

**Grundlagen
der
Elektrotechnik
III**

Inhaltsverzeichnis:

1	Einleitung.....	3
2	Periodische nichtsinusförmige Vorgänge	5
2.1	Fourier-Reihe in reeller Darstellung.....	5
2.2	Symmetrie-Eigenschaften	13
2.3	Effektivwerte und Leistungsdefinitionen bei nichtsinusförmigen Spannungen und Strömen.....	17
2.4	Fourierreihe in komplexer Darstellung.....	25
3	Nichtperiodische Vorgänge	31
3.1	Das komplexe Fourierintegral	31
3.2	Reelle Darstellung des Fourierintegrals	37
3.3	Zuordnungssatz und Symmetrieeigenschaften	38
3.4	Berechnung von Spektralfunktionen und Herleitung von Rücktransformationsformeln.....	40
3.5	Elektrische Schaltvorgänge	48

1 Einleitung

Gegenstand der Vorlesung **Grundlagen der Elektrotechnik 2** (Wechselstromlehre 1. Teil; 2. Trimester) war die Behandlung ausschließlich „sinusförmiger Vorgänge“ in der Elektrotechnik.

Die Vorlesung **Grundlagen der Elektrotechnik 3** (Wechselstromlehre 2. Teil; 3. Trimester) stellt nun die Erweiterung auf zunächst „periodische nichtsinusförmige Vorgänge“, anschließend auf „nichtperiodische Vorgänge“ (z.B. Schaltvorgänge) dar.

Daraus ergibt sich die folgende kurze Inhaltsübersicht:

- Periodische nichtsinusförmige Vorgänge:
 - Fourier-Reihe in reeller und komplexer Form;
 - Mittelwerte und Leistungsdarstellung;
- Nichtperiodische Vorgänge (instationäre oder Ausgleichsvorgänge):
 - Fourier-Integral in komplexer und reeller Form;
 - Analyse von Schaltvorgängen mit Fouriermethode („Spektralbereich“);
 - Analyse von Schaltvorgängen mit Differentialgleichungen („Zeitbereich“);

Zunächst einige einführende Bemerkungen zu nichtsinusförmigen Vorgängen in der Wechselstromlehre

Im 2. Trimester wurden ausschließlich sinusförmige Vorgänge behandelt, z.B. Sinusförmige Spannung in reeller Darstellung:

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Sinusförmige Spannung in komplexer Darstellung:

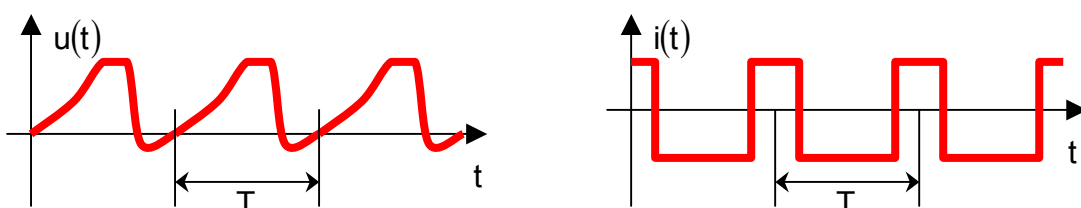
$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= u_r(t) + j \cdot u_i(t) = \\ &= \hat{U} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_u) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)) = \\ &= \hat{U} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \\ &= \hat{U} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t} = \underline{\hat{U}} \cdot e^{j\omega t} \end{aligned}$$

mit: $\underline{\hat{U}} = \hat{U} \cdot e^{j\varphi_u}$ (komplexe Amplitude)

