imaginärteils[4]. Für Frequenzen deutlich über 33, 34 kHz lässt sich die Näherungsformel (6.38) verwenden. Die Werte nach dieser Formel sind in der dritten Spalte von Tabelle 6.2 eingetragen. Offenbar ist diese Formel schon für 50 kHz als grobe Näherung brauchbar, aber eine gute Näherung ergibt sich erst ab ca. 100 kHz. Ab etwa dieser Frequenz muss man allerdings auch die Frequenzabhängigkeit von R' und L' auf Grund des sogenannten Skineffekts berücksichtigen. Dieser Effekt wird in der Vorlesung *Hochfrequenztechnik* ausführlicher diskutiert.

[4] In der Hochfrequenztechnik geht man praktisch immer von einem reellen Wellenwiderstand aus.

Tabelle 6.2: Wellenwiderstand bei dem RG58-Koaxialkabel

f	$\underline{Z}_\mathsf{L}/\Omega$	$\underline{Z}_\mathsf{L}^{(\mathsf{approx.})}/\Omega$
1 kHz	$207,4 - 201,3j$	*
10 kHz	$74,9 - 55,8j$	*
20 kHz	$60,7 - 34,4j$	$50 - j41,8$
50 kHz	$52,5 - 15,9j$	$50 - j16,7$
80 kHz	$51,0 - 10,2j$	$50 - j10,4$
100 kHz	$50,7 - 8,2j$	$50 - j8,4$

6.4 Betrachtungen zum Abschluss der Leitung

Es ist üblich, die Leiterkoordinate x so zu definieren, dass am Ende (Abschluss) der Leitung $x = 0$ gilt. Alle x-Werte innerhalb der Leitung sind dann negativ. Ein Leitungsstück

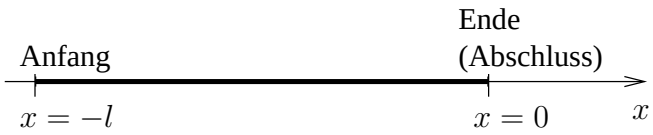


Abbildung 6.6: Die Leiterkoordinate x.

der Länge l beginnt also bei $x = -l$.

Berechnung der Integrationskonstanten $\underline{U}_\mathsf{h}$ und $\underline{U}_\mathsf{r}$

Wir schreiben für Spannung und Strom am Abschluss der Leitung

$$\underline{U}_0 = \underline{U}\,(0) \text{ und } \underline{I}_0 = \underline{I}\,(0)$$

und setzen dies in die Gleichungen

$$\boxed{\underline{U}\,(x) = \underline{U}_\mathsf{h}\mathrm{e}^{-\gamma x} + \underline{U}_\mathsf{r}\mathrm{e}^{\gamma x}} \tag{6.40}$$

und

$$\boxed{\underline{I}\,(x) = \frac{1}{\underline{Z}_\mathsf{L}}\left(\underline{U}_\mathsf{h}\mathrm{e}^{-\gamma x} - \underline{U}_\mathsf{r}\mathrm{e}^{\gamma x}\right)} \tag{6.41}$$

ein. Für $x = 0$ folgt daraus

$$\begin{aligned} \underline{U}_0 &= \underline{U}_\mathsf{h} + \underline{U}_\mathsf{r} \\ \underline{Z}_\mathsf{L}\underline{I}_0 &= \underline{U}_\mathsf{h} - \underline{U}_\mathsf{r}\,. \end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man die Integrationskonstanten aus den Anfangsbedingungen:

$$\boxed{\underline{U}_\mathsf{h} = \frac{1}{2}\left(\underline{U}_0 + \underline{Z}_\mathsf{L}\underline{I}_0\right)} \tag{6.42}$$

$$\boxed{\underline{U}_\mathsf{r} = \frac{1}{2}\left(\underline{U}_0 - \underline{Z}_\mathsf{L}\underline{I}_0\right)} \tag{6.43}$$

Abschlusswiderstand und Reflexionsfaktor

An den Klemmen am Abschluss der Leitung ist der (i.A. komplexe) **Abschlusswiderstand** $\underline{Z}_\mathsf{A}$ angeschlossen, siehe Abbildung 6.7. Es gilt

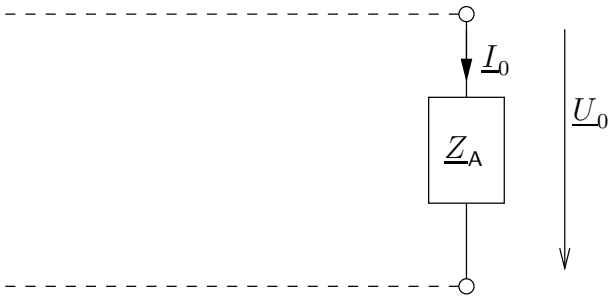


Abbildung 6.7: Abschlusswiderstand.

$$\boxed{\underline{U}_0 = \underline{Z}_\mathsf{A}\underline{I}_0} \tag{6.44}$$

Der **Reflexionsfaktor** r ist definiert als das Verhältnis zwischen rücklaufender Welle und hinlaufender Welle. Aus den Gleichungen (6.42), (6.43) und (6.44) folgt

$$\boxed{r = \frac{\underline{U}_\mathsf{r}}{\underline{U}_\mathsf{h}} = \frac{\underline{Z}_\mathsf{A} - \underline{Z}_\mathsf{L}}{\underline{Z}_\mathsf{A} + \underline{Z}_\mathsf{L}} = \frac{1 - \frac{\underline{Z}_\mathsf{L}}{\underline{Z}_\mathsf{A}}}{1 + \frac{\underline{Z}_\mathsf{L}}{\underline{Z}_\mathsf{A}}}} \tag{6.45}$$

Folgende drei Spezialfälle für den Abschlusswiderstand sind sehr wichtig:

1. Der **angepasste Abschluss**: Der Abschlusswiderstand ist gleich dem Wellenwiderstand. Dann verschwindet der Reflexionsfaktor

$$\boxed{\underline{Z}_\mathsf{A} = \underline{Z}_\mathsf{L} \;\Rightarrow\; r = 0}, \tag{6.46}$$

und es gibt keine rücklaufende Welle:

$$\underline{U}_\mathsf{r} = 0$$

Dies ist normalerweise der erwünschte Fall, wenn am Leitungsende ein Verbraucher angeschlossen ist. Schließlich soll die Welle ihre Energie beim Verbraucher abgeben und nicht wieder zurück laufen. Wenn auf der Leitung *Signale* übertragen werden (wie zum Beispiel bei einem Antennenkabel) und der Abschluss nicht angepasst ist, führt dies zu Interferenzen, die im schlimmsten Fall den Empfang unmöglich machen. Bei einer Leitung mit angepasstem Abschluss gilt wegen der Gleichungen (6.40) und (6.41) an jedem Punkt x der Leitung

$$\boxed{\underline{U}\,(x) = \underline{Z}_\mathsf{L}\,\underline{I}\,(x)}. \tag{6.47}$$

2. Der **Leerlauf-Abschluss**: Der Abschlusswiderstand ist unendlich. Wenn man in Gleichung (6.45) den Limes $\underline{Z}_\mathsf{A} \to \infty$ durchführt, ergibt sich $r \to 1$:

$$\boxed{\underline{Z}_\mathsf{A} \to \infty \;\Rightarrow\; r = 1} \tag{6.48}$$

Für die Spannung ergibt dies eine rücklaufende Welle mit

$$\underline{U}_\mathsf{r} = \underline{U}_\mathsf{h}\,.$$

Am Leitungsende überlagern sich hin- und rücklaufende Welle konstruktiv zu

$$\underline{U}_0 = \underline{U}_\mathsf{h} + \underline{U}_\mathsf{r}\,.$$

Die **Spannung** ist eine **stehende Welle** mit **offenem Ende**. Für den rücklaufenden Strom gilt

$$\underline{I}_\mathsf{r} = -\underline{I}_\mathsf{h}\,.$$

Am Leitungsende überlagern sich hin- und rücklaufende Welle destruktiv zu

$$\underline{I}_0 = 0\,,$$

wie es bei einem Leerlauf natürlich zu erwarten ist. Der **Strom** ist also eine **stehende Welle** mit **geschlossenem Ende**.

3. Der **Kurzschluss**: Bei $\underline{Z}_\mathsf{A} = 0$ wird der Reflexionsfaktor in Gleichung (6.45) zu -1:

$$\boxed{\underline{Z}_\mathsf{A} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; r = -1}$$

Für die Spannung ergibt dies eine rücklaufende Welle mit

$$\underline{U}_\mathsf{r} = -\underline{U}_\mathsf{h}\,,$$

die sich am Leitungsende destruktiv überlagert zu

$$\underline{U}_0 = 0\,,$$

wie es bei einem Kurzschluss der Fall sein muss. Die **Spannung** ist also eine **stehende Welle** mit **geschlossenem Ende**. Für den Strom gilt dagegen

$$\underline{I}_0 = \underline{I}_\mathsf{h} + \underline{I}_\mathsf{r}\,.$$

Der **Strom** ist eine **stehende Welle** mit **offenem Ende**.

Verlustfreie Leitungen

Eine wichtiger Spezialfall sind Leitungen, deren Verluste vernachlässigt werden können, für die man also

$$\boxed{R' = 0} \text{ und } \boxed{G' = 0}$$

setzen darf. Hier gilt

$$\alpha = 0$$

für den Dämpfungsfaktor, und die Ausbreitungskonstante ist rein imaginär:

$$\gamma = j\beta = j\omega\sqrt{L'C'}$$

d.h.

$$\boxed{\beta = \omega\sqrt{L'C'}}. \tag{6.49}$$

Der Wellenwiderstand

$$\underline{Z}_{\mathsf{L}} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

ist dann rein reell und gegeben durch

$$\boxed{\underline{Z}_{\mathsf{L}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}}. \tag{6.50}$$

Spannung und Strom sind im verlustfreien Fall ungedämpfte Wellen:

$$\underline{U}\,(x) = \underline{U}_{\mathsf{h}}\mathrm{e}^{-j\beta x} + \underline{U}_{\mathsf{r}}\mathrm{e}^{j\beta x}$$

$$\underline{I}\,(x) = \frac{1}{\underline{Z}_{\mathsf{L}}}\left(\underline{U}_{\mathsf{h}}\mathrm{e}^{-j\beta x} - \underline{U}_{\mathsf{r}}\mathrm{e}^{j\beta x}\right)$$

Wir betrachten eine Leitung der Länge l und bezeichnen die Größen am Anfang der Leitung ($x = -l$) mit $\underline{U}_1$ und $\underline{I}_1$, wie dies in Abbildung 6.8 gezeigt ist. Außerdem wird

Abbildung 6.8: Größen am Anfang und Ende der verlustfreien Leitung.

die Wellenzahl β durch die Wellenlänge λ ausgedrückt, weil dies die anschaulichere Größe ist und deshalb in der Praxis eher verwendet wird:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} \;\Rightarrow\; \beta l = 2\pi\frac{l}{\lambda}$$

Spannung $\underline{U}_1$ und Strom $\underline{I}_1$ am Anfang der Leitung sollen nun durch Spannung $\underline{U}_0$ und Strom $\underline{I}_0$ am Ende der Leitung ausgedrückt werden. Hierzu werden für die Integrations-

konstanten $\underline{U}_\mathsf{h}$ und $\underline{U}_\mathsf{r}$ die Formeln (6.42) und (6.43) eingesetzt:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{U}_\mathsf{h}\mathrm{e}^{j2\pi l/\lambda} + \underline{U}_\mathsf{r}\mathrm{e}^{-j2\pi l/\lambda} \\ &= \frac{1}{2}\left(\underline{U}_0\mathrm{e}^{j2\pi l/\lambda} + \underline{Z}_\mathsf{L}\underline{I}_0\mathrm{e}^{j2\pi l/\lambda} + \underline{U}_0\mathrm{e}^{-j2\pi l/\lambda} - \underline{Z}_\mathsf{L}\underline{I}_0\mathrm{e}^{-j2\pi l/\lambda}\right) \\ &= \underline{U}_0\cos(2\pi l/\lambda) + j\underline{Z}_\mathsf{L}\underline{I}_0\sin(2\pi l/\lambda)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{Z}_\mathsf{L}\underline{I}_1 &= \underline{U}_\mathsf{h}\mathrm{e}^{j2\pi l/\lambda} - \underline{U}_\mathsf{r}\mathrm{e}^{-j2\pi l/\lambda} \\ &= \frac{1}{2}\left(\underline{U}_0\mathrm{e}^{j2\pi l/\lambda} + \underline{Z}_\mathsf{L}\underline{I}_0\mathrm{e}^{j2\pi l/\lambda} - \underline{U}_0\mathrm{e}^{-j2\pi l/\lambda} + \underline{Z}_\mathsf{L}\underline{I}_0\mathrm{e}^{-j2\pi l/\lambda}\right) \\ &= j\underline{U}_0\sin(2\pi l/\lambda) + \underline{Z}_\mathsf{L}\underline{I}_0\cos(2\pi l/\lambda)\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich:

$$\boxed{\underline{U}_1 = \underline{U}_0\cos(2\pi l/\lambda) + j\underline{Z}_\mathsf{L}\underline{I}_0\sin(2\pi l/\lambda)}$$

$$\boxed{\underline{I}_1 = j\frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_\mathsf{L}}\sin(2\pi l/\lambda) + \underline{I}_0\cos(2\pi l/\lambda)}$$

Man nennt dies die **Vierpol-Kettengleichungen** der Leitung. Aus diesen Gleichungen kann man folgern: Wenn man am Ende der Leitung eine Impedanz anschließt, misst man am Anfang der Leitungen eine ganz andere, durch diese Gleichungen transformierte Impedanz. Die Transformation lässt sich steuern über den Wellenwiderstand $\underline{Z}_\mathsf{L}$ sowie durch l/λ, also die Leitungslänge l gemessen in Einheiten der Wellenlänge λ.

Dieser Zusammenhang zwischen Eingangs- und Abschlussimpedanz soll nun hergeleitet werden. Es sei eine verlustfreie Leitung mit Abschlussimpedanz $\underline{Z}_\mathsf{A}$ gegeben. Es gilt

$$\underline{U}_0 = \underline{Z}_\mathsf{A}\underline{I}_0$$

und damit

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_0\left(\cos(2\pi l/\lambda) + j\frac{\underline{Z}_\mathsf{L}}{\underline{Z}_\mathsf{A}}\sin(2\pi l/\lambda)\right)$$

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_0\left(\cos(2\pi l/\lambda) + j\frac{\underline{Z}_\mathsf{A}}{\underline{Z}_\mathsf{L}}\sin(2\pi l/\lambda)\right).$$

Für den Eingangswiderstand $\underline{Z}_\mathsf{E}$ folgt dann

$$\begin{aligned}\underline{Z}_\mathsf{E} &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \\ &= \frac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0}\frac{\cos(2\pi l/\lambda) + j\frac{\underline{Z}_\mathsf{L}}{\underline{Z}_\mathsf{A}}\sin(2\pi l/\lambda)}{\cos(2\pi l/\lambda) + j\frac{\underline{Z}_\mathsf{A}}{\underline{Z}_\mathsf{L}}\sin(2\pi l/\lambda)}\end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{Z}_\mathsf{E} = \underline{Z}_\mathsf{A}\frac{1 + j\frac{\underline{Z}_\mathsf{L}}{\underline{Z}_\mathsf{A}}\tan(2\pi l/\lambda)}{1 + j\frac{\underline{Z}_\mathsf{A}}{\underline{Z}_\mathsf{L}}\tan(2\pi l/\lambda)}} \tag{6.51}$$

Es werden nun die drei wichtigen Spezialfälle für den Abschlusswiderstand diskutiert.

1. **Angepasster Abschluss:**

   $$\boxed{\underline{Z}_\mathsf{A} = \underline{Z}_\mathsf{L} \;\Rightarrow\; \underline{Z}_\mathsf{E} = \underline{Z}_\mathsf{L}}$$

   Hierzu braucht man nicht unbedingt Gleichung (6.51) zu verwenden, denn bei angepasstem Abschluss gilt $\underline{U} = \underline{Z}_\mathsf{L}\underline{I}$ an jeder Stelle der Leitung, also auch sowohl am Anfang als auch am Ende.

2. **Leerlauf:** Hierzu schreiben wir

   $$\underline{Z}_\mathsf{E} = \underline{Z}_\mathsf{L}\frac{1 + j\frac{\underline{Z}_\mathsf{L}}{\underline{Z}_\mathsf{A}}\tan(2\pi l/\lambda)}{\frac{\underline{Z}_\mathsf{L}}{\underline{Z}_\mathsf{A}} + j\tan(2\pi l/\lambda)}$$

   und führen den Grenzübergang $\underline{Z}_\mathsf{A} \to \infty$ durch:

   $$\boxed{\underline{Z}_\mathsf{A} \to \infty \;\Rightarrow\; \underline{Z}_\mathsf{E} = -j\underline{Z}_\mathsf{L}\cot(2\pi l/\lambda)}$$

3. **Kurzschluss:** Hierzu schreiben wir

   $$\underline{Z}_\mathsf{E} = \frac{\underline{Z}_\mathsf{A} + j\underline{Z}_\mathsf{L}\tan(2\pi l/\lambda)}{1 + j\frac{\underline{Z}_\mathsf{A}}{\underline{Z}_\mathsf{L}}\tan(2\pi l/\lambda)}$$

   und setzten $\underline{Z}_\mathsf{A} = 0$:

   $$\boxed{\underline{Z}_\mathsf{A} = 0 \;\Rightarrow\; \underline{Z}_\mathsf{E} = j\underline{Z}_\mathsf{L}\tan(2\pi l/\lambda)}$$

Der Wellenwiderstand

$$\underline{Z}_\mathsf{L} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = Z_\mathsf{L}$$

einer verlustlosen Leitung ist reell. Deshalb ist

$$\underline{Z}_\mathsf{E} = jX_\mathsf{E}$$

bei Leelauf und Kurzschluss rein imaginär, und der Blindwiderstand X_E ist gegeben durch

$$\boxed{X_\mathsf{E} = -Z_\mathsf{L} \cot(2\pi l/\lambda) \;\; \text{(Leerlauf)}}$$

bzw. durch

$$\boxed{X_\mathsf{E} = Z_\mathsf{L} \tan(2\pi l/\lambda) \;\; \text{(Kurzschluss)}}\,.$$

Dieser Blindwiderstand ist in Abbildung 6.9 dargestellt. Abhängig von der Leitungslänge

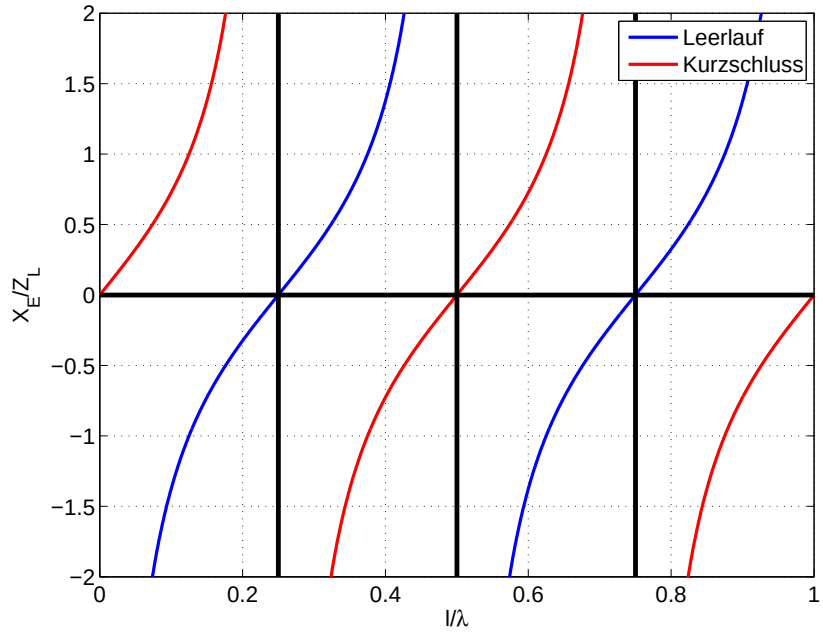


Abbildung 6.9: Der Blindwiderstand X_E (normiert auf den Wellenwiderstand Z_L) am Eingang einer verlustfreien Leitung in Abhängigkeit von der normierten Leitungslänge l/λ für einen Abschluss mit Leerlauf bzw. Kurzschluss.

kann dieser induktiv ($X_\mathsf{E} > 0$) oder kapazitiv ($X_\mathsf{E} < 0$) sein und dabei alle Werte annehmen.