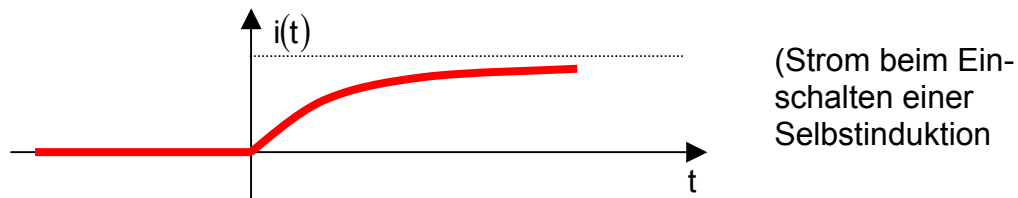
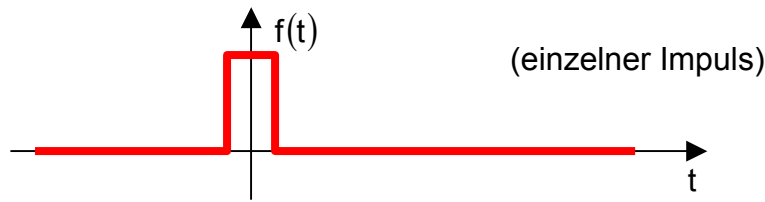
Ein Schwerpunkt lag bei der Einführung der „komplexen Rechnung“ (komplexe Amplituden, Leitwerte, Widerstände, Übersetzungsverhältnisse), die gegenüber der „reellen Rechnung“ (Stichwort: Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen) große Vorteile besitzt (Betrag und Phase kommen „automatisch“ heraus).

Nun spielen in der Technik aber nichtsinusförmige Vorgänge (z.B. Schaltvorgänge, Impulstechnik, usw.) eine wesentlich größere Rolle. Wir teilen sie ein in

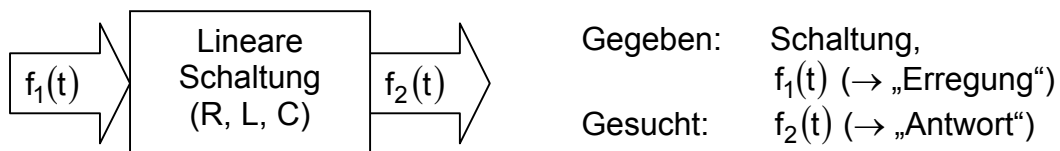
- Periodische nichtsinusförmige Vorgänge, z.B.



- Nichtperiodische Vorgänge, z.B.



Die Aufgabenstellung lautet meist folgendermaßen:



Die Methoden zur Behandlung solcher Aufgabenstellungen sind, allerdings nur für sinusförmige Vorgänge, aus dem 2. Trimester bekannt.

Bei nichtsinusförmigen Vorgängen sind die bisherigen Kenntnisse (insbesondere die komplexe Rechnung) nicht ohne weiteres anwendbar. Grundsätzlich existieren nun zwei Lösungswege:

- Weg über Differentialgleichungen:
Aus den Beziehungen an den Schaltelementen zwischen Spannung und Strom ($u(t) = R \cdot i(t)$, $u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$, $i(t) = C \cdot \frac{du(t)}{dt}$) und den Kirchhoff'schen Gleichungen bauen wir eine Differentialgleichung (DGL) für die gesuchte Funktion $f_2(t)$ auf (wobei wir $f_1(t)$ bzw. „Anfangsbedingungen“ brauchen). Die DGL wird dann nach den Regeln der Mathematik nach $f_2(t)$ aufgelöst.
- Zurückführung des „nichtsinusförmigen“ Problems auf ein „sinusförmiges“.

Der zweite Weg ist (hauptsächlich) Gegenstand dieser Vorlesung. Man kann nämlich zeigen, daß nichtsinusförmige Funktionen in sinusförmige „Bestandteile“ zerlegt werden können (Fourierzerlegung, Fourieranalyse). Diese Fourierzerlegung führt

- bei periodischen Vorgängen auf eine Reihe (Fourier-Reihe),
- bei nichtperiodischen Vorgängen auf ein Integral (Fourier-Integral).

Jeden „Bestandteil“ der Zerlegung (Reihenglied bzw. Integrand \times Frequenzintervall im Integral) kann man dann mit den im 2. Trimester behandelten Methoden „verarbeiten“ und aus den „verarbeiteten“ Bestandteilen hinterher die Lösung wieder zusammensetzen.

Anmerkung: Im Rahmen dieser Vorlesung werden natürlich hauptsächlich Zeitfunktionen (Zeit t als unabhängige Variable) behandelt. Die gezeigten Methoden lassen sich aber auch verallgemeinern (z.B. auf Ortsfunktionen \rightarrow Mathematikvorlesung).

2 Periodische nichtsinusförmige Vorgänge

(Fourier-Analyse periodischer Vorgänge).

Jean Baptiste Fourier 1768-1830, französischer Physiker und Mathematiker (entwickelte auch die mathematische Theorie der Wärmeleitung, Kanonenrohre!).