Aufgaben zu Kapitel 6

Aufgabe 6.1

Eine 200 m lange und am Ende angepasste Leitung wird gespeist mit einer Wechselspannung $\underline{U}_1 = 10\,\mathrm{V}$ der Frequenz $f = 200\,\mathrm{kHz}$. Gegeben sind die Leitungsbeläge

$$R' = 150\,\mathrm{m\Omega/m}\,,\quad L' = 300\,\mathrm{nH/m}\,,\quad G' = 1\,\mathrm{pS/m}\,,\quad C' = 40\,\mathrm{pF/m}$$

Berechnen Sie:

(a) Den Wellenwiderstand $\underline{Z}_\mathsf{L}$ und die Ausbreitungskonstante γ der Leitung.

(b) Die Wellenlänge und die Dämpfung in Dezibel pro Kilometer.

(c) Die Größen $\underline{U}_0$, $\underline{I}_0$ und $\underline{S}_0$ am Ende der Leitung.

(d) Die Größen $\underline{I}_A$ und $\underline{S}_A$ am Anfang der der Leitung.

Aufgabe 6.2

Gegeben ist eine Leitung der Länge $\ell = 100$ m mit angepasstem Abschluss und den Belägen

$$\begin{aligned} G' &= 30\,\mathrm{pS/m}\,, & R' &= 360\,\mathrm{m\Omega/m} \\ C' &= 100\,\mathrm{pF/m}\,, & L' &= 360\,\mathrm{nH/m} \end{aligned}$$

Eingespeist wird ein Signal der Frequenz $f = 16\,\mathrm{MHz}$ und der Spannung $\underline{U}_1 = 12\,\mathrm{V}$. Berechnen Sie

(a) Den Wellenwiderstand $\underline{Z}_\mathsf{L}$, die Ausbreitungskonstante γ sowie die Wellenlänge λ.

(b) Den Strom $\underline{I}_1$ und die Leistung $\underline{S}_1$ am Anfang der Leitung.

(c) Die Spannung $\underline{U}_0$, den Strom $\underline{I}_0$ und die Leistung $\underline{S}_0$ am Ende der Leitung.

(d) Die maximal mögliche Leitungslänge $\ell_{1/2}$, wenn die Verlustleistung durch das Kabel maximal die Hälfte der am Anfang eingespeisten Leistung betragen darf.

Anmerkung zu Aufgabe 6.2: Alle Winkel können wahlweise in Grad- oder Bogenmaß angegeben werden. Es ist keine hohe Rechengenauigkeit erforderlich. Man kann sogar weitgehend auf den Taschenrechner verzichten!

Anhang

A Wie zeichnet man exponentielle Vorgänge?

Zahlreiche Vorgänge in der Technik werden durch abfallende Exponentialfunktionen beschrieben. In dieser Vorlesung kommen sie in zwei Themenbereichen vor: Bei den Ausgleichsvorgängen und bei der exponentiellen Dämpfung auf Leitungen. Wenn man die Graphen dieser Funktionen mit der Hand skizzieren will, muss man ein paar Zahlenwerte kennen, damit die gezeichnete Kurve den betrachteten Vorgang qualitativ richtig wiedergibt und wenigsten die Größenordnungen passen.

Wir betrachten als Beispiele den Zeitverlauf der Kondensatorentladung

$$u(t) = U_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{t}/\tau} \quad (t \geq 0) \tag{A.1}$$

und den der Kondensatorladung

$$u(t) = U_\mathrm{q} \left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{t}/\tau}\right) \quad (t \geq 0) \tag{A.2}$$

mit der **Zeitkonstanten** $\tau = RC$. Beide Verläufe sind in Abbildung A.1 gezeigt. In den Plots wurde auf der Abszisse die dimensionslose skalierte Größe $x = t/\tau$ und auf der Ordinate die dimensionslose skalierte Größe $y = u/U_0$ bzw. $y = u/U_\mathrm{q}$ aufgetragen. Dies ist oft sinnvoll, – vor allem, wenn man es mit "krummen Werten" zu tun hat. Wegen der Skalierung brauchen wir also nur noch die Graphen für

$$y = \mathrm{e}^{-x} \tag{A.3}$$

bzw.

$$y = 1 - \mathrm{e}^{-x} \tag{A.4}$$

zu betrachten. Beide hängen durch eine Spiegelung auf einfache Weise miteinander zusammen.

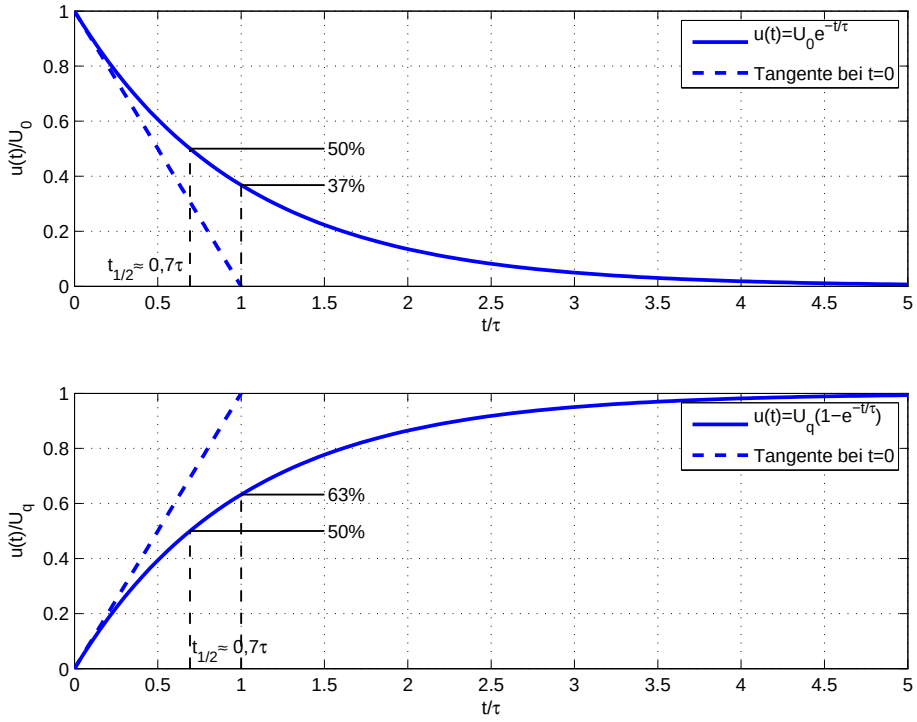


Abbildung A.1: Einige Größen, die das Skizzieren von abfallenden Exponentialfunktionen erleichtern. Oben: Als Beispiel die Kurve der Kondensatorentladung und unten die Aufladekurve.

Um in den Kurven den Wert bei $t = \tau$ einzeichnen zu können, muss in den Gleichungen (A.3) und (A.4) der Wert $x = 1$ eingesetzt werden. Es gilt

$$\mathrm{e}^{-1} \approx 0,37 \text{ bzw } 1 - \mathrm{e}^{-1} \approx 0,63\,.$$

Also hat sich zur Zeit $t = \tau$ der Kondensator auf ca. 37% entladen bzw. ist bereits zu 63% aufgeladen[1]. Dieser Zeitpunkt ist brauchbar für eine Skizze, weil sich der einzuzeichnende Spannungswert irgendwo in der Mitte befindet. Der Vorgang dauert unendlich lange, aber man sagt oft, dass er bei $t = 5\tau$ praktisch abgeschlossen ist. In der Tat ist er dann zu etwa 99% abgeschlossen, denn es gilt

$$1 - \mathrm{e}^{-5} \approx 0,9933\,.$$

Dieser Punkt eignet sich aber nicht zum Einzeichnen in eine Handskizze.

[1] Bei einer Handskizze auf kariertem Papier kann man in guter Näherung statt dessen die Werte $3/8 = 0,375$ und $5/8$=0,625 verwenden.

Statt der Zeitkonstanten τ wird oft auch die Halbwertszeit $t_{1/2}$ verwendet. Dies ist die Zeit, zu der bereits die Hälfte der Ladung geflossen ist. Aus

$$\mathrm{e}^{-t_{1/2}/\tau} = \frac{1}{2}$$

folgt

$$\boxed{t_{1/2} = \tau \ln 2 \approx 0,69\,\tau}\,.$$

Für eine Handskizze reicht meist der grob gerundete Wert

$$\boxed{t_{1/2} \approx 0,7\,\tau}\,.$$

Eine weitere nützliche Größe ist die Tangente an die Kurve bei $t = 0$. Die Ableitung der Funktion in Gleichung (A.3) hat bei $x = 0$ den Wert $y' = -1$ und die Ableitung der Funktion in Gleichung (A.4) hat bei $x = 0$ den Wert $y' = 1$. In Abbildung A.1 sind die entsprechenden Tangenten eingezeichnet. Bei $t = \tau$ schneidet die Tangente im oberen Bild die Abszisse und im unteren Bild die Asymptote[2].

Für eine Handskizze ist es meist ausreichend, nur für einen der beiden Zeitpunkte $t = \tau$ oder $t = t_{1/2}$ den (Spannungs-) Wert einzuzeichnen. Wenn man beide verwendet, wird es schwieriger, die Kurve zu zeichnen. Es ist meist nicht unbedingt sinnvoll, die Tangente zu skizzieren. Aber man kann mit dem Lineal prüfen, ob die entsprechende Gerade bei $t = 0$ ungefähr tangential verläuft.

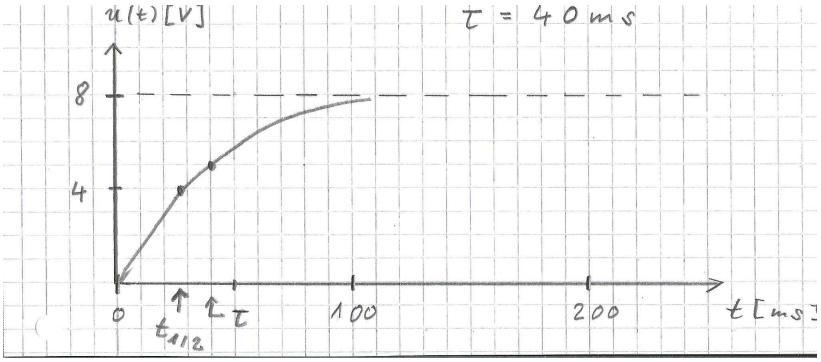


Abbildung A.2: Handskizze für eine Kondensatoraufladung.

Eine Handskizze für die Kondensatoraufladung mit $\tau = 40\,\mathrm{ms}$ und $U_\mathrm{q} = 8\,\mathrm{V}$ ist in

[2] Man kann sich das z.B. so merken: Wenn die Entladekurve linear wäre, wäre der Kondensator bei $t = \tau$ entladen.

Abbildung A.2 gezeigt. Die Kurve ist nicht sehr genau, aber das ist Absicht. Sie soll wirklich nur eine qualitative Skizze sein, wie man sie zur Veranschaulichung oft zeichnet.

B Näherung der komplexen Wurzel

In der Leitungstheorie kommen bei der Berechnung der Ausbreitungskonstanten γ und des Wellenwiderstandes $\underline{Z}_\mathrm{L}$ Ausdrücke der Gestalt

$$\sqrt{1+jy}$$

vor, wobei y eine reelle Zahl ist. In dem obigen Ausdruck ist immer diejenige der beiden komplexen Wurzeln gemeint, die einem Zeiger in der *rechten Halbebene* entspricht. Oft (im Fall hinreichend kleiner Dämpfung) ist der Betrag von y dabei viel kleiner als 1. In diesem Fall gilt folgende Näherung, die sich aus der Taylor-Reihe 1. Ordnung ergibt:

$$\sqrt{1+jy} \approx 1 + \frac{1}{2}jy \quad (\text{für } |y| \ll 1) \tag{B.1}$$

Anschaulicher als die formale Taylor-Reihe und besser zu merken ist die folgende Überlegung, die in Abbildung B.1 geometrisch dargestellt ist: In der Abbildung sieht man, dass

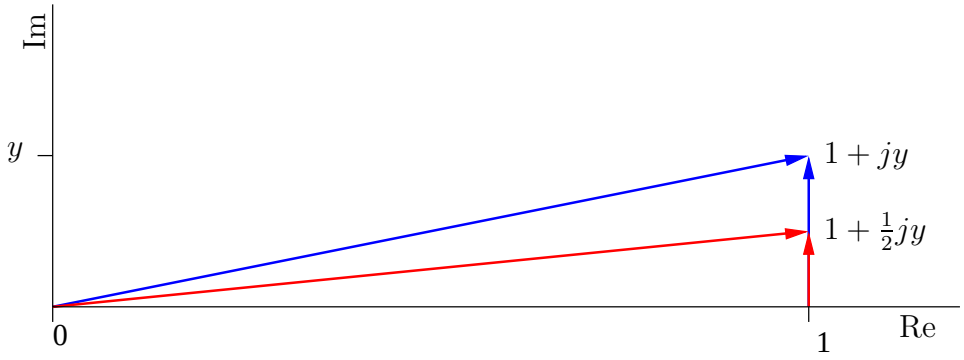


Abbildung B.1: Veranschaulichung der Approximation für die komplexe Wurzel.

y für kleine Werte ungefähr gleich dem Bogenstück des Einheitskreises ist, also gleich dem Winkel im Bogenmaß. Wurzelziehen halbiert diesen Winkel und damit den Wert von y. In Formeln ausgedrückt: Für $|y| \ll 1$ gilt näherungsweise

$$\sin y \approx y \text{ und } \cos y \approx 1$$

und damit

$$1 + jy \approx \mathrm{e}^{jy} .$$

Zieht man daraus die Wurzel, so erhält man

$$\sqrt{1 + jy} \approx \mathrm{e}^{jy/2} \approx 1 + \frac{1}{2} jy$$

und damit die Näherung (B.1). In Tabelle B.1 ist der relative Fehler der Näherung an-

Tabelle B.1: Fehler (in Prozent) für die Wurzelnäherung (B.1)

$\lvert y \rvert$	Realteil	Imaginärteil
0,1	0,12%	0,12%
0,2	0,49%	0,49%
0,3	1,08%	1,09%
0,4	1,87%	1,91%
0,5	2,83%	2,91%

gegeben. Für $|y| \leq 0,4$ bleibt der Fehler für Realteil wie für Imaginärteil unter 2%. Die Formel ist daher – zumindest für eine grobe Abschätzung – über einen weiten Bereich gut zu gebrauchen, – selbst wenn $|y|$ gar nicht mehr so viel kleiner ist all 1.

Faustregel für die Übungsaufgaben: Da es in den Übungen mehr um das Verständnis grundsätzlichen Zusammenhänge geht als um numerisch präzise Ergebnisse, sind wir hier mit eine Genauigkeit von ca. 2% zufrieden und verwenden die obige Näherung bis $|y| = 0,4$.

C Lösungen zu den Aufgaben

Anmerkungen zum numerischen Rechnen

In den Übungen zur Elektrotechnik wird mit Zahlen gerechnet, und man darf dabei auch den Taschenrechner verwenden. Da die Übungen vor allem zum Verständnis der Zusammenhänge dienen sollen, brauchen die Ergebnisse nicht extrem präzise zu sein. Sie sollen so genau sein, dass man sie sinnvoll vergleichen kann.

Zur Orientierung beim numerischen Rechnen sollen folgende Faustregeln dienen:

1. Der richtige physikalische Sinn des Ansatzes ist wichtiger als das numerische Ergebnis.
2. Die Größenordnung ist wichtiger als der genaue Zahlenwert.
3. Prüfe, ob die Zahlenwerte physikalisch plausibel sind und zu einander passen.
4. Für die gesuchten Größen ist im Endergebnis eine Genauigkeit von 2% ausreichend. Geringfügig schlechtere Genauigkeit ist auch nicht schlimm.
5. Für Phasenwinkel von Strömen, Spannungen, Impedanzen und komplexen Leistungen gilt: Im Endergebnis sind bei Angaben in Gradmaß [°] ganzzahlige Werte ausreichend.