2.1 Fourier-Reihe in reeller Darstellung

Vorbemerkungen:

Synthese:

Die Summe von Sinus- (Kosinus-) Funktionen unterschiedlicher Periodendauer (bzw. Frequenz) ergibt wieder eine periodische Funktion, deren „Grundfrequenz“ der größte gemeinsame Teiler der Einzelfrequenzen ist. Oder umgekehrt: Wir beginnen mit einer Sinusfunktion der (Grund-) Kreisfrequenz $\omega_g = \frac{2\pi}{T}$ und überlagern Sinusfunktionen mit ganzzahligen Vielfachen ($\kappa \cdot \omega_g$, mit $\kappa = 2,3,\dots,\lambda,\dots,n$) der Grundfrequenz ω_g ($\kappa = 1$). Wir erhalten als Summe eine periodische Funktion der Grundperiode $T = \frac{2\pi}{\omega_g}$.

Es müssen noch Kosinusfunktionen herangezogen werden, da aus lauter (ungeraden) Sinusfunktionen natürlich auch wieder nur ungerade Summenfunktionen entstehen, was aber allgemein nicht gefordert werden darf.

Analyse: (Aufgabenstellung in diesem Kapitel)

Es sei nun eine beliebige periodische Funktion (Periodendauer T) gegeben (meistens stückweise analytisch im Periodenbereich vorgegeben). Diese periodische Funktion soll nun in die Sinus- und Kosinus-Funktionen zerlegt werden, aus denen sie aufgebaut ist. Es sind also die Amplituden der Sinus- und Kosinusteilschwingungen („Harmonischen“) mit ganzzahligem Vielfachen der Grundfrequenz $\omega_g = \frac{2\pi}{T}$ zu bestimmen.

Es sei nun eine periodische Funktion gegeben

$$f(x) = f(x \pm k \cdot 2\pi) \quad \text{mit: } k = 1,2,3,\dots$$

wobei x im Bogenmaß anzusetzen ist (\rightarrow Periodendauer: 2π).

Anmerkung: Von der mathematisch dimensionslosen Darstellung gelangt man zu den physikalischen (dimensionsbehafteten) Schreibweisen für

- Zeitfunktionen mit der Substitution $x = \omega_g t$ ($\omega_g = \frac{2\pi}{T}$ Grundfrequenz der in T periodischen Zeitfunktion)
 $f(\omega_g t) = f(\omega_g t \pm k \cdot \omega_g T) \Rightarrow f(t) = f(t \pm k \cdot T)$
- Ortsfunktionen mit der Substitution $x = \beta_0 l$ ($\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ der in λ periodischen Ortsfunktion)

$$f(\beta_0 l) = f(\beta_0 l \pm k \cdot \beta_0 \lambda) \Rightarrow f(l) = f(l \pm k \cdot \lambda)$$

$f(x)$ soll aus Sinus- und Kosinusfunktionen aufgebaut werden, wobei die Periodendauern der Teilschwingungen ganzzahlige Teiler der Periodendauer von $f(x)$ sind. Hierzu wird $f(x)$ angenähert durch ein Polynom $S_n(x)$ mit (zunächst) $2 \cdot n + 1$ Gliedern:

$$f(x) \cong S_n(x) = \sum_{\kappa=1}^n (a_{\kappa} \cdot \sin(\kappa x)) + \sum_{\kappa=0}^n (b_{\kappa} \cdot \cos(\kappa x))$$

Wie sind nun in dieser Reihendarstellung die Koeffizienten a_{κ} und b_{κ} zu wählen, damit die Näherung $S_n(x)$ möglichst gut mit der gegebenen Orginalfunktion $f(x)$ übereinstimmt?

Exakt macht man das folgendermaßen:

- Man bildet den Fehler $\varepsilon_n(x) = f(x) - S_n(x)$. Dieser ist natürlich eine Funktion von x .
- Nun bildet man das „mittlere Fehlerquadrat“ M (Integration des quadratischen Fehlers über eine Periode der Orginalfunktion, um die Vorzeichenabhängigkeit und die x -Abhängigkeit des Fehlers zu eliminieren):

$$M = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} (\varepsilon_n(x))^2 \cdot dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} (f(x) - S_n(x))^2 \cdot dx$$

Beachte: $M = M(a_{\kappa}, b_{\kappa})$, weil $S_n = S_n(x, a_{\kappa}, b_{\kappa})$

- Nun soll M durch geeignete Wahl von a_{κ} und b_{κ} minimiert werden:

$$\frac{\partial M}{\partial a_{\kappa}} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial b_{\kappa}} = 0$$

Dies muß für jedes einzelne κ gefordert werden. Hieraus erhält man die Vorschriften für die Bildung der a_{κ} und b_{κ} .