Aufgaben zu Kapitel 1

Lösung zu Aufgabe 1.1

Zunächst wird der komplexe Zeiger der Quellspannung berechnet. Es gilt:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\,\underline{U}_\mathsf{q} &= 12\,\mathrm{V}\,(1-j)\\ &= 12\,\mathrm{V}\,\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-j45^\circ}\end{aligned}$$

Also ist

$$\underline{U}_\mathsf{q} = 12\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-j45^\circ}$$

(a) Die Spannung an der Spule erhält man nach der Spannungsteilerregel zu

$$\underline{U}_\mathsf{L} = \frac{j\omega L}{R+j\omega L}\underline{U}_\mathsf{q}\,.$$

Die Übertragungsfunktion lautet

$$H_\mathsf{L}(\omega) = \frac{j\omega L}{R+j\omega L}$$

bzw.

$$\boxed{H_\mathsf{L}(\omega) = \frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}} \text{ mit } \boxed{\tau = \frac{L}{R} = 1\,\mathrm{ms}}.$$

Exponentialdarstellung:

$$H_\mathsf{L}(\omega) = |H_\mathsf{L}(\omega)|\,\mathrm{e}^{j\phi}$$

Amplitudenquadrat:

$$\boxed{|H_\mathsf{L}(\omega)|^2 = \frac{(\omega\tau)^2}{1+(\omega\tau)^2}}$$

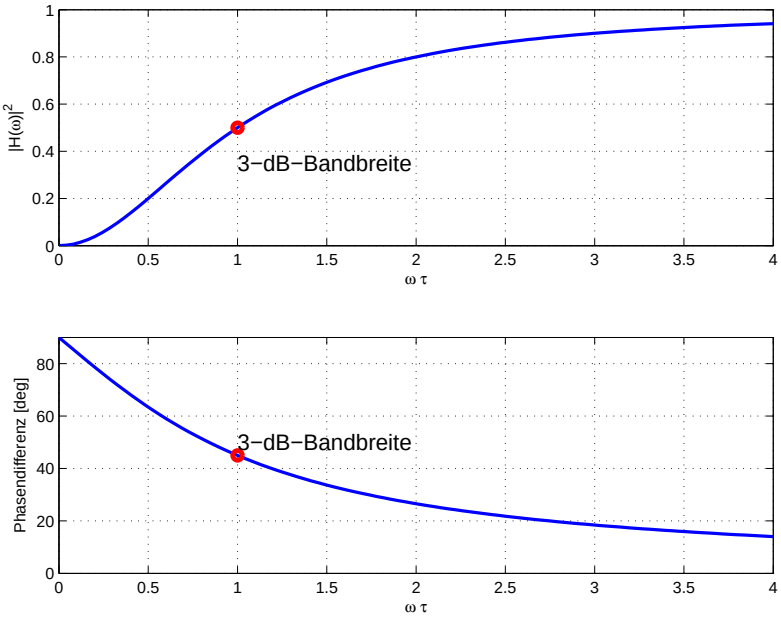
Das ist ein Hochpassfilter.

Zur Berechnung der Phase wird konjugiert komplex erweitert:

$$\begin{aligned} H_{\mathsf{L}}(\omega) &= \frac{j\omega\tau\,(1-j\omega\tau)}{1+(\omega\tau)^2} \\ &= \frac{(\omega\tau)^2+j\omega\tau}{1+(\omega\tau)^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\phi = \arctan\left(\frac{1}{\omega\tau}\right)}$$

Die folgende Abbildung zeigt den Frequenzgang des Hochpassfilters.



Berechnung der Übertragungsfunktion für die Spannung am Widerstand:

Mit

$$H_{\mathsf{L}}(\omega) + H_{\mathsf{R}}(\omega) = 1$$

erhält man

$$\boxed{H_{\mathsf{R}}(\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}}$$

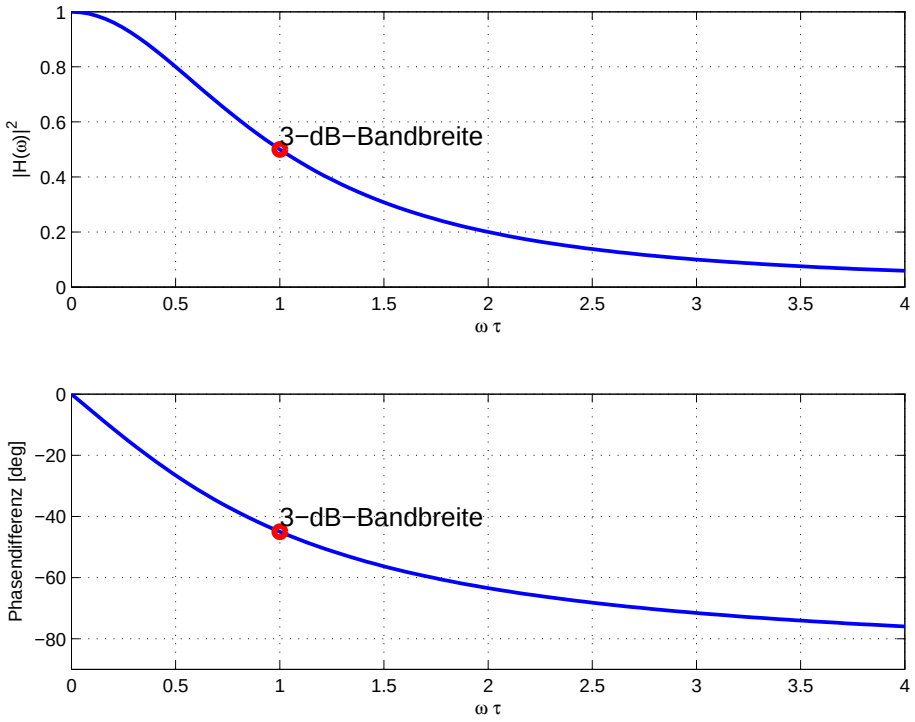
Diese Übertragungsfunktion kennen wir schon von der RC-Schaltung. Es gilt:

$$\boxed{H_{\mathsf{R}}(\omega) = \frac{\mathrm{e}^{j\phi}}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}}$$

mit

$$\boxed{\phi = -\arctan(\omega\tau)}\,.$$

Die folgende Abbildung zeigt den Frequenzgang des Tiefpassfilters (Spannung am Widerstand):



(b) Spannungen und Strom für $\omega = 1000\,\mathrm{s}^{-1}$:

Mit $\tau = 1\,\mathrm{ms}$ gilt $\omega\tau = 1$ und damit

$$H_{\mathsf{L}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{j45^\circ}$$

und

$$H_{\mathsf{R}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-j45^\circ}$$

Das ist in beiden Fällen gerade der 3-dB-Punkt. Mit

$$\underline{U}_{\mathsf{q}} = 12\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-j45^\circ}$$

folgt

$$\boxed{\underline{U}_L = \frac{12\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{j0^\circ} \text{ und } u_L(t) = 12\,\mathrm{V}\cos(\omega t)}$$

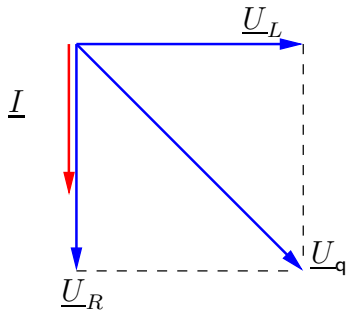
sowie

$$\boxed{\underline{U}_R = \frac{12\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-j90^\circ} \text{ und } u_R(t) = 12\,\mathrm{V}\sin(\omega t)}\,.$$

Es fließt der Strom

$$\boxed{\underline{I} = \frac{1,2\,\mathrm{A}}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-j90^\circ} \text{ d.h. } i(t) = 1,2\,\mathrm{A}\,\sin(\omega t)}\,.$$

Das folgende Bild veranschaulicht die Zeiger:



(c) Eingangsimpedanz und Leistung:

Es gilt

$$\boxed{\underline{Z}_{\mathsf{E}} = R + j\omega L = 10\,\Omega + j10\,\Omega = \sqrt{2}\,10\,\Omega\,\mathrm{e}^{j45^\circ}}$$

Die zeitabhängige Leistung lautet allgemein:

$$p(t) = u_{\mathsf{q}}(t)i(t) = \mathrm{Re}\left\{\underline{U}_{\mathsf{q}}\underline{I}^* + \underline{U}_{\mathsf{q}}\underline{I}\mathrm{e}^{j2\omega t}\right\}$$

Es gilt

$$\boxed{\underline{S} = \underline{U}_{\mathsf{q}}\underline{I}^* = 12\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-j45^\circ} \cdot \frac{1,2\,\mathrm{A}}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{j90^\circ} = \frac{14,4\,\mathrm{VA}}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{j45^\circ} = 7,2\,\mathrm{W} + j7,2\,\mathrm{var}}$$

d.h.

$$\boxed{P = 7,2\,\mathrm{W}} \text{ und } \boxed{Q = 7,2\,\mathrm{var}}$$

Wir überprüfen an Hand der Zahlenwerte noch einmal, dass wir mit den Formeln

$$\underline{S} = \frac{U_{\mathsf{q}}^2}{\underline{Z}_{\mathsf{E}}^*}$$

und

$$\underline{S} = \underline{Z}_{\mathsf{E}}I^2 = (R + j\omega L)\,I^2$$

die selbe komplexe Leistung $\underline{S}$ erhalten. An Hand der letzteren Formel sieht man noch einmal direkt die Zuordnung der Wirkleistung zu dem Ohmschen Widerstand.

Für die zeitabhängige Leistung wird noch folgende Größe benötigt:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{\mathsf{q}}\underline{I}\mathrm{e}^{j2\omega t} &= 12\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-j45^\circ} \cdot \frac{1,2\,\mathrm{A}}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-j90^\circ}\,\mathrm{e}^{j2\omega t} \\ &= \frac{14,4\,\mathrm{VA}}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-j135^\circ}\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\boxed{p(t) = 7,2\,\mathrm{W} + \frac{14,4\,\mathrm{W}}{\sqrt{2}}\cos(2\omega t - 135^\circ)}$$

Anmerkung: Man erhält das selbe Ergebnis, wenn man

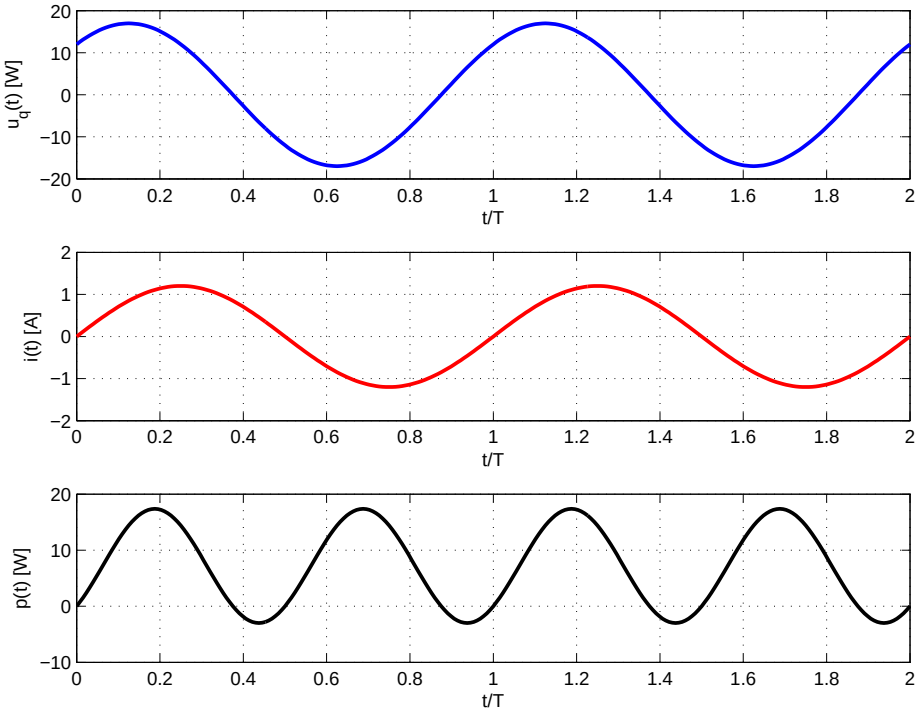
$$p(t) = u_{\mathsf{q}}(t)i(t) = \sqrt{2} \cdot 12\,\mathrm{V}\,\cos\left(\omega t - 45^\circ\right) \cdot 1,2\,\mathrm{A}\,\cos\left(\omega t - 90^\circ\right)$$

mit Hilfe der Formel

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

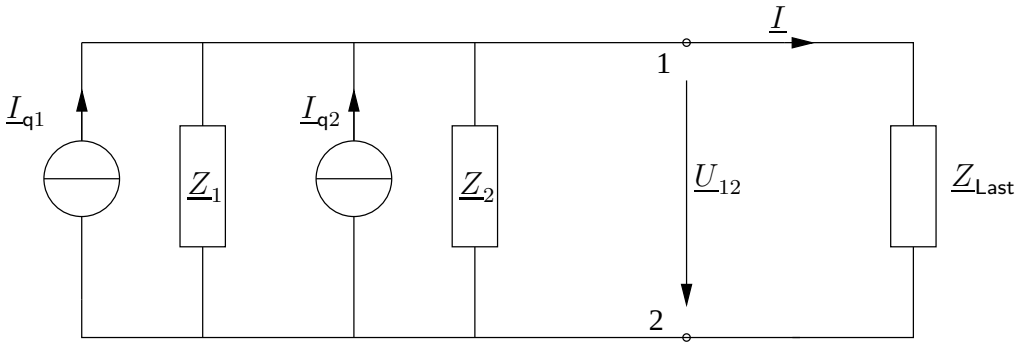
umformt. Die komplexe Darstellung hat aber gerade den Vorteil, dass man nicht ständig derartige Formeln über Winkelfunktionen verwenden muss.

Das folgende Bild zeigt oben den Zeitverlauf von $u_{\mathsf{q}}(t)$, in der Mitte den von $i(t)$ und unten den von $p(t) = u_{\mathsf{q}}(t)i(t)$.



Lösung zu Aufgabe 1.2

(a) Welche Spannung $\underline{U}_{12}$ liegt zwischen den Klemmen 1 und 2? Hierzu werden die linearen Spannungsquellen zu linearen Stromquellen transformiert:



Die Ersatzstromquellen ergeben sich als

$$\underline{I}_{\mathsf{q}1} = \frac{\underline{U}_{\mathsf{q}1}}{\underline{Z}_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{100\,\mathrm{V}}{(8+6j)\Omega}\mathrm{e}^{j45^\circ} = 7,07\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{j8,1^\circ} = (7+j)\,\mathrm{A}$$

$$\underline{I}_{\mathsf{q}2} = \frac{\underline{U}_{\mathsf{q}2}}{\underline{Z}_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{80\,\mathrm{V}}{(4+3j)\Omega}\mathrm{e}^{j30^\circ} = 11,3\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-j6,9^\circ} = (11,2325 - j1,3533)\,\mathrm{A}$$

und werden zu einer Stromquelle zusammengefasst:

$$\underline{I}_{\mathsf{q}} = \underline{I}_{\mathsf{q}1} + \underline{I}_{\mathsf{q}2} = 18,236\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-j1,11^\circ} = (18,2325 - 0,3533j)\ \mathrm{A}$$

Lastwiderstand:

$$\begin{aligned}\underline{Z}_{\mathsf{Last}} &= R_1 + \frac{1}{1/R_2 + j\omega C}\\ &= (6,4418 - 1,9205j)\ \Omega\\ &= 6,722\,\Omega\,\mathrm{e}^{-j16,6^\circ}\end{aligned}$$

Der Strom $\underline{I}_q$ fließt durch den Gesamtwiderstand $\underline{Z}_{\mathsf{ges}}$ mit dem Leitwert

$$\underline{Z}_{\mathsf{ges}}^{-1} = \underline{Z}_1^{-1} + \underline{Z}_2^{-1} + \underline{Z}_{\mathsf{Last}}^{-1} = (0.3826 - 0.1375j)\ \mathrm{S}$$

Die Spannung an den Klemmen ist dann gegeben durch

$$\boxed{\underline{U}_{12} = \underline{Z}_{\mathsf{ges}}\underline{I}_{\mathsf{q}} = (42,5005 + 14,3515j)\ \mathrm{V} = 44,86\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{j18,66^\circ}}$$

Alternative Rechnung mit Hilfe des Superpositionsprinzips Hierzu berechnet man zunächst die Spannung $\underline{U}_{12}$ für jede Quelle einzeln, wobei die jeweils andere(n) deaktiviert ist (sind). Eine deaktivierte Spannungsquelle ist ein Kurzschluss. Wenn nur die Quelle

$\underline{U}_{\mathsf{q}1}$ aktiv und die Quelle $\underline{U}_{\mathsf{q}2}$ deaktiviert ist, ist das die Spannung

$$\underline{U}'_{12} = \frac{\underline{Z}_2 || \underline{Z}_{\mathsf{Last}}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 || \underline{Z}_{\mathsf{Last}}} \underline{U}_{\mathsf{q}1} = (15,3724 + 8,1389j)\ \mathrm{V}\,.$$

Wenn nur die Quelle $\underline{U}_{\mathsf{q}2}$ aktiv und die Quelle $\underline{U}_{\mathsf{q}1}$ deaktiviert ist, ist das die Spannung

$$\underline{U}''_{12} = \frac{\underline{Z}_1 || \underline{Z}_{\mathsf{Last}}}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_1 || \underline{Z}_{\mathsf{Last}}} \underline{U}_{\mathsf{q}2} = (27,1281 + 6,2126j)\ \mathrm{V}\,.$$

Das **Superpositionsprinzip** besagt, dass sich die wirkliche Spannung $\underline{U}_{12}$ als die Überlagerung (Superposition) dieser beiden Einzelspannungen ergibt:

$$\boxed{\underline{U}_{12} = \underline{U}'_{12} + \underline{U}''_{12} = (42,5005 + 14,3515j)\ \mathrm{V} = 44,86\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{+j18,66^\circ}}$$

(b) Klemmenstrom:

$$\boxed{\underline{I} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{\mathsf{Last}}} = (5.4491 + 3.8524j)\ \mathrm{A} = 6,67\,\mathrm{A}\mathrm{e}^{j35,26^\circ}}$$

(c) Über die Klemmen abgegebene Leistung:

$$\boxed{\underline{S} = (286,88 - 85,53j)\ \mathrm{VA} = 299,4\,\mathrm{VA}\,\mathrm{e}^{-j16,6^\circ}}$$

(d) Leistungen an den Bauteilen. Leistung am Widerstand R_1:

$$\boxed{P_1 = I^2 R_1 = 222,67\,\mathrm{W}}$$

Berechne dann zunächst die Spannungen an den Widerständen R_1

$$\underline{U}_1 = \underline{I} R_1 = (27,25 + 19,26j)\ \mathrm{V}$$

und R_2

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_{12} - \underline{U}_1 = (15,26 - 4,91j)\ \mathrm{V}\,.$$

Daraus folgt für die (Wirk-) Leistung am zweiten Widerstand

$$\boxed{P_2 = \frac{U_2^2}{R_2} = 64,21\,\mathrm{W}}$$

und für die (Blind-) Leistung am Kondensator

$$\boxed{|Q_\mathsf{C}| = \omega C U_2^2 = 85,53\,\mathrm{var}}\,.$$

Die Blindleistung ist negativ (*kapazitiv*). Die gesamte Leistung an allen (Last-) Bauteilen setzt sich zusammen als

$$P_1 + P_2 - j\,|Q_\mathsf{C}| = 222,67\,\mathrm{W} + 64,21\,\mathrm{W} - j85,53\,\mathrm{var}\,.$$

Dies ist identisch zu der in (c) berechneten Leistung $\underline{S}$.