- Nun kann man ferner noch zeigen, daß für $n \rightarrow \infty$ (∞ viele Glieder, $S_n \rightarrow S_{\infty}$) das mittlere Fehlerquadrat M verschwindet ($M = 0$). In diesem Fall wird die Orginalfunktion $f(x)$ durch seine Reihendarstellung $S_{\infty}(x)$ exakt beschrieben ($f(x) = S_{\infty}(x)$).

Auf die mathematische Durchführung des in a)-d) beschriebenen Rechenweges wird hier verzichtet (insbesondere der Beweis für d) ist mühsam). Stattdessen wird sofort eine unendliche Fourier-Reihe angesetzt, d.h. die gegebene (in 2π periodische) Funktion $f(x)$ wird durch ein Polynom $S_{\infty}(x)$ aus ∞ vielen Sinus- und Kosinusfunktionen nachgebildet. Die Periodendauern der Sinus- und Kosinusfunktionen sind ganzzahlige Teiler der Periodendauer 2π von $f(x)$.

$$f(x) = S_{\infty}(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_{\kappa} \cdot \sin(\kappa x)) + \sum_{\kappa=0}^{\infty} (b_{\kappa} \cdot \cos(\kappa x))$$

Ausgeschrieben lautet diese Reihendarstellung:

$$f(x) = \begin{matrix} a_1 \cdot \sin(x) + a_2 \cdot \sin(2x) + a_3 \cdot \sin(3x) + \dots + a_{\kappa} \cdot \sin(\kappa x) + \dots + \\ b_0 + b_1 \cdot \cos(x) + b_2 \cdot \cos(2x) + b_3 \cdot \cos(3x) + \dots + b_{\kappa} \cdot \cos(\kappa x) + \dots \end{matrix}$$

Jede in 2π periodische Funktion $f(x)$ lässt sich mit einem solchen Ansatz nachbilden.

Es stellt sich nun die Frage, wie die Koeffizienten a_κ und b_κ vor den Sinus- und Kosinusfunktionen zu bestimmen sind. Diese Koeffizienten sind selbstverständlich abhängig von der gegebenen Funktion $f(x)$.

Um die Bildungsvorschriften für die Koeffizienten a_κ und b_κ herzuleiten werden die sog. Orthogonalitätssätze für die trigonometrischen Funktionen benötigt:

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} \sin(\kappa x) \cdot \cos(\lambda x) \cdot dx = 0 \quad (\text{immer!}) \\
 (2) \quad & \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} \sin(\kappa x) \cdot \sin(\lambda x) \cdot dx = \begin{cases} 0 & \text{für: } \kappa \neq \lambda \\ 1 & \text{für: } \kappa = \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{für: } \kappa = \lambda = 0 \end{cases} \\
 (3) \quad & \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} \cos(\kappa x) \cdot \cos(\lambda x) \cdot dx = \begin{cases} 0 & \text{für: } \kappa \neq \lambda \\ 1 & \text{für: } \kappa = \lambda \neq 0 \\ 2 & \text{für: } \kappa = \lambda = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

κ, λ : ganzzahlig!

Mit Hilfe einiger Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen lässt sich die Gültigkeit dieser Orthogonalitätssätze sehr leicht zeigen:

$$(1) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

$$\int_{x=0}^{2\pi} \sin(\kappa x) \cdot \cos(\lambda x) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} \sin((\kappa + \lambda) \cdot x) \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} \sin((\kappa - \lambda) \cdot x) \cdot dx = 0$$

$$(2),(3) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2} \cdot (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\begin{aligned}
 \int_{x=0}^{2\pi} \sin(\kappa x) \cdot \sin(\lambda x) \cdot dx &= \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} \cos((\kappa - \lambda) \cdot x) \cdot dx - \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} \cos((\kappa + \lambda) \cdot x) \cdot dx \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{für: } \kappa \neq \lambda \\ \pi & \text{für: } \kappa = \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{für: } \kappa = \lambda = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{x=0}^{2\pi} \cos(\kappa x) \cdot \cos(\lambda x) \cdot dx &= \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} \cos((\kappa - \lambda) \cdot x) \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} \cos((\kappa + \lambda) \cdot x) \cdot dx \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{für: } \kappa \neq \lambda \\ \pi & \text{für: } \kappa = \lambda \neq 0 \\ 2\pi & \text{für: } \kappa = \lambda = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Orthogonalitätssätze lassen sich die Bildungsvorschriften für die Koeffizienten a_κ und b_κ herleiten. Dazu geht man von dem bekannten Ansatz aus, um die in 2π periodische Funktion $f(x)$ durch eine unendliche Reihe auszudrücken:

$$f(x) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_\kappa \cdot \sin(\kappa x)) + \sum_{\kappa=0}^{\infty} (b_\kappa \cdot \cos(\kappa x))$$

gegeben!

gesucht!

Diese (Ansatz-) Gleichung wird nun auf beiden Seiten mit $\frac{1}{\pi} \cdot \sin(\lambda x)$ bzw. $\frac{1}{\pi} \cdot \cos(\lambda x)$ durchmultipliziert. Anschließend erfolgt die Integralbildung über eine Periode (2π) der Originalfunktion $f(x)$. Mit Hilfe der vorher abgeleiteten Orthogonalitätssätze erhält man:

$\lambda \neq 0$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} f(x) \cdot \sin(\lambda x) \cdot dx = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(a_\kappa \cdot \underbrace{\frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} \sin(\kappa x) \cdot \sin(\lambda x) \cdot dx}_{\begin{matrix} 0 & \text{für: } \kappa \neq \lambda \\ 1 & \text{für: } \kappa = \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{für: } \kappa = \lambda = 0 \end{matrix}} \right) + \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left(b_\kappa \cdot \underbrace{\frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} \cos(\kappa x) \cdot \sin(\lambda x) \cdot dx}_{=0} \right) = a_\lambda$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} f(x) \cdot \cos(\lambda x) \cdot dx = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(a_\kappa \cdot \underbrace{\frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} \sin(\kappa x) \cdot \cos(\lambda x) \cdot dx}_{=0} \right) + \sum_{\kappa=0}^{\infty} \left(b_\kappa \cdot \underbrace{\frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} \cos(\kappa x) \cdot \cos(\lambda x) \cdot dx}_{\begin{matrix} 0 & \text{für: } \kappa \neq \lambda \\ 1 & \text{für: } \kappa = \lambda \neq 0 \\ 2 & \text{für: } \kappa = \lambda = 0 \end{matrix}} \right) = b_\lambda$$

$\lambda = 0$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} f(x) \cdot dx = b_0$$

Der Koeffizient b_0 ist, wie aus der Gleichung sofort ersichtlich, der lineare Mittelwert der gegebenen Funktion $f(x)$.

Es bleibt also von der rechten Seite jeweils nur das entsprechende Glied mit $\kappa = \lambda$ übrig. Der Form halber kann jetzt λ wieder durch κ ersetzt werden. Damit lauten die Formeln für die Gewinnung der Fourierkoeffizienten a_κ und b_κ der gegebenen, in 2π periodischen Funktion $f(x)$:

$a_\kappa = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} f(x) \cdot \sin(\kappa x) \cdot dx$	$\kappa = 1,2,3 \dots \infty$
$b_\kappa = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} f(x) \cdot \cos(\kappa x) \cdot dx$	$\kappa = 1,2,3 \dots \infty$
$b_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} f(x) \cdot dx$	$\kappa = 0$ (linearer Mittelwert!)