(e) Um die von den beiden Spannungsquellen insgesamt abgegebene Leistung zu berechnen, benötigt man die dort fließenden Ströme $\underline{I}_1$ und $\underline{I}_2$. Wir betrachten dabei wieder das ursprüngliche Schaltbild und beachten, dass die Strompfeile der Quellen den Spannungspfeilen entgegengesetzt sind (*Erzeuger-Zählpfeile*). Es gilt:

$$\underline{U}_{\mathsf{q}1} = \underline{U}_{12} + \underline{Z}_1\underline{I}_1 \text{ und } \underline{U}_{\mathsf{q}2} = \underline{U}_{12} + \underline{Z}_2\underline{I}_2$$

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{Z}_1}\left(\underline{U}_{\mathsf{q}1} - \underline{U}_{12}\right) = (2.74 + 2.40j)\,\mathrm{A}$$

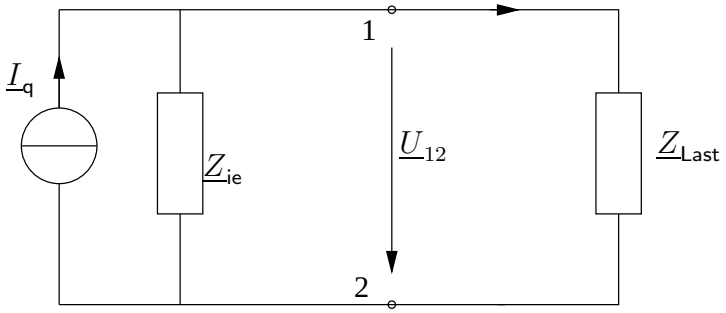
$$\underline{I}_2 = \frac{1}{\underline{Z}_2}\left(\underline{U}_{\mathsf{q}2} - \underline{U}_{12}\right) = (2.71 + 1.45j)\ \mathrm{A}$$

Man überprüft, dass $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}$ gilt, wie es nach der Knotenregel sein muss. Abgegebene Leistungen:

$$\boxed{\underline{S}_{\mathsf{q}1} = \underline{U}_{\mathsf{q}1}\underline{I}_1^* = (257,04 + 16,85j)\ \mathrm{VA}}$$

$$\boxed{\underline{S}_{\mathsf{q}2} = \underline{U}_{\mathsf{q}2}\underline{I}_2^* = (173,80 + 5,60j)\ \mathrm{VA}}$$

(f) Ersatz-Stromquelle:



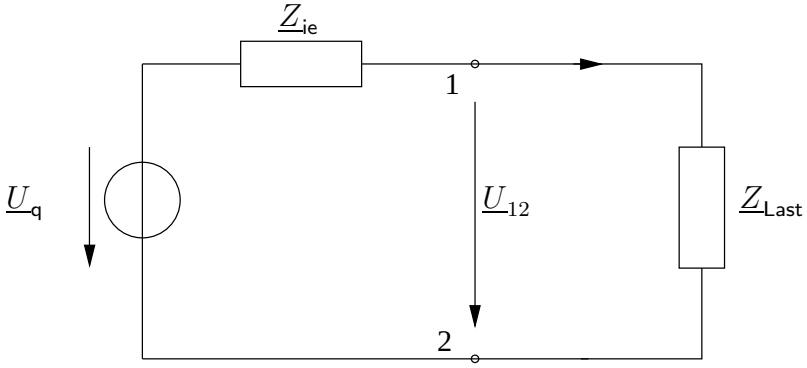
Der Ersatz-Quellenstrom wurde schon im Aufgabenteil (a) berechnet:

$$\boxed{\underline{I}_\mathsf{q} = 18,236\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-j1,11^\circ} = (18,2325 - 0,3533j)\ \mathrm{A}}$$

Der Ersatz-Innenwiderstand lautet:

$$\boxed{\underline{Z}_\mathsf{ie} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = (2.67 + 2.00j)\ \Omega = 3.33\,\Omega\,\mathrm{e}^{j36,87^\circ}}$$

Ersatz-Spannungsquelle:



Ersatz-Spannungsquelle:

$$\boxed{\underline{U}_\mathsf{q} = \underline{Z}_\mathsf{ie}\underline{I}_\mathsf{q} = (49,33 + 35,52j)\ \mathrm{V} = 60,79\,\mathrm{V}\mathrm{e}^{j35,8^\circ}}$$

(g) Maximale Leistungsabgabe bei Anpassung:

$$\underline{Z}_\mathsf{Last} = \underline{Z}_\mathsf{ie}^*$$

Die abgegebene Leistung lautet dann:

$$\boxed{P_{\max} = \frac{U_{\mathsf{q}}^2}{4\mathrm{Re}\left\{\underline{Z}_{\mathsf{ie}}\right\}} = 346,40\,\mathrm{W}}$$

Lösung zu Aufgabe 1.3

(a) Es sei $\underline{Z}$ die Eingangsimpedanz der Schaltung. Laut Aufgabenstellung und

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$$

muss diese den Phasenwinkel 51° haben. Es gilt:

$$\underline{Z} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L}} + \frac{1}{j\omega C}$$

Nur der letzte Term ist unbekannt. Rechne

$$R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_2} + \frac{1}{j\omega L}} = (4.0 + 6.9j)\ \Omega$$

aus und kürze ab:

$$R = 4.0\,\Omega \text{ und } X_1 = 6.9\,\Omega$$

Es gilt also:

$$\underline{Z} = R + j\left(X_1 - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Damit der Phasenwinkel 51° beträgt, muss gelten:

$$\tan 51^\circ = \frac{X_1 - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$X_1 - \frac{1}{\omega C} = R \tan 51^\circ$$

$$\frac{1}{\omega C} = X_1 - R \tan 51^\circ$$

$$C = \frac{1}{\omega\,(X_1 - R\,\tan 51°)} = \frac{1}{2000\,\mathrm{s}^{-1}\,(6.9\,\Omega - 4.0\,\Omega \cdot 1,235)}$$

Das ergibt

$$\boxed{C = 256,90\,\mu\mathrm{F}}$$

(wenn man mit den gerundeten Widerständen rechnet, ergibt sich $C = 255,1\,\mu\mathrm{F}$). Wenn man dies einsetzt, erhält man für die Impedanz

$$\underline{Z} = 6,37\,\Omega \mathrm{e}^{j51°}$$

(b) Der Spannungszeiger lautet:

$$\underline{U} = \frac{100\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-j30°}$$

Für die Leistung gilt:

$$\underline{S} = \frac{U^2}{\underline{Z}^*} = \frac{(100\,\mathrm{V})^2}{2 \cdot 6,37\,\Omega} \mathrm{e}^{j51°}$$

$$\boxed{\underline{S} = 784,96\,\mathrm{VA}\,\mathrm{e}^{j51°}}$$

Kartesische Darstellung:

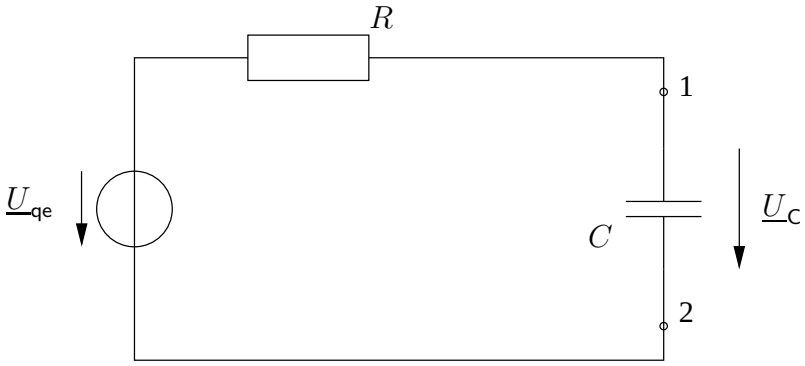
$$\boxed{\underline{S} = (493,99 + j610,03)\ \mathrm{VA}} \quad \boxed{P = 493,99\,\mathrm{W}} \quad \boxed{Q = 610,03\,\mathrm{var}}$$

Lösung zu Aufgabe 1.4

Der komplexe Zeiger der Quellspannung lautet

$$\underline{U}_\mathrm{q} = 15\,\mathrm{V}$$

1. Lösungsweg über Ersatzspannungsquelle Wir betrachten die lineare Spannungsquelle, deren Last der Kondensator ist. Das Ersatzschaltbild sieht dann so aus:



Die Ersatzquellspannung ist die Lehrlaufspannung (bei abgeklemmten Kondensator), die sich aus der Spannungteilerregel zu

$$\underline{U}_{\mathsf{qe}} = 9\,\mathrm{V}$$

ergibt. Den Ersatz-Innenwiderstand R erhält man als Eingangswiderstand an den Konsensatorklemmen 1 und 2, wobei die Quelle durch einen Kurzschluss zu ersetzen ist. Es ergibt sich

$$R = R_1||R_2 = \frac{20 \cdot 30}{50}\,\mathrm{k\Omega} = 12\,\mathrm{k\Omega}$$

Für das Ersatzschaltbild wurde die Übertragungsfunktion schon in der Vorlesung berechnet. Es gilt

$$\underline{U}_{\mathsf{C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}\underline{U}_{\mathsf{qe}} = \frac{9\,\mathrm{V}}{1+j} = \frac{9\,\mathrm{V}\mathrm{e}^{-j45^\circ}}{\sqrt{2}}$$

und damit

$$\boxed{u_{\mathsf{C}}(t) = 9\,\mathrm{V}\cos(\omega t - 45^\circ)}$$

2. Lösungsweg mit direkter Rechnung Nach der Spannungsteilerregel gilt:

$$\underline{U}_{\mathsf{C}} = \underline{U}_{\mathsf{q}}\frac{R_2||\frac{1}{j\omega C}}{R_1 + R_2||\frac{1}{j\omega C}}$$

Man berechnet

$$\begin{aligned} R_2||\frac{1}{j\omega C} &= \frac{\frac{R_2}{j\omega C}}{R_2+\frac{1}{j\omega C}} \\ &= \frac{R_2}{j\omega C R_2+1} \\ &= \frac{30\,\mathrm{k\Omega}}{2,5j+1} \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich mit etwas Zwischenrechnung das selbe Ergebnis wie oben:

$$\begin{aligned} \underline{U}_\mathsf{C} &= \frac{R_2||\frac{1}{j\omega C}}{R_1+R_2||\frac{1}{j\omega C}}\underline{U}_\mathsf{q} \\ &= \frac{\frac{30\,\mathrm{k\Omega}}{2,5j+1}}{20\,\mathrm{k\Omega}+\frac{30\,\mathrm{k\Omega}}{2,5j+1}}15\,\mathrm{V} \\ &= \frac{30\,\mathrm{k\Omega}}{20\,\mathrm{k\Omega}\,(1+2,5j)+30\,\mathrm{k\Omega}}15\,\mathrm{V} \\ &= \frac{30\,\mathrm{k\Omega}}{50\,\mathrm{k\Omega}\,(1+j)}15\,\mathrm{V} \\ &= \frac{9\,\mathrm{V}}{1+j} \end{aligned}$$

Aufgaben zu Kapitel 2

Zu Kapitel 2 gibt es keine Übungsaufgaben.

Aufgaben zu Kapitel 3

Lösung zu Aufgabe 3.1

(a) Die Eingangsimpedanz lautet (rechne gleich in die kartesische Darstellung um):

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{\mathsf{E}}(\omega) &= R_1 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C + 1/R_2} \\
&= R_1 + j\omega L + \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2} \\
&= R_1 + j\omega L + \frac{R_2\,(1 - j\omega C R_2)}{1 + (\omega C R_2)^2} \\
&= R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega C R_2)^2} + j\left(\omega L - \frac{\omega R_2^2 C}{1 + (\omega C R_2)^2}\right)
\end{aligned}$$

(b) Bei Resonanz muss der Imaginärteil verschwinden. Das führt auf die Bedingung:

$$\omega L = \frac{\omega R_2^2 C}{1 + (\omega C R_2)^2}$$

Laut Aufgabenstellung sind nur Lösungen $\omega > 0$ gesucht. Also kann man durch ω teilen:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{R_2^2 C}{1 + (\omega C R_2)^2} \\
L\left(1 + (\omega C R_2)^2\right) &= R_2^2 C \\
(\omega C R_2)^2 &= \frac{R_2^2 C}{L} - 1 \\
\omega^2 &= \frac{1}{LC} - \frac{1}{(C R_2)^2}
\end{aligned}$$

Positive Lösung:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(C R_2)^2}} = 500\,\mathrm{s}^{-1}}$$

$$\boxed{f_0 = 79,64\,\mathrm{Hz}}$$

(c) Bei der Resonanzfrequenz ist die Impedanz gegeben durch

$$\underline{Z}_{\mathsf{E}} = \underline{Z}_{\mathsf{E}}(\omega_0) = R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega_0 C R_2)^2}$$

$$\boxed{\underline{Z}_{\mathsf{E}} = \underline{Z}_{\mathsf{E}}(\omega_0) = 1,87\,\mathrm{k\Omega}}$$

Daraus folgt für den Strom

$$\boxed{\underline{I} = \frac{\underline{U}_{\mathsf{q}}}{\underline{Z}_{\mathsf{E}}(\omega_0)} = 10,72\,\mathrm{mA}}$$

$$\boxed{i(t) = 15,16\,\mathrm{mA}\cos(\omega_0 t)}$$

Für die Spannung $\underline{U}_2$ gilt:

$$\boxed{\underline{U}_2 = \frac{\underline{I}}{j\omega C + \frac{1}{R_2}} = 10,72\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-j30^\circ}}$$

$$\boxed{u_2(t) = 15,16\,\mathrm{V}\cos(\omega_0 t - 30^\circ)}$$

Daraus ergeben sich die Ströme:

$$\boxed{i_2(t) = \frac{u_2(t)}{R_2} = 13,13\,\mathrm{mA}\cos(\omega_0 t - 30^\circ)}$$

$$\boxed{\underline{I}_1 = j\omega_0 C \underline{U}_2 = 5,36\,\mathrm{mA}\mathrm{e}^{j60^\circ}}$$

$$\boxed{i_1(t) = 7,59\,\mathrm{mA}\cos(\omega_0 t + 60^\circ)}$$

(d) Bei der Resonanzfrequenz ist die Leistung eine reine Wirkleistung. Es gilt:

$$\boxed{P = \underline{Z}_{\mathsf{E}}(\omega_0) I^2 = 214,4\,\mathrm{mW}}$$

Lösung zu Aufgabe 3.1 (Variante)

(a) Die Eingangsimpedanz lautet (rechne gleich in die kartesische Darstellung um):

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{\mathsf{E}}(\omega) &= R_1 + j\omega L + \frac{1}{j\omega C + 1/R_2} \\
&= R_1 + j\omega L + \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2} \\
&= R_1 + j\omega L + \frac{R_2\,(1 - j\omega C R_2)}{1 + (\omega C R_2)^2} \\
&= R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega C R_2)^2} + j\left(\omega L - \frac{\omega R_2^2 C}{1 + (\omega C R_2)^2}\right)
\end{aligned}$$

(b) Bei Resonanz muss der Imaginärteil verschwinden. Das führt auf die Bedingung:

$$\omega L = \frac{\omega R_2^2 C}{1 + (\omega C R_2)^2}$$

Laut Aufgabenstellung sind nur Lösungen $\omega > 0$ gesucht. Also kann man durch ω teilen:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{R_2^2 C}{1 + (\omega C R_2)^2} \\
L\left(1 + (\omega C R_2)^2\right) &= R_2^2 C \\
(\omega C R_2)^2 &= \frac{R_2^2 C}{L} - 1 \\
\omega^2 &= \frac{1}{LC} - \frac{1}{(C R_2)^2}
\end{aligned}$$

Positive Lösung:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(C R_2)^2}} = 866\,\mathrm{s}^{-1}}$$

$$\boxed{f_0 = 137,83\,\mathrm{Hz}}$$

(c) Bei der Resonanzfrequenz ist die Impedanz gegeben durch

$$\underline{Z}_{\mathsf{E}} = \underline{Z}_{\mathsf{E}}(\omega_0) = R_1 + \frac{R_2}{1 + (\omega_0 C R_2)^2}$$

$$\boxed{\underline{Z}_{\mathsf{E}} = \underline{Z}_{\mathsf{E}}(\omega_0) = 1500\,\Omega}$$

Daraus folgt für den Strom

$$\boxed{\underline{I} = \frac{\underline{U}_{\mathsf{q}}}{\underline{Z}_{\mathsf{E}}(\omega_0)} = 13,33\,\mathrm{mA}}$$

$$\boxed{i(t) = 18,86\,\mathrm{mA}\cos(\omega_0 t)}$$

Für die Spannung $\underline{U}_2$ gilt:

$$\boxed{\underline{U}_2 = \frac{\underline{I}}{j\omega C + \frac{1}{R_2}} = 13,3\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-j60^\circ}}$$

$$\boxed{u_2(t) = 18,86\,\mathrm{V}\cos(\omega_0 t - 60^\circ)}$$

Daraus ergeben sich die Ströme:

$$\boxed{i_2(t) = \frac{u_2(t)}{R_2} = 9,42\,\mathrm{mA}\cos(\omega_0 t - 60^\circ)}$$

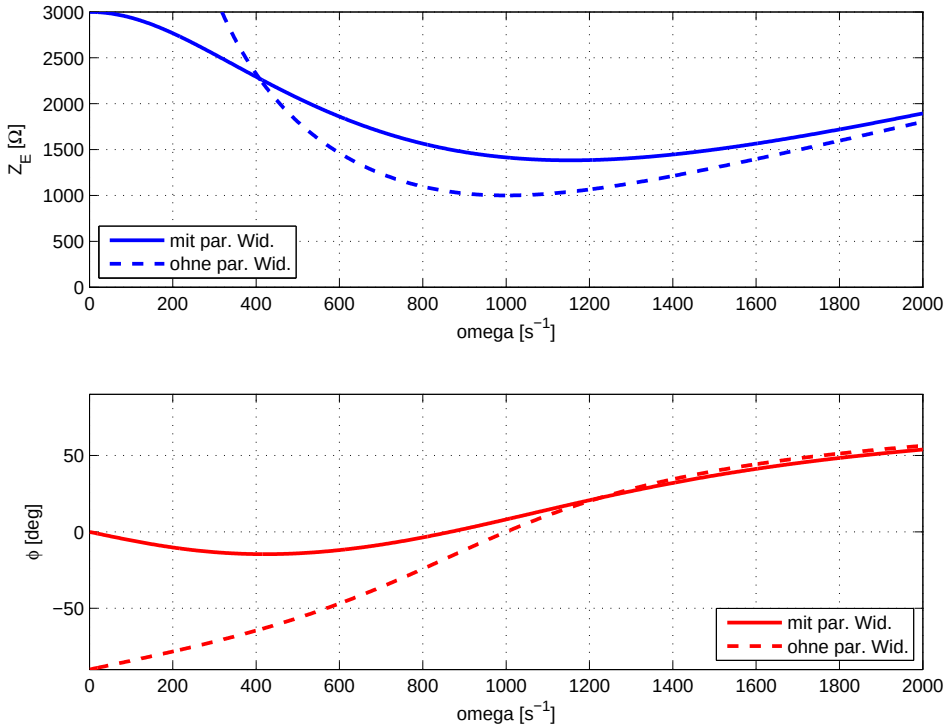
$$\boxed{\underline{I}_1 = j\omega_0 C\underline{U}_2 = 11,55\,\mathrm{mA}\mathrm{e}^{j30^\circ}}$$

$$\boxed{i_1(t) = 16,33\,\mathrm{mA}\cos(\omega_0 t + 30^\circ)}$$

(d) Bei der Resonanzfrequenz ist die Leistung eine reine Wirkleistung. Es gilt:

$$\boxed{P = \underline{Z}_{\mathsf{E}}(\omega_0)I^2 = 266,67\,\mathrm{mW}}$$

Resonanzkurven :

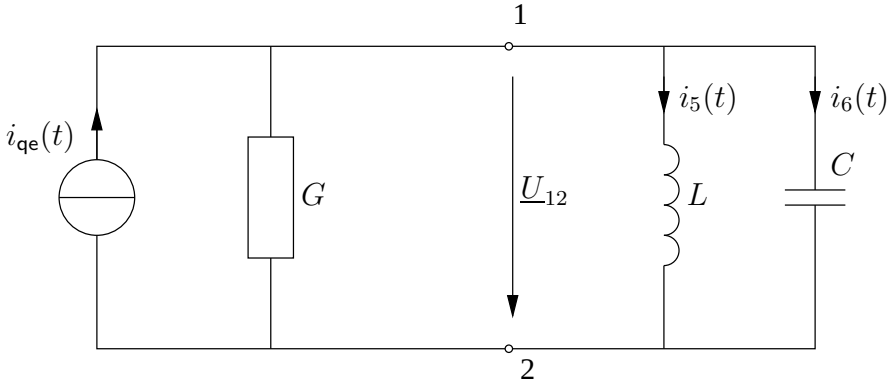


Lösung zu Aufgabe 3.2

Schreibe zunächst den Zeiger der Quellspannung hin:

$$\begin{aligned}
\underline{U}_\mathrm{q} &= \sqrt{2}\,10\,\mathrm{V}e^{j60^\circ} \\
&= \sqrt{2}\,10\,\mathrm{V}\frac{1}{2}(1+j\sqrt{3}) \\
&= \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}j\right)\cdot 5\,\mathrm{V} \\
&= (7.07+12.25j)\ \mathrm{V}
\end{aligned}$$

Die Schaltung ist äquivalent zu den LCR-Parallelschwingkreis



mit Admittanz

$$\underline{Y} = G + jB\,,$$

wobei sich G aus den Ohmschen Widerständen berechnen lässt (der genaue Wert wird hier nicht benötigt) und für die Blindadmittanz gilt:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \\ &= \frac{1}{j2000 \cdot 0,001}\Omega + j2000 \cdot 0,25 \cdot 10^{-3}\Omega \\ &= 0 \end{aligned}$$

Es liegt also Resonanz vor. D.h. über die Klemmen 1 und 2 fließt kein Strom, und die Ströme durch Spule und Kondensator heben sich auf:

$$i_5(t) + i_6(t) = 0$$

Der (rein reelle) Eingangswiderstand der Schaltung ist dann

$$\begin{aligned} R_{\text{ges}} &= R + 2R||2R \\ &= R + R \\ &= 20\,\Omega \end{aligned}$$

Der Stromzeiger $\underline{I}_1$ ist dann

$$\begin{aligned}\underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_\mathrm{q}}{R_\mathrm{ges}} \\ &= \frac{\sqrt{2}\,10\,\mathrm{V}}{20\,\Omega}\mathrm{e}^{j60^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{A}\mathrm{e}^{j60^\circ}\,,\end{aligned}$$

und das Zeitsignal lautet

$$\boxed{i_1(t) = 1\,\mathrm{A}\cos\left(\omega t + 60^\circ\right)}\,.$$

Dieser Strom teilt sich am ersten Knoten zu gleichen Teilen in i_2 und i_3 auf (die Widerstände nach dem Knoten sind gleich: $2R = R + R$). Wegen der Resonanz fließt hinter den Klemmen keine Strom. Deshalb ist $i_3 = i_4$. Es gilt also:

$$\boxed{i_2(t) = i_3(t) = i_4(t) = \frac{1}{2}i_1(t) = 0,5\,\mathrm{A}\cos\left(\omega t + 60^\circ\right)}$$

Die Klemmenspannung $\underline{U}_{12}$ liegt sowohl an dem Parallelwiderstand R (durch den der Strom i_4 fließt) als auch an Spule und Kondensator. Es gilt daher:

$$\underline{U}_{12} = R\underline{I}_4$$

$$\underline{U}_{12} = j\omega L\underline{I}_5$$

$$\underline{U}_{12} = \frac{1}{j\omega C}\underline{I}_6$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\underline{I}_5 &= \frac{R}{j\omega L}\underline{I}_4 \\ &= \frac{10\,\Omega}{j2000\mathrm{s}^{-1}\cdot 1\,\mathrm{mH}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{A}\mathrm{e}^{j60^\circ} \\ &= \frac{2,5\,\mathrm{A}}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{-j30^\circ}\end{aligned}$$

$$\boxed{i_5(t) = 2,5\,\mathrm{A}\cos\left(\omega t - 30^\circ\right)}$$

Anstatt $\underline{I}_6 = j\omega RC\,\underline{I}_4$ mit Zahlenwerten auszurechnen, kann man einfacher $\underline{I}_6 = -\underline{I}_5$

ausnutzen. Man erhält:

$$\boxed{i_5(t) = 2,5\,\mathrm{A}\cos\left(\omega t + 150^\circ\right)}$$

Lösung zu Aufgabe 3.3

(a) Die Eingangsimpedanz lautet (rechne gleich in die kartesische Darstellung um):

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{\mathsf{E}}(\omega) &= \frac{1}{j\omega C} \,||\, (R + j\omega L) \\
&= \frac{1}{j\omega C + (R + j\omega L)^{-1}} \\
&= \frac{R + j\omega L}{j\omega C\,(R + j\omega L) + 1} \\
&= \frac{R + j\omega L}{1 + j\omega C\,(R + j\omega L)} \cdot \frac{1 - j\omega C\,(R - j\omega L)}{1 - j\omega C\,(R - j\omega L)} \\
&= \frac{R + j\omega L - j\omega C\left(R^2 + (\omega L)^2\right)}{\left(1 - \omega^2 LC\right)^2 + (\omega RC)^2} \\
&= \frac{R}{\left(1 - \omega^2 LC\right)^2 + (\omega RC)^2} + j\frac{\omega L - \omega C\left(R^2 + (\omega L)^2\right)}{\left(1 - \omega^2 LC\right)^2 + (\omega RC)^2}
\end{aligned}$$

(b) Die Eingangsadmittanz lautet (rechne gleich in die kartesische Darstellung um):

$$\begin{aligned}
\underline{Y}_{\mathsf{E}}(\omega) &= \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C \\
&= \frac{R - j\omega L}{R^2 + (\omega L)^2} + j\omega C \\
&= \frac{R}{R^2 + (\omega L)^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + (\omega L)^2}\right)
\end{aligned}$$

(c) Bei Resonanz muss der Imaginärteil von $\underline{Z}_{\mathsf{E}}(\omega)$ bzw. von $\underline{Y}_{\mathsf{E}}(\omega)$ verschwinden. Beides führt auf die Bedingung:

$$\omega C\left(R^2 + (\omega L)^2\right) = \omega L$$

Laut Aufgabenstellung sind nur Lösungen $\omega > 0$ gesucht. Also kann man durch ωC dividieren und erhält

$$\begin{aligned} R^2 + (\omega L)^2 &= \frac{L}{C} \\ \omega L &= \sqrt{\frac{L}{C} - R^2} \end{aligned}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}}$$

Aufgaben zu Kapitel 4

Lösung zu Aufgabe 4.1

(a) Berechnung der Ströme. Zunächst schreiben wir die Spannungszeiger hin:

$$\underline{U}_1 = \frac{135\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{j60^\circ}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{135\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{-j60^\circ}$$

$$\underline{U}_2 = \frac{135\,\mathrm{V}}{\sqrt{2}} \mathrm{e}^{j180^\circ}$$

Der Blindwiderstand der Spule beträgt

$$\omega L = 200\,\Omega\,.$$

Daraus ergeben sich die Impedanzen:

$$\underline{Z}_1 = 100\,\Omega + j200\,\Omega = 223,6\,\Omega\,\mathrm{e}^{j63,4^\circ}$$

$$\underline{Z}_2 = 200\,\Omega + j200\,\Omega = 282,8\,\Omega\,\mathrm{e}^{j45^\circ}$$

$$\underline{Z}_3 = 400\,\Omega + j200\,\Omega = 447,2\,\Omega\,\mathrm{e}^{j26,6}$$

Für die Stromzeiger gilt:

$$\sqrt{2}\underline{I}_1 = \frac{\sqrt{2}\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} = \frac{135\,\mathrm{V}}{223,6\,\Omega}\,\mathrm{e}^{-j3,4^\circ}$$

$$\sqrt{2}\underline{I}_2 = \frac{\sqrt{2}\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} = \frac{135\,\mathrm{V}}{282,8\,\Omega}\,\mathrm{e}^{-j105^\circ}$$

$$\sqrt{2}\underline{I}_3 = \frac{\sqrt{2}\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{135\,\mathrm{V}}{447,2\,\Omega}\,\mathrm{e}^{j153,4^\circ}$$

$$\sqrt{2}\underline{I}_0 = \sqrt{2}\underline{I}_1 + \sqrt{2}\underline{I}_2 + \sqrt{2}\underline{I}_3 = 0,418\,\mathrm{A}\mathrm{e}^{-j60^\circ}$$

Zeitsignale:

$$\boxed{i_1(t) = 0,604\,\mathrm{A}\cos\left(\omega t - 3,4^\circ\right)}$$

$$\boxed{i_2(t) = 0,477\,\mathrm{A}\cos\left(\omega t - 105^\circ\right)}$$

$$\boxed{i_3(t) = 0,302\,\mathrm{A}\cos\left(\omega t - 206,6^\circ\right)}$$

$$\boxed{i_0(t) = 0,418\,\mathrm{A}\cos\left(\omega t - 60^\circ\right)}$$

(b) Die Leistungen berechnen sich folgendermaßen:

$$\underline{S}_1 = \frac{U_1^2}{\underline{Z}_1^*} = \frac{(135\,\mathrm{V})^2}{2} \cdot \frac{1}{223,6\,\Omega}\,\mathrm{e}^{j63,4^\circ} = 40,75\,\mathrm{VA}\,\mathrm{e}^{j63,4^\circ}$$

$$\underline{S}_2 = \frac{U_2^2}{\underline{Z}_2^*} = \frac{(135\,\mathrm{V})^2}{2} \cdot \frac{1}{282,8\,\Omega}\,\mathrm{e}^{j45^\circ} = 32,22\,\mathrm{VA}\,\mathrm{e}^{j45^\circ}$$

$$\underline{S}_3 = \frac{U_3^2}{\underline{Z}_3^*} = \frac{(135\,\mathrm{V})^2}{2} \cdot \frac{1}{447,2\,\Omega}\,\mathrm{e}^{j26,6^\circ} = 20,38\,\mathrm{VA}\,\mathrm{e}^{j26,6^\circ}$$

In kartesischer Darstellung geschrieben:

$$\underline{S}_1 = 18,23\,\mathrm{W} + j36,45\,\mathrm{var}$$

$$\underline{S}_2 = 22,78\,\mathrm{W} + j22,78\,\mathrm{var}$$

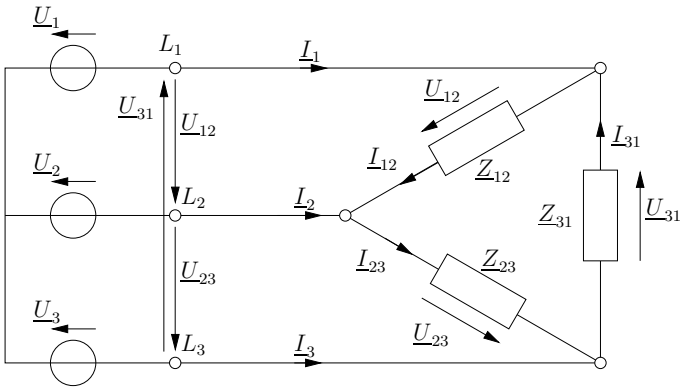
$$\underline{S}_3 = 18,23\,\mathrm{W} + j9,13\,\mathrm{var}$$

Komplexe Gesamtleistung:

$$\boxed{\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 = 59,23\,\mathrm{W} + j68,34\,\mathrm{var} = 90,44\,\mathrm{VA}\,\mathrm{e}^{j49,1^\circ}}$$

Lösung zu Aufgabe 4.2

(a) Schaltbild:



(b) Spannungen:

$$\underline{U}_1 = 230\,\mathrm{V} \qquad \underline{U}_2 = 230\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-j120^\circ} \qquad \underline{U}_3 = 230\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-j240^\circ}$$

$$\underline{U}_{12} = 400\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{j30^\circ} \qquad \underline{U}_{23} = 400\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-j90^\circ} \qquad \underline{U}_{31} = 400\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-j210^\circ}$$

Strangströme:

$$\boxed{\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}} = \frac{400\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{j30^\circ}}{20\,\Omega} = 20\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{j30^\circ} = (17,32 + j10)\,\mathrm{A}}$$

$$\boxed{\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}} = \frac{400\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-j90^\circ}}{20\,\Omega\,\mathrm{e}^{-j90^\circ}} = 20\,\mathrm{A}}$$

$$\boxed{\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}} = \frac{400\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{j150^\circ}}{20\,\Omega\,\mathrm{e}^{j90^\circ}} = 20\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{j60^\circ} = (10 + j17,32)\,\mathrm{A}}$$

Leiterströme:

$$\boxed{\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = (7,32 - j7,32)\,\mathrm{A} = 10,35\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-j45^\circ}}$$

$$\boxed{\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = (2,68 - j10)\,\mathrm{A} = 10,35\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-j75^\circ}}$$

$$\boxed{\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = (-10 + j17,32)\,\mathrm{A} = 20\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{j120^\circ}}$$

(c) Leistung:

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \frac{U_{12}^2}{\underline{Z}_{12}^*} + \frac{U_{23}^2}{\underline{Z}_{23}^*} + \frac{U_{31}^2}{\underline{Z}_{31}^*} \\ &= \frac{(400\,\mathrm{V})^2}{20\,\Omega}\,(1 - j + j) = 8000\,\mathrm{VA}\end{aligned}$$

$\boxed{S = 8000\,\mathrm{VA}}$ $\boxed{P = 8000\,\mathrm{W}}$ $\boxed{Q = 0\,\mathrm{var}}$

(d) Andere Parameter. Der Rechenweg ist der selbe. Da alle Widerstände reell sind, sind hier die Ströme und Spannungen in Phase. Man berechnet folgende Werte:

$\boxed{\underline{I}_{12} = 95\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{j30^\circ}}$

$\boxed{\underline{I}_{23} = 63,33\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-j90^\circ}}$

$\boxed{\underline{I}_{23} = 47,50\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{j150^\circ}}$

$\boxed{\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} = 125,67\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{j10,9^\circ}}$

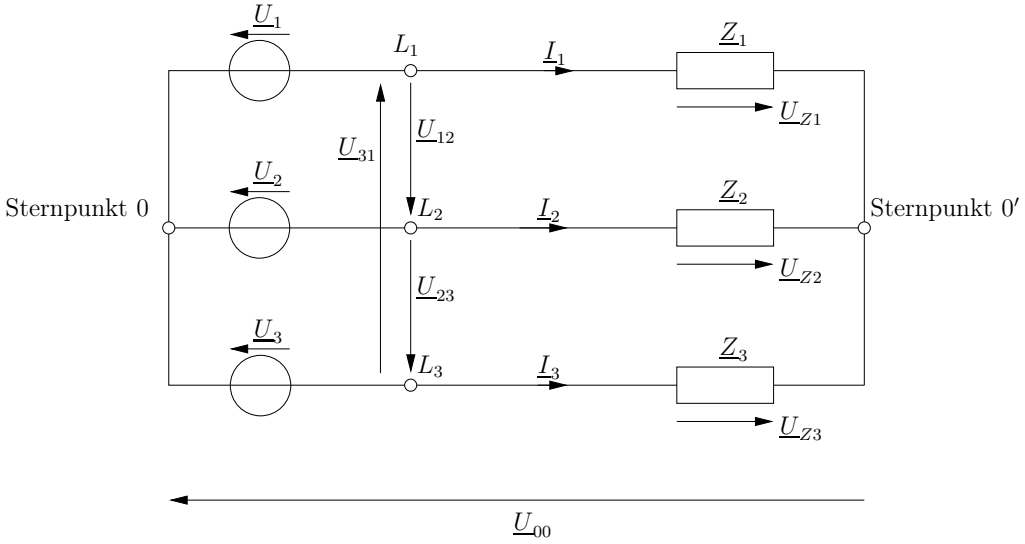
$\boxed{\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} = 138,03\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-j126,6^\circ}}$

$\boxed{\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} = 96,3\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{j115,3^\circ}}$

$\boxed{S = 78,22\,\mathrm{kVA}}$ $\boxed{P = 78,22\,\mathrm{kW}}$ $\boxed{Q = 0\,\mathrm{var}}$

Lösung zu Aufgabe 4.3

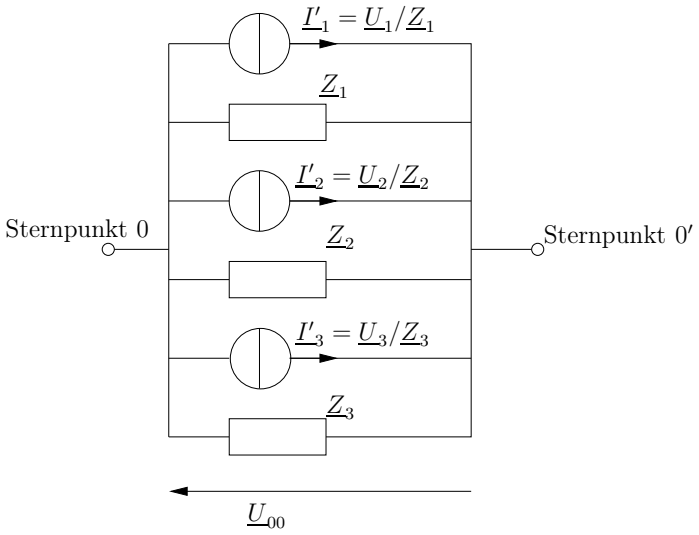
(a) Ersatzschaltbild:



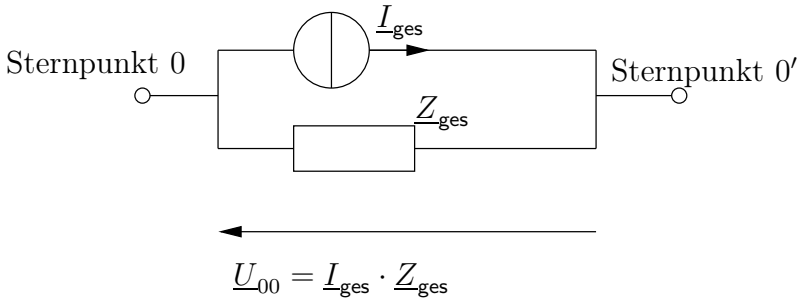
Spannungen:

$$\underline{U}_1 = 230\,\mathrm{V} \qquad \underline{U}_2 = 230\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-j120^\circ} \qquad \underline{U}_3 = 230\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-j240^\circ}$$

(b) Die Begriffe *Strangströme* und *Leiterströme* fallen hier zusammen. Zur Berechnung dieser Größen wählen wir die Methode der Transformation der Quellen. Das transformierte Ersatzschaltbild lautet:



Die einzelnen Größen sind in den Abbildungen definiert. Die drei Stromquellen werden zusammengefasst zu einer einzigen:



Die Gesamtimpedanz $\underline{Z}_{\text{ges}}$, d.h. der Innenwiderstand der linearen Ersatz-Stromquelle berechnet sich zu

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \right)^{-1} = 5.45\,\Omega$$

Im Leerlauf fließt der durch diese Gesamtstrom der Ersatzquelle

$$\begin{aligned} \underline{I}_{\text{ges}} &= \underline{I}'_1 + \underline{I}'_2 + \underline{I}'_3 \\ &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2} + \frac{\underline{U}_3}{\underline{Z}_3} \\ &= 13,82\,\text{A}\,\text{e}^{-j13,9^\circ}\,. \end{aligned}$$

Die gesuchte Spannung zwischen den Sternpunkten ist dann gegeben durch

$$\underline{U}_{00} = \underline{Z}_{\text{ges}}\underline{I}_{\text{ges}} = 75.39\,\text{V}\,\text{e}^{-j13,9^\circ}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Ströme:

$$\boxed{\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_{00}}{\underline{Z}_1} = 15,79\,\text{A}\,\text{e}^{j6,6^\circ}}$$

$$\boxed{\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_{00}}{\underline{Z}_2} = 13,06\,\text{A}\,\text{e}^{-j136,1^\circ}}$$

$$\boxed{\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3 - \underline{U}_{00}}{\underline{Z}_3} = 9,58\,\text{A}\,\text{e}^{j130,9^\circ}}$$

(c) Da alle nur Ohmsche Widerstände vorkommen, verschwindet die Blindleistung, und es gilt $\underline{S} = P$. Mit der Formel

$$\underline{S} = (\underline{U}_1 - \underline{U}_{00})\,\underline{I}_1^* + (\underline{U}_2 - \underline{U}_{00})\,\underline{I}_2^* + (\underline{U}_3 - \underline{U}_{00})\,\underline{I}_3^*$$

oder mit der Formel

$$\underline{S} = \underline{U}_1\underline{I}_1^* + \underline{U}_2\underline{I}_2^* + \underline{U}_3\underline{I}_3^*$$

zu rechnen, ist deshalb nicht so geschickt, zumal sich dabei wegen der Rundungsfehler nicht vermeiden lässt, dass ein kleiner Imaginärteil übrig bleibt. Einfacher geht es so:

$$\boxed{\underline{S} = P = \underline{Z}_1 I_1^2 + \underline{Z}_2 I_2^2 + \underline{Z}_3 I_3^2 = 8656\,\mathrm{W}}$$

(d) Bei dem anderen Parametersatz ist der Gesamtwiderstand der selbe wie oben. Im Leerlauf fließt der durch diese Gesamtstrom der Ersatzquelle

$$\underline{I}_{\mathsf{ges}} \quad = \quad 13,22\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{j133,9^\circ}$$

Die gesuchte Spannung zwischen den Sternpunkten ist dann gegeben durch

$$\underline{U}_{00} = \underline{Z}_{\mathsf{ges}}\underline{I}_{\mathsf{ges}} = 72.11\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{j133,9^\circ}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Ströme:

$$\boxed{\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1 - \underline{U}_{00}}{\underline{Z}_1} = 9,17\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-j10,9^\circ}}$$

$$\boxed{\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_{00}}{\underline{Z}_2} = 12,49\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-j103,9^\circ}}$$

$$\boxed{\underline{I}_3 = \frac{\underline{U}_3 - \underline{U}_{00}}{\underline{Z}_3} = 15,10\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{j113,4^\circ}}$$

Die Gesamtleistung ergibt sich als

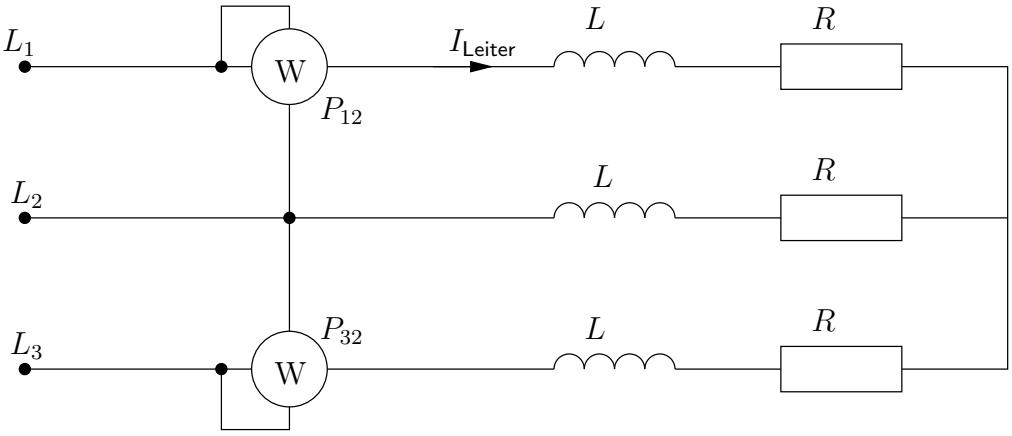
$$\boxed{\underline{S} = P = \underline{Z}_1 I_1^2 + \underline{Z}_2 I_2^2 + \underline{Z}_3 I_3^2 = 7920\,\mathrm{W}}$$

Lösung zu Aufgabe 4.4

(a) Es gilt

$$\boxed{Q = \sqrt{3}\,(P_{32} - P_{12}) \approx 26\,\mathrm{kvar}}$$

Wegen $Q > 0$ ist die Last induktiv.



(b) Berechnen Sie die Schein- Wirk- und Blindleistung sowie den Leiterstrom I:

$$\boxed{P = P_{12} + P_{32} = 35\,\mathrm{kW}}$$

$$\boxed{Q = \sqrt{3}\,(P_{32} - P_{12}) \approx 26\,\mathrm{kvar}}$$

$$\boxed{\underline{S} \approx 35\,\mathrm{kW} + 26j\,\mathrm{kvar} \approx 43.6\,\mathrm{kVA}\,\mathrm{e}^{j37^\circ}}$$

Aus

$$S = \sqrt{3}\,U_{\mathsf{L}} I_{\mathsf{L}}$$

folgt

$$\boxed{I_{\mathsf{L}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{S}{U_{\mathsf{L}}} = 63\,\mathrm{A}}$$

Bemerkung: Man kann auch die komplexen Leiterströme ausrechnen (nicht verlangt!), z.B.

$$\frac{1}{3}\underline{S} = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* \;\Rightarrow\; \underline{I}_1 = \left(\frac{\underline{S}}{3\underline{U}_1}\right)^* = \frac{35\,\mathrm{kW} - 26j\,\mathrm{kvar}}{3 \cdot 230\,\mathrm{V}} \approx (50,7 - 37,6j)\,\mathrm{A}$$

(c) Berechnung des Wirkwiderstandes R sowie der Induktivität L der Last: Für die Leistung an *einer der drei* Impedanzen gilt:

$$\frac{1}{3}\underline{S} = (R + j\omega L)\, I_\mathsf{L}^2$$

$$R + j\omega L = \frac{1}{3I_\mathsf{L}^2}\underline{S} = (2,95 + j2,19)\ \Omega$$

$$\boxed{R = \frac{1}{3I_\mathsf{L}^2}P = 2,95\,\Omega} \text{ und mit } \omega = 314,16\,\mathrm{s}^{-1} \Rightarrow \boxed{L = \frac{1}{3\omega I_\mathsf{L}^2}Q = 7\,\mathrm{mH}}$$

Aufgaben zu Kapitel 5

Lösung zu Aufgabe 5.1

(a) Berechnen und skizzieren Sie für $t \geq 0$ den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung $u(t) = u_C(t)$ und des Stromes $i(t)$.

Zur Berechnung der Zeitkonstanten τ wird die Schaltung für $t \geq 0$ betrachtet. Der (Ersatz-) Innenwiderstand von den Kondensatorklemmen aus betrachtet ist

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{8}{3}\mathrm{k}\Omega \quad \Rightarrow \quad \tau = RC = 30\mu\mathrm{F}\frac{8}{3}\mathrm{k}\Omega = 80\mathrm{ms}.$$

Spannung

Anfangsbedingung:

$$u_0 = 12\mathrm{V}$$

Stationärer Zustand (Spannungsteiler):

$$u_\mathsf{s} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_\mathsf{q} = 4\mathrm{V}$$

Lösung:

$$u(t) \quad = \quad u_\mathsf{s} - (u_\mathsf{s} - u_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$\boxed{u(t) = 4\mathrm{V} + 8\mathrm{Ve}^{-\mathrm{t}/80\mathrm{ms}}}$$

Strom

Anfangsbedingung: Die Stetigkeit von $i(t) = (U_q - u(t))/R_1$ folgt aus der Stetigkeit von $u(t) \Rightarrow$

$$i_0 = 0\mathrm{A}$$

Stationärer Zustand:

$$i_\mathsf{s} = \frac{12\mathrm{V}}{12\mathrm{k}\Omega} = 1\mathrm{mA}$$

Lösung:

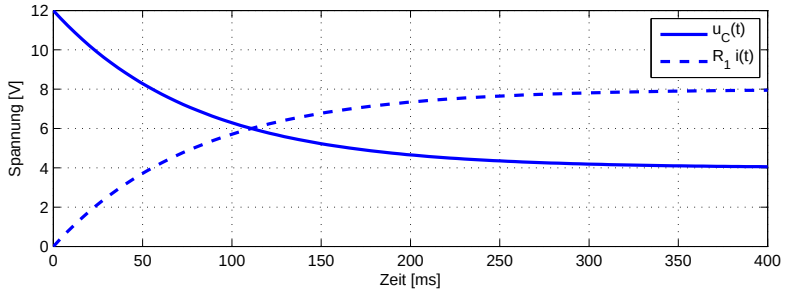
$$i(t) = i_\infty - (i_\infty - i_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

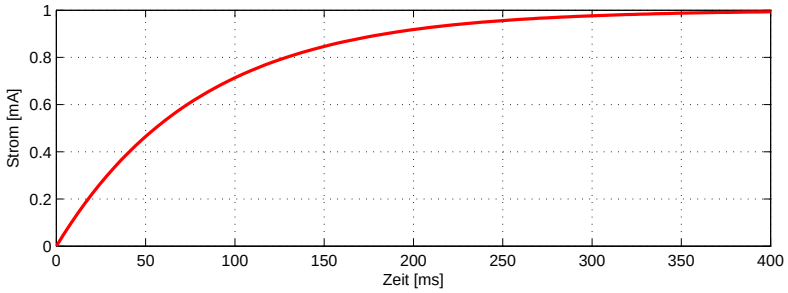
$$\boxed{i(t) = 1\mathrm{mA}\left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{t}/80\mathrm{ms}}\right)}$$

Man kann den Strom auch so berechnen:

$$U_\mathrm{q} = R_1 i(t) + u(t) \;\Rightarrow\; i(t) = \frac{1}{R_1}\left(U_\mathrm{q} - u(t)\right)$$

Skizze:





(b) Zu welchem Zeitpunkt t_1 hat die Kondensatorspannung den Wert $u_C(t_1) = 8\mathrm{V}$?

Setze

$$\begin{aligned} 8\mathrm{V} &= 4\mathrm{V} + 8\mathrm{V}\mathrm{e}^{-\mathrm{t}_1/80\mathrm{ms}} \\ \frac{1}{2} &= \mathrm{e}^{-t_1/80\mathrm{ms}} \\ t_1 &= 80\mathrm{ms}\ln 2 \end{aligned}$$

$$\boxed{t_1 = 55.5\mathrm{ms}}$$

Lösung zu Aufgabe 5.2

Berechnung der Zeitkonstanten: Wir betrachten den Innenwiderstand von den Klemmen der Spule aus. Für $t_1 \leq t < t_2$ (bei geschlossenem Schalter) ist das einfach R_2 (die Spannungsquelle ist durch eine Kurzschluss zu ersetzen). Die erste Zeitkonstante lautet daher:

$$\boxed{\tau_1 = \frac{L}{R_2} = 12\,\mathrm{ms}}$$

Für $t \geq t_2$ ist der Innenwiderstand R_1+R_2. Damit ergibt sich für die zweite Zeitkonstante:

$$\boxed{\tau_2 = \frac{L}{R_1 + R_2} = 2,4\,\mathrm{ms}}$$

Berechnung des Stroms: Für $t < 0$ fließt kein Strom durch die Spule. Wegen der Stetigkeit des Spulenstroms gilt also $i_0 = 0$. Im stationären Fall bei geschlossenem Schalter wirkt die Spule als Kurzschluss, und der stationäre (Gleich-) Strom durch die Spule ist gegeben durch

$$i_\mathsf{s} = \frac{U_\mathsf{q}}{R_2} = 1,2\,\mathrm{A}\,.$$

Eingesetzt in die *allgemeine Formel*

$$i(t) = i_\mathsf{s} - (i_\mathsf{s} - i_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

ergibt sich

$$\boxed{i(t) = i_\mathsf{s}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau_1}\right) = 1,2\,\mathrm{A}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/12\,\mathrm{ms}}\right) \text{ für } 0 \leq t < t_2}$$

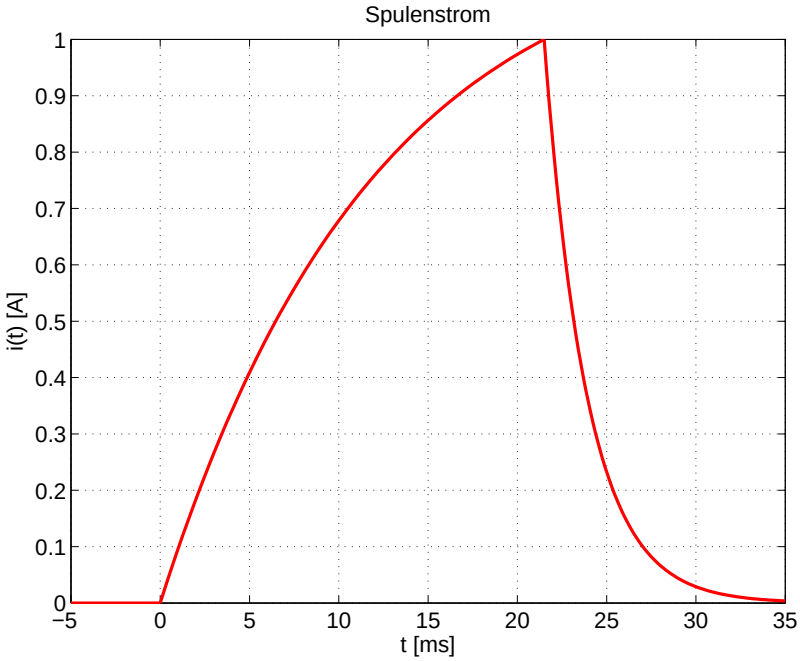
Zur Zeit $t_2 = 21,5\,\mathrm{ms}$ wird wieder geschaltet. Der Spulenstrom ist stetig, und hat zum Schaltzeitpunkt den Wert

$$\boxed{i_2 = i(t_2) = i_\mathsf{s}\left(1 - \mathrm{e}^{-t_2/\tau_1}\right) = 1,2\,\mathrm{A}\left(1 - \mathrm{e}^{-21,5\,\mathrm{ms}/12\,\mathrm{ms}}\right) = 1\,\mathrm{A}}\,.$$

Dieser Wert dient als Anfangswert (anstelle i_0) in der *allgemeinen Formel*. Der stationäre Spulenstrom bei offenem Schalter ist $i_s = 0$. Um die allgemeine Formel anzuwenden, muss man die Verschiebung der Anfangszeit von $t = 0$ in der ursprünglichen Formel zu $t = t_2$

berücksichtigen und daher die Variable t durch $t - t_2$ ersetzen. Damit ergibt sich für $t \geq t_2$:

$$\boxed{i(t) = i_2 \mathrm{e}^{-(t-t_2)/\tau_2} = 1\,\mathrm{A}\,\mathrm{e}^{-(t-21{,}5\,\mathrm{ms})/2{,}4\,\mathrm{ms}} \text{ für } t \geq t_2}$$



Berechnung der Spannungen: Durch den Widerstand R_2 fließt zu jedem Zeitpunkt der Spulenstrom $i(t)$. Deshalb gilt

$$\boxed{u_2(t) = R_2 i(t) = \begin{cases} 12\,\mathrm{V}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/12\,\mathrm{ms}}\right) & \text{für } 0 \leq t < t_2 \\ 10\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-(t-21{,}5\,\mathrm{ms})/2{,}4\,\mathrm{ms}} & \text{für } t \geq t_2 \end{cases}}$$

Für $0 \leq t < t_2$ liegt die volle Gleichspannung $u_1(t) = U_\mathrm{q}$ an R_1 an. Bei offenem Schalter für $t \geq t_2$ fließt der *negative* Spulenstrom $-i(t)$ durch R_1, und es liegt die Spannung $u_1(t) = -R_1 i(t)$ an. Deshalb gilt:

$$\boxed{u_1(t) = \begin{cases} 12\,\mathrm{V} & \text{für } 0 \leq t < t_2 \\ -40\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-(t-21{,}5\,\mathrm{ms})/2{,}4\,\mathrm{ms}} & \text{für } t \geq t_2 \end{cases}}$$

Die Spannung $u_L(t)$ an der Spule ergibt sich aus der Maschenregel:

$$u_L(t) + u_2(t) = u_1(t)$$

$$u_L(t) = u_1(t) - u_2(t)$$

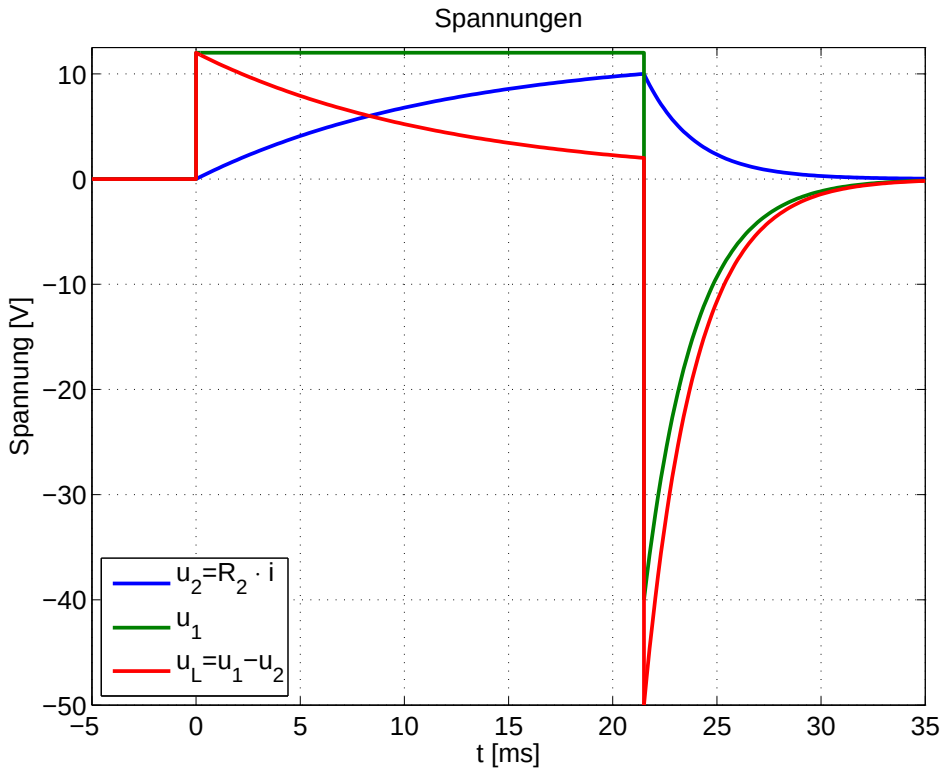
Daraus ergibt sich:

$$u_L(t) = \begin{cases} 12\,\mathrm{V} \mathrm{e}^{-t/12\,\mathrm{ms}} & \text{für } 0 \le t < t_2 \\ -50\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-(t-21{,}5\,\mathrm{ms})/2{,}4\,\mathrm{ms}} & \text{für } t \ge t_2 \end{cases}$$

Die Spannung an der Spule kann man alternativ dazu auch ganz formal mit

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i(t)$$

berechnen.



Lösung zu Aufgabe 5.3

Der (Ersatz-) Innenwiderstand von den Kondensatorklemmen aus betrachtet ist

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 12\,\mathrm{k\Omega} \;\Rightarrow\; \tau = RC = 0,6\,\mathrm{ms}\,.$$

Spannung am Kondensator:

Anfangsbedingung:

$$u_0 = 2\mathrm{V}$$

Der stationäre Zustand ergibt sich aus der Spannungsteiler-Regel:

$$u_\mathsf{s} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_\mathsf{q} = 6\,\mathrm{V}$$

Lösung:

$$u\,(t) \;=\; u_\mathsf{s} - (u_\mathsf{s} - u_0)\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$\boxed{u\,(t) = 6\mathrm{V} - 4\mathrm{V}\mathrm{e}^{-\mathrm{t}/\tau}}$$

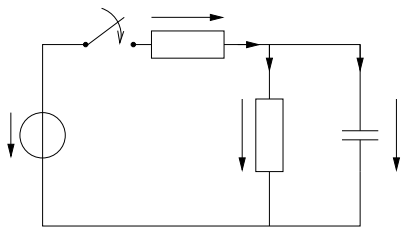
Spannung am Widerstand R_1:

Aus

$$U_\mathrm{q} = u_1(t) + u(t)$$

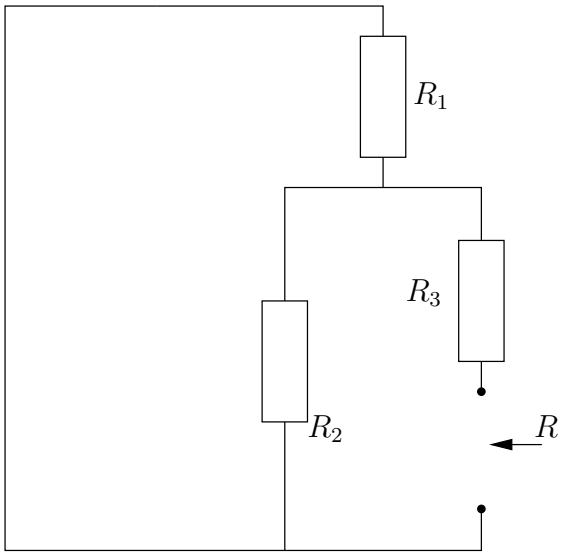
folgt

$$\boxed{u_1(t) = 4\mathrm{V}\left(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{t}/\tau}\right)}$$



Lösung der Aufgabe 5.4

Der Ersatz-Innenwiderstand R von den Klemmen der Spule aus gesehen



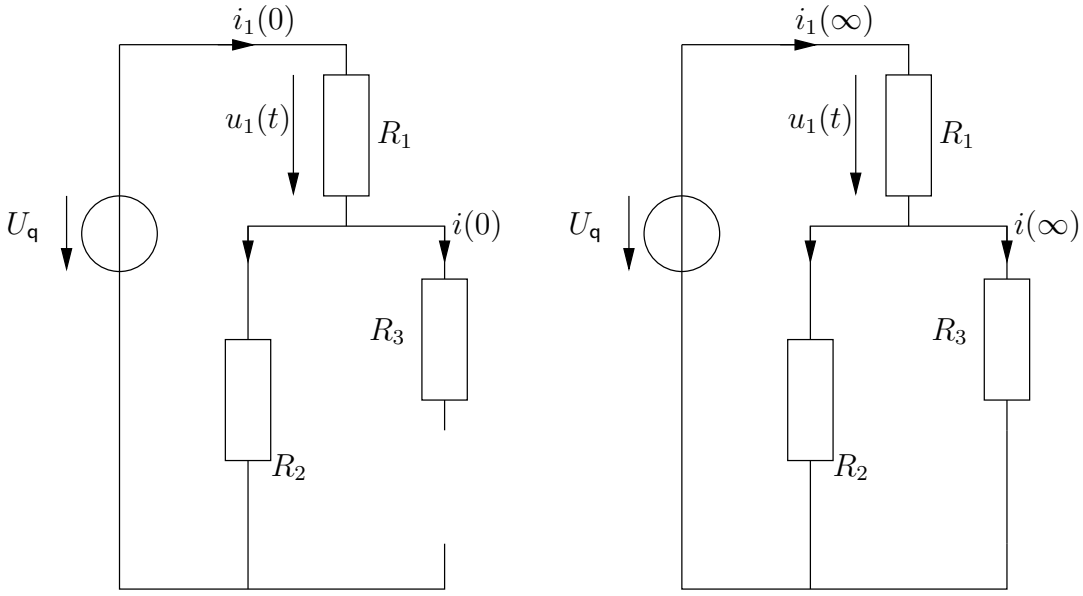
lautet

$$\begin{aligned} R &= R_3 + R_1||R_2 \\ &= R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \\ &= 50\,\Omega + \frac{20 \cdot 30}{20 + 30}\,\Omega \\ &= 62 \quad \Omega\,. \end{aligned}$$

Das ergibt die Zeitkonstante

$$\boxed{\tau = \frac{L}{R} = \frac{310\,\mathrm{mH}}{62\,\Omega} = 5\,\mathrm{ms}}$$

Anfangswerte und eingeschwungene Zustände für die Ströme Zur Zeit $t = 0$ fließt wegen der Stetigkeitsbedingung kein Spulenstrom, d.h. die Spule verhält sich wie ein Leerlauf (linkes Bild unten). Im stationären Zustand verhält sich die Spule wie ein Kurzschluss (rechtes Bild unten):



Für die Anfangswerte ergibt sich aus dem linken Bild

$$i_1(0) = \frac{U_\mathrm{q}}{R_1 + R_2} = \frac{15,5\,\mathrm{V}}{50\,\Omega} = 310\,\mathrm{mA}$$

und

$$i(0) = 0\,.$$

Für die stationären Ströme erhält man aus dem rechten Bild

$$i_1(\infty) = \frac{U_\mathrm{q}}{R_1 + R_2||R_3} = 400\,\mathrm{mA}$$

und (nach der Stromteilerregel)

$$i(\infty) = i_1(\infty)\frac{R_2}{R_2 + R_3} = 150\,\mathrm{mA}\,.$$

Nach der *allgemeinen Formel*

$$y(t) = y_\mathrm{s} - (y_\mathrm{s} - y_0)\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

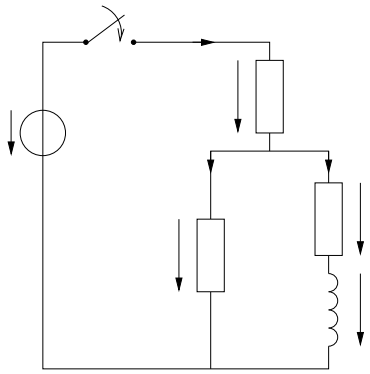
ergibt sich

$$\boxed{i(t) = 150\,\mathrm{mA}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$$

und

$$i_1(t) = 400\,\mathrm{mA} - (400\,\mathrm{mA} - 310\,\mathrm{mA})\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$\boxed{i_1(t) = 400\,\mathrm{mA} - 90\,\mathrm{mA}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$



Lösung zu Aufgabe 5.5

Die Kondensatorspannung wird durch die Differentialgleichung

$$\ddot{u} + 2\delta\dot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 U_\mathsf{q}$$

beschrieben. Die Dämpfung wird beschrieben durch

$$\boxed{\delta = \frac{R}{2L} = \frac{100\,\Omega}{8\,\mathrm{mH}} = 12,5 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1} = \frac{1}{80\,\mu\mathrm{s}}}$$

und die Resonanzfrequenz lautet

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{4\,\mathrm{mH} \cdot 20\,\mathrm{nF}}} = 111,8 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1}}.$$

Wegen

$$\omega_0 > \delta$$

liegt der Schwingfall vor. Die Güte ist mit

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{2\delta} = 4,47$$

einigermaßen groß. Die Frequenz der freien gedämpften Schwingung (Kurzschluss) lautet:

$$\boxed{\omega_\mathrm{d} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 111,8 \cdot 10^3\,\mathrm{s}^{-1}}$$

Die Lösung der freien Schwingung (homogene Dgl.) lautet also

$$u_\mathsf{h}(t) = \mathrm{e}^{-\delta t}\left(K_1 \cos\left(\omega_\mathsf{d} t\right) + K_2 \sin\left(\omega_\mathsf{d} t\right)\right)$$

mit freien Konstanten K_1, K_2.

(a) Der stationäre (eingeschwungene) Zustand ist gegeben durch

$$u_\mathsf{s}(t) = U_\mathsf{q}\,.$$

Die allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl. lautet dann:

$$u(t) = U_\mathsf{q} + \mathrm{e}^{-\delta t}\left(K_1 \cos\left(\omega_\mathsf{d} t\right) + K_2 \sin\left(\omega_\mathsf{d} t\right)\right)$$

Wegen der Stetigkeit von Strom und Spannung ergibt sich für die Konstanten (siehe Vorlesung):

$$K_1 = -U_\mathsf{q} = -10\,\mathrm{V}\,,\quad K_2 = -\frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}} U_\mathsf{q} = -0,1118 \cdot 10\,\mathrm{V}$$

$$u(t) = U_\mathsf{q}\left[1 - \mathrm{e}^{-\delta t}\left(\cos\left(\omega_\mathsf{d} t\right) + \frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}} \sin\left(\omega_\mathsf{d} t\right)\right)\right]$$

$$u(t) = U_\mathsf{q}\left[1 - \frac{\omega_0}{\omega_\mathsf{d}} \mathrm{e}^{-\delta t} \cos\left(\omega_\mathsf{d} t - \varphi_\mathsf{d}\right)\right]\,,\quad \varphi_\mathsf{d} = \arctan\frac{\delta}{\omega_\mathsf{d}}$$

Dann gilt:

$$\boxed{u(t) = 10\,\mathrm{V}\left[1 - \mathrm{e}^{-\delta t}\left(\cos\left(\omega_\mathsf{d} t\right) + 0,1118 \sin\left(\omega_\mathsf{d} t\right)\right)\right]}$$

$$\boxed{u(t) = 10\,\mathrm{V}\left[1 - 1,01\mathrm{e}^{-\delta t} \cos\left(\omega_\mathsf{d} t - \varphi_\mathsf{d}\right)\right]\,,\quad \varphi_\mathsf{d} = 6,42^\circ}$$

Wegen

$$\cos(\alpha) = \sin(\alpha + 90^\circ)$$

kann man auch schreiben:

$$\boxed{u(t) = 10\,\mathrm{V}\left[1 - 1,01\mathrm{e}^{-\delta t}\sin\left(\omega_\mathrm{d} t + 83,58°\right)\right]}$$

(b) Bedingung:

$$\omega_0 = \delta \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{2L} \;\Leftrightarrow\; \boxed{R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 894,4\,\Omega}$$

Lösung zu Aufgabe 5.6

Der komplexe Zeiger der Quellspannung lautet

$$\underline{U}_\mathsf{q} = 15\,\mathrm{V}\,.$$

Je nach Schalterstellung liegen verschiedene stationäre Zustände vor, die sich aus der komplexen Wechselstromrechnung ergeben. Für die offene Schalterstellung gilt

$$u_1(t) = \frac{\sqrt{2}U_\mathsf{q}}{\sqrt{1+\omega^2\tau_1^2}}\cos\left(\omega t - \phi_1\right)$$

mit

$$\tau_1 = R_1 C = 10\,\mathrm{ms}$$

und

$$\phi_1 = \arctan(\omega\tau_1) = 84,29^\circ\,.$$

Das Signal lautet dann:

$$u_1(t) = \sqrt{2}\cdot 1,49\,\mathrm{V}\,\cos\left(\omega t - 84,29^\circ\right)$$

Der stationäre Zustand für die geschlossene Schalterstellung lautet (vgl. Aufgabe 1.4)

$$u_2(t) = \frac{\sqrt{2}U_\mathsf{qe}}{\sqrt{1+\omega^2\tau_2^2}}\cos\left(\omega t - \phi_2\right)$$

mit

$$U_\mathsf{qe} = \frac{R_2}{R_1+R_2}U_\mathsf{q} = 1,36\,\mathrm{V}\,,$$

$$\tau_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}C = 0,909\,\mathrm{ms}$$

und

$$\phi_2 = \arctan(\omega\tau_2) = 42,27^\circ$$

Das Signal lautet dann:

$$u_2(t) = \sqrt{2} \cdot 1,01\,\mathrm{V}\,\cos\left(\omega t - 42,27^\circ\right)$$

Für negative Zeiten (der Schalter ist geschlossen) gilt $u(t) = u_1(t)$. Für positive Zeiten gilt nach der allgemeinen Formel

$$u(t) = u_2(t) - \left(u_2(0) - u_1(0)\right) \mathrm{e}^{-t/\tau_2}\,.$$

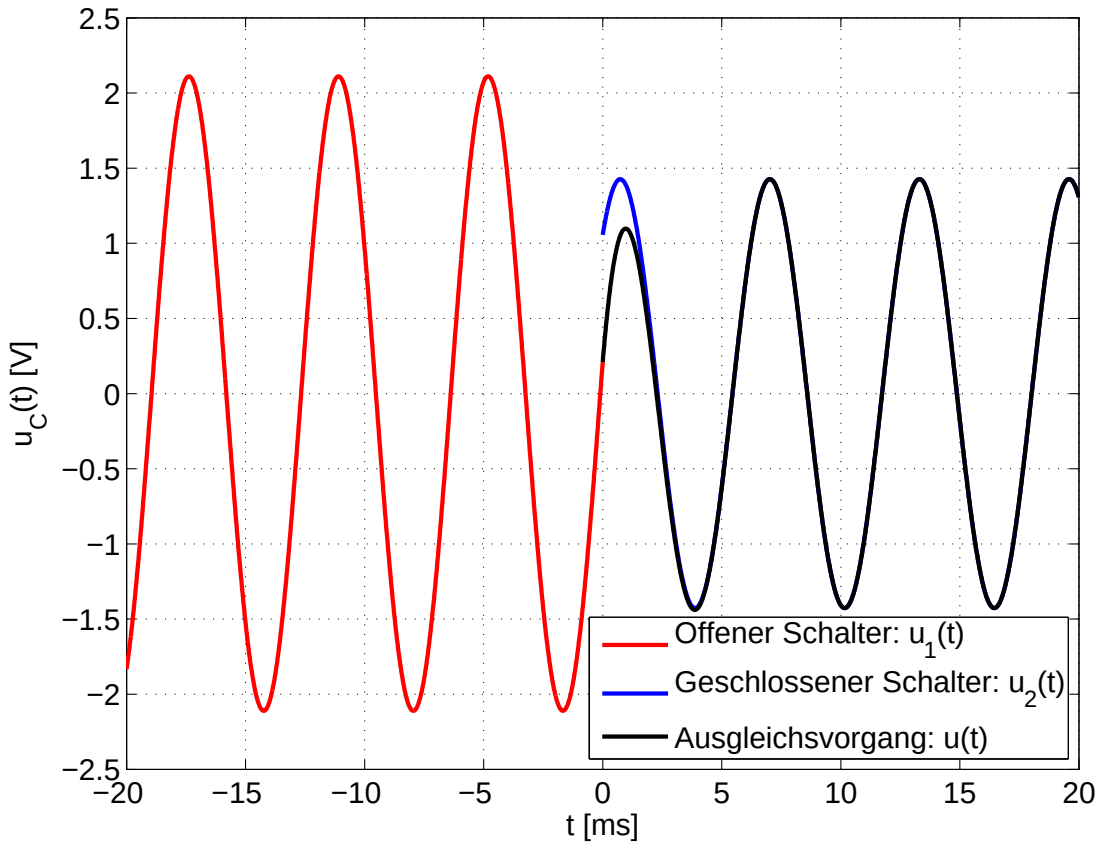
Hier muss man Folgendes einsetzen:

$$u_1(0) = 0,21\,\mathrm{V} \text{ und } u_2(0) = 1,06\,\mathrm{V}$$

Das ergibt

$$\boxed{u(t) = \sqrt{2} \cdot 1,01\,\mathrm{V}\,\cos\left(\omega t - 42,27^\circ\right) - 0,85\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-t/\tau_2}}$$

Die Abbildung zeigt den Spannungsverlauf:



Aufgaben zu Kapitel 6

Lösung zu Aufgabe 6.1

(a) Den Wellenwiderstand $\underline{Z}_{\text{L}}$ und die Ausbreitungskonstante γ der Leitung schreiben wir als

$$\underline{Z}_{\text{L}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}\sqrt{\frac{1 - j\frac{R'}{\omega L'}}{1 - j\frac{G'}{\omega C'}}}$$

und

$$\gamma = j\omega\sqrt{L'C'}\sqrt{\left(1 - j\frac{R'}{\omega L'}\right)\left(1 - j\frac{G'}{\omega C'}\right)}\,.$$

Die Kreisfrequenz ist gegeben durch

$$\omega = 2\pi f = 1,257 \cdot 10^6\,\text{s}^{-1} \;\Rightarrow\; \omega^{-1} = 795,8\,\text{ns}\,.$$

Für die obigen Ausdrücke berechnen wir folgende Größen:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{L'}{C'}} &= \sqrt{\frac{30\,\text{nH/m}}{4\,\text{pF/m}}} \\ &= \sqrt{7500}\,\Omega \\ &= 86,6\,\Omega\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\omega\sqrt{L'C'} &= 1,257 \cdot 10^6\,\text{s}^{-1}\sqrt{300\,\text{nH/m} \cdot 40\,\text{pF/m}} \\ &= 1,257 \cdot 10^6\sqrt{12 \cdot 10^{-18}}\,\text{m}^{-1} \\ &= 1,257 \cdot 10^6 \cdot 3,46 \cdot 10^{-9}\,\text{m}^{-1} \\ &= 4,35 \cdot 10^{-3}\,\text{m}^{-1}\end{aligned}$$

und außerdem

$$\begin{aligned}\frac{R'}{\omega L'} &= 795,8\,\mathrm{ns}\frac{150\,\mathrm{m\Omega/m}}{300\,\mathrm{nH/m}} \\ &= 795,8\cdot 5\cdot 10^{-4} \\ &= 0,40\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\frac{G'}{\omega C'} &= 795,8\,\mathrm{ns}\frac{1\,\mathrm{pS/m}}{40\,\mathrm{pF/m}} \\ &= 0,02\cdot 10^{-6}\end{aligned}$$

In den den beiden Formeln für γ und $\underline{Z}_{\llcorner}$ taucht unter der Wurzel der Term

$$1 - j\frac{G'}{\omega C'} = 1 - j0,02\cdot 10^{-6}$$

auf. Diesen kleinen Imaginärteil kann man vernachlässigen, denn einen Winkel von 10^{-8}rad $\approx 0,6\cdot 10^{-6}$ darf man durch den Winkel Null ersetzen, ohne dass es das Ergebnis verändert.
In beiden Formeln für γ und $\underline{Z}_{\llcorner}$ bleibt dann der Wurzelausdruck stehen:

$$\begin{aligned}\sqrt{1 - j\frac{R'}{\omega L'}} &= \sqrt{1 - 0,40j} \\ &= 1,02 - 0,20j\end{aligned}$$

Wenn man hierfür die Näherung

$$\sqrt{1 - jy} \approx 1 - \frac{1}{2}jy$$

verwendet, erhält man

$$\sqrt{1 - j\frac{R'}{\omega L'}} \approx 1 - 0,20j\,.$$

Die Näherung führt also auf einen Fehler von 2% (im Realteil). Wenn man damit weiter rechnet, erhält man also durchaus brauchbare, wenn auch nicht sehr genaue Ergebnisse. Im Folgenden wird aber nicht mit der Näherung, sondern mit den genauen Werten gerechnet.

Wellenwiderstand:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_{\mathrm{L}} &= 86,6\,\Omega\sqrt{\frac{1-0,40j}{1-0,02\cdot 10^{-6}j}} \\
&\approx 86,6\,\Omega\sqrt{1-0,40j} \\
&\approx 86,6\,\Omega\cdot\sqrt{1,08}\cdot \mathrm{e}^{-j21,8^\circ/2} \\
&\approx 86,6\,\Omega\cdot 1,038\cdot \mathrm{e}^{-j10,9^\circ} \\
&\approx 90\,\Omega\cdot \mathrm{e}^{-j10,9^\circ}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{Z}_{\mathrm{L}} = (88,24-16,91j)\,\Omega \approx 90\,\Omega\cdot \mathrm{e}^{-j10,9^\circ}}$$

Ausbreitungskonstante:

$$\begin{aligned}
\gamma &= j\omega\sqrt{L'C'}\sqrt{(1-0,40j)\,(1-0,02\cdot 10^{-6}j)} \\
&\approx j4,35\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}\sqrt{1-0,40j} \\
&\approx 4,35\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}\cdot 1,038\cdot \mathrm{e}^{j79,1^\circ} \\
&\approx 4,52\cdot \mathrm{e}^{j79,1^\circ}\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1} \\
&\approx (0.85+4,44j)\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\gamma = (0,85+4.44j)\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}} \quad \boxed{\alpha = 0,85\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}} \quad \boxed{\beta = 4,44\cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad/m} = 0,254^\circ/\mathrm{m}}$$

(b) Wellenlänge:

$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 1,417\,\mathrm{km}}$$

Dämpfung pro Kilometer:

$$-10\lg\left(\mathrm{e}^{-2\alpha\cdot 1\,\mathrm{km}}\right)\,\mathrm{dB} = 0.85\cdot 20\lg\mathrm{e}\,\mathrm{dB} = 7,38\ \mathrm{dB}$$

Übliche Schreibweise:

$$\boxed{\alpha = 7,38\,\mathrm{dB/km}}$$

(c) Wegen der Anpassung gibt es keine rücklaufende Welle. Es gilt daher:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_{\mathsf{h}} \mathrm{e}^{-\gamma x}$$

Anfang der Leitung bei $x = -\ell$ und Ende bei $x = 0$:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}(-\ell) = \underline{U}_{\mathsf{h}} \mathrm{e}^{\gamma \ell} \text{ und } \underline{U}_0 = \underline{U}(0) = \underline{U}_{\mathsf{h}}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \underline{U}_0 &= \underline{U}_1 \mathrm{e}^{-\gamma \ell} \\ &= 10\,\mathrm{V}\,\mathrm{e}^{-0.85 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1} \cdot 200\,\mathrm{m}} \mathrm{e}^{-j0{,}254° \cdot 200} \\ &= 10\,\mathrm{V} \cdot 0,84 \mathrm{e}^{-j50{,}8°} \end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{U}_0 = 8,4\,\mathrm{V} \mathrm{e}^{-j50{,}8°}}$$

$$\boxed{\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_{\mathsf{L}}} = 93,3\,\mathrm{mA} \mathrm{e}^{-j39{,}9°}} \text{ oder etwas genauer: } \underline{I}_0 = 93,9\,\mathrm{mA} \mathrm{e}^{-j40{,}0°}$$

$$\boxed{\underline{S}_0 = \frac{U_0^2}{\underline{Z}_{\mathsf{L}}^*} = 0,792\,\mathrm{VA} \cdot \mathrm{e}^{-j10{,}9°} = 0,778\,\mathrm{W} - 0,149j\,\mathrm{var}}$$

(d) Wegen der Anpassung ist der Eingangswiderstand gleich dem Wellenwiderstand und es gilt:

$$\boxed{\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{\mathsf{L}}} = 111,3\,\mathrm{mA} \mathrm{e}^{j10{,}8°}}$$

$$\boxed{\underline{S}_1 = \frac{U_1^2}{\underline{Z}_{\mathsf{L}}^*} = 1,113\,\mathrm{VA} \cdot \mathrm{e}^{-j10{,}9°} = 1,093\,\mathrm{W} - 0,209j\,\mathrm{var}}$$

Lösung zu Aufgabe 6.2

(a) Wellenwiderstand $\underline{Z}_{\mathsf{L}}$, die Ausbreitungskonstante γ sowie die Wellenlänge λ. Es gilt

$$\omega = 10^8 \mathrm{s}^{-1}.$$

Folgende Größen werden später benötigt:

$$\frac{R'}{\omega L'} = \frac{360 \cdot 10^{-3}}{10^8 \cdot 360 \cdot 10^{-9}} = 0,01$$

$$\frac{G'}{\omega C'} = \frac{30 \cdot 10^{-12}}{10^8 \cdot 100 \cdot 10^{-12}} = 3 \cdot 10^{-9}$$

$$\frac{L'}{C'} = \frac{360 \cdot 10^{-9}\mathrm{H}}{100 \cdot 10^{-12}\mathrm{F}} = 3600\,\Omega^2$$

$$\omega\sqrt{L'C'} = 10^8 \mathrm{m}^{-1}\sqrt{36 \cdot 10^{-18}} = 0,6\,\mathrm{m}^{-1}$$

Verwende außerdem folgende Näherung für die Wurzel:

$$\sqrt{1 - jy} \approx 1 - \frac{1}{2}jy \text{ für } y \ll 1$$

Dann gilt:

$$\underline{Z}_{\mathsf{L}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}\sqrt{\frac{1 - j\frac{R'}{\omega L'}}{1 - j\frac{G'}{\omega C'}}} = 60\,\Omega\sqrt{\frac{1 - j0,01}{1 - j3 \cdot 10^{-9}}} \approx 60\,\Omega\,(1 - 0,005j)$$

$$\boxed{\underline{Z}_{\mathsf{L}} = 60\,\Omega\,\mathrm{e}^{-j0,005\mathrm{rad}} = 60\,\Omega\,\mathrm{e}^{-j0,3^\circ} \approx 60\,\Omega}$$

$$\begin{aligned}\gamma &= j\omega\sqrt{L'C'}\sqrt{\left(1 - j\frac{R'}{\omega L'}\right)\left(1 - j\frac{G'}{\omega C'}\right)} \\ &= j0,6\,\mathrm{m}^{-1}\sqrt{(1 - j0,01)\,(1 - j3 \cdot 10^{-9})} \\ &\approx j0,6 \cdot (1 - 0,005j)\,\mathrm{m}^{-1}\end{aligned}$$

$$\boxed{\gamma = \alpha + j\beta = (0,003 + 0,6j)\ \mathrm{m}^{-1}} \text{ und } \boxed{\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \approx 10,5\,\mathrm{m}}$$

Die Dämpfung beträgt

$$3\,\mathrm{Np/km} \approx 26\,\mathrm{dB/km}\,.$$

(b) Strom $\underline{I}_1$ und die Leistung $\underline{S}_1$ am Anfang der Leitung.

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{\mathsf{L}}} = \frac{12\,\mathrm{V}}{60\,\Omega}$$

$$\boxed{\underline{I}_1 = 200\,\mathrm{mA} = 200\,\mathrm{mA}}$$

$$\underline{S}_1 = \underline{Z}_\llcorner I_1^2 = 60\,\Omega \cdot 0,04\,\mathrm{A}$$

$$\boxed{\underline{S}_1 = 2,4\,\mathrm{VA}}$$

(c) Die Spannung $\underline{U}_0$, den Strom $\underline{I}_0$ und die Leistung $\underline{S}_0$ am Ende der Leitung.

$$\underline{U}_0 = \mathrm{e}^{-\gamma\ell}\underline{U}_1 = \mathrm{e}^{-j60,3\,\mathrm{rad}}\mathrm{e}^{-0,3} \cdot 12\,V$$

$$\boxed{\underline{U}_0 = 8,9\,\mathrm{V}\mathrm{e}^{j144^\circ}}$$

$$\boxed{\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}_0}{\underline{Z}_\llcorner} = 150\,\mathrm{mA}\mathrm{e}^{j144^\circ}}$$

$$\boxed{\underline{S}_0 \approx \frac{81\,\mathrm{V}^2}{60\,\Omega} \approx 1,3\,\mathrm{VA}}$$

(d) Die maximal mögliche Leitungslänge $\ell_{1/2}$, wenn die Verlustleistung durch das Kabel maximal die Hälfte der am Anfang eingespeisten Leistung betragen darf.

$$2\alpha\ell_{1/2} = \ln 2$$

$$0,006\,\mathrm{m}^{-1}\ell_{1/2} = 0,69$$

$$\boxed{\ell_{1/2} \approx 115\,\mathrm{m}}$$

Index

3-dB Länge, 197
3-dB-Bandbreite, 24, 76
3-dB-Punkt, 76

Abschluss einer Leitung, 206
Abschlusswiderstand, 207
Admittanz, 20
aktiver Zweipol, 46
angepasster Abschluss, 208
Aron-Schaltung, 111, 118
Ausbreitungskonstante, 192, 193
Ausgleichsvorgänge, 125

Bandpassfilter, 67, 70
Blindleistung, 38
Blindwiderstand, 41

Dämpfungskonstante, 83
Dämpfungskonstanten, 193, 196
Dezibel, 196
Differentialgleichung, 136
Drehstrom, 95
Dreieckschaltung, 100

Effektivwerte, 11
Eingangsimpedanz, 33
Eingangswiderstand, 33
eingeschwungener Zustand, 17, 125
Elektrische Leistung, 35
Energiespeicher, 136

Ersatz-Innenwiderstand, 46
Erzeuger, 31
Erzeuger-Zählpfeilsystem, 31

flüchtiger Vorgang, 127
freie Schwingung, 167

Güte, 71
gedämpfte Welle, 193
Generatorstrang, 99
Grenzfrequenz, 24

Halbwertsbreite, 24
Halbwertszeit, 221
hinlaufende Welle, 192
homogene Differentialgleichung, 138

Ideale Quellen, 42
ideale Quellen, 42
Impedanz, 17, 19
Induktionsgesetz, 17
Induktivität, 17
inhomogene Differentialgleichung, 138
Innenwiderstand, 43

Kapazität, 18
Kennwiderstand, 71
Kirchhoffsche Gesetze, 27
Knotenregel, 28
Koaxialkabel, 189, 204

komplexe (Schein-) Leistung, 37
Kondensator-Entladung, 127
Kriechfall, 168
Kurzschluss-Abschluss, 209
Kurzschlusslösung, 127

Lösungsraten bei Differentialgleichungen, 139
LCR-Reihenschwingkreis, 67
Leerlauf-Abschluss, 208
Leistung, 9, 36
Leistungsanpassung, 51
Leiter (Drehstrom), 95
Leiterbeläge, 189
Leiterspannungen, 96, 114
Leiterströme, 112, 115
Lenzsche Regel, 32
Lineare Quellen, 43
lineare Quellen, 42
Linearität, 16
Linearkombination, 138

Maschenregel, 29

Neper, 196, 197
Neutralleiter, 96
Nullleiter, 96

Ortskurven, 61

Phasen-Geschwindigkeit, 194

quadratischer Mittelwert, 9

rücklaufende Welle, 192
RC-Tiefpass, 22
Reaktanz, 41
Rechtssystem, 96
reelles Zeitsignal, 13
Reflexionsfaktor, 207
Resistanz, 41
Resonanzüberhöhung, 80
Resonanzen, 67
Resonanzfall, 68
RG58 (Koaxialkabel), 204
Ringschaltung, 100
rotierender Zeiger, 12

Schaltgesetze, 131
Scheinleistung, 37
Schwingfall, 168
Schwingungsgleichung, 166
Skineffekt, 205
Standard-Bauelemente, 17
Standard-Bauteile, 17
stationärer Zustand, 125
stehende Welle, 208, 209
Stern-Dreieck-Transformation, 113
Sternpunkt, 99, 100, 105
Sternpunktkonstruktion, 105
Sternschaltung, 100
Sternspannungen, 96
Strang, 99
Strangspannung, 100
Strangspannungen, 96
Strangströme, 112, 115
Strangstrom, 100
Stromrichtung, 28
Superpositionsprinzip, 180

Thomsonsche Schwingungsgleichung, 69
twisted pair (Leitungen), 189

Überschwinger, 175, 179
Übertragungsfunktion, 24, 26, 64

Verbraucher, 31

Verbraucher-Zählpfeilsystem, 32
Verbraucherstrang, 100
Verstimmung, 73
Vierpol-Kettengleichungen, 211

Wellen, 193
Wellenlänge, 194
Wellenwiderstand, 200, 201, 203
Wellenzahl, 193
Widerstand, 19
Wirkleistung, 36
Wirkwiderstand, 41

Zählpfeile, 30
Zeitkonstante, 24
zeitunabhängiger Zeiger, 12
Zweidrahtleitungen, 189
Zweipol, 31
Zweipole, 30

Literaturverzeichnis

[1] Frohne, H. ; Löcherer, K.-H. ; Müller, H. ; Harriehausen, Th. ; Schwarzenau, D.: *Moeller Grundlagen der Elektrotechnik*. 22. Auflage. Vieweg und Teubner, 2011

[2] Hagmann, Gert: *Grundlagen der Elektrotechnik*. 15. Auflage. Aula-Verlag, 2011

[3] Kupfmüller, Karl: *Einführung in die theoretische Elektrotechnik*. 13. Auflage. Springer-Verlag, 1990

[4] Lüders, Christian: *Physik 2*. Studienbuch an der FH-SWF, 2010

[5] Ose, Rainer: *Elektrotechnik für Ingenieure*. 4. Auflage. Carl Hanser Verlag, 2008

[6] Papula, Lothar: *Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure, Band 2*. 13. Auflage. Vieweg und Teubner, 2012

[7] Schulze, Henrik: *Ingenieurmathematik 2*. Studienbuch an der FH-SWF, 2009

[8] Schulze, Henrik: *Ingenieurmathematik 1*. Vorlesungsskript an der FH-SWF, 2014

[9] Wikipedia: *Drehstromgenerator*. `http://de.wikipedia.org/wiki/Drehstromgenerator`, 2014. – [Online; Zugriff 7. August 2014]