Mit diesen Fourierkoeffizienten lässt sich die in 2π periodische Funktion $f(x)$ als unendliche Reihe darstellen:

$f(x) = b_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_\kappa \cdot \sin(\kappa x)) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (b_\kappa \cdot \cos(\kappa x))$
--

Dieser mathematische (dimensionslose) Formalismus lässt sich durch geeignete Substitution auf physikalische (dimensionsbehaftete) Größen übertragen. In der Elektrotechnik ist beispielsweise die Fourierreihenentwicklung von periodischen Zeitfunktionen von Bedeutung. Wie bereits erwähnt ist hierfür eine Substitution $x = \omega_g t$ (mit $\omega_g = \frac{2\pi}{T}$ Grundfrequenz der in T periodischen Zeitfunktion) nötig. Die Bildungsgesetze zur Berechnung der Fourierkoeffizienten lauten dann:

$a_\kappa = \frac{2}{T} \cdot \int_{t=0}^T f(t) \cdot \sin(\kappa \cdot \omega_g t) \cdot dt$	$\kappa = 1,2,3 \dots \infty$
$b_\kappa = \frac{2}{T} \cdot \int_{t=0}^T f(t) \cdot \cos(\kappa \cdot \omega_g t) \cdot dt$	$\kappa = 1,2,3 \dots \infty$
$b_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T f(t) \cdot dt$	$\kappa = 0$ (linearer Mittelwert!)

Mit diesen Fourierkoeffizienten lässt sich die in T periodische Zeitfunktion $f(t)$ als unendliche Reihe darstellen:

$f(t) = b_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_\kappa \cdot \sin(\kappa \cdot \omega_g t)) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (b_\kappa \cdot \cos(\kappa \cdot \omega_g t))$
--

Anmerkung:

Wie gezeigt lassen sich (auch bei endlicher Gliederzahl der Reihe $S_n(x)$) die Koeffizienten a_κ und b_κ unabhängig von der Zahl n der Reihenglieder endgültig bestimmen. Es gibt keine Rekursionsformeln (man also beispielsweise $a_1 - a_{14}$ kennen müsste, um a_{15} zu berechnen). Dies ist sehr angenehm und eine Folge der Orthogonalitätssätze.

Da die Koeffizienten a_κ , b_κ nicht von der Gliederzahl n in $S_n(x)$ abhängen, kann man $n \rightarrow \infty$ gehen lassen. Schwierige Konvergenzbetrachtungen zeigen, daß das oben erwähnte Fehlerquadrat M für $n \rightarrow \infty$ beliebig klein wird und daß ferner die Koeffizienten a_κ und b_κ für große κ umso rascher gegen Null gehen, je glatter die Funktion $f(x)$ ist. (Schwierigkeiten an Unstetigkeitsstellen von $f(x)$, Gibb'sches Phänomen). Wichtig jedenfalls ist, daß die Koeffizienten unabhängig voneinander bestimmt werden können.

Zusammenfassung:

„Mathematische Darstellung“:

Eine periodische nichtsinusförmige Funktion $f(x)$ kann in eine Fourierreihe aus Sinus- und Kosinusfunktionen zerlegt werden.

$$f(x) = b_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_\kappa \cdot \sin(\kappa x)) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (b_\kappa \cdot \cos(\kappa x))$$

$$\text{mit: } b_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} f(x) \cdot dx \quad \kappa = 0 \quad (\text{linearer Mittelwert!})$$

$$a_\kappa = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} f(x) \cdot \sin(\kappa x) \cdot dx \quad \kappa = 1,2,3,\dots,\infty$$

$$b_\kappa = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} f(x) \cdot \cos(\kappa x) \cdot dx \quad \kappa = 1,2,3,\dots,\infty$$

„Physikalische Darstellung“ (Zeitfunktion):

Eine in T periodische nichtsinusförmige Zeitfunktion $f(t)$ kann in eine Fourierreihe aus Sinus- und Kosinusfunktionen zerlegt werden.

$$f(t) = b_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_\kappa \cdot \sin(\kappa \cdot \omega_g t)) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (b_\kappa \cdot \cos(\kappa \cdot \omega_g t))$$

$$\omega_g = \frac{2\pi}{T} : \text{Grundfrequenz}$$

$$\text{mit: } b_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T f(t) \cdot dt \quad \kappa = 0 \quad (\text{linearer Mittelwert!})$$

$$a_\kappa = \frac{2}{T} \cdot \int_{t=0}^T f(t) \cdot \sin(\kappa \cdot \omega_g t) \cdot dt \quad \kappa = 1,2,3,\dots,\infty$$

$$b_\kappa = \frac{2}{T} \cdot \int_{t=0}^T f(t) \cdot \cos(\kappa \cdot \omega_g t) \cdot dt \quad \kappa = 1,2,3,\dots,\infty$$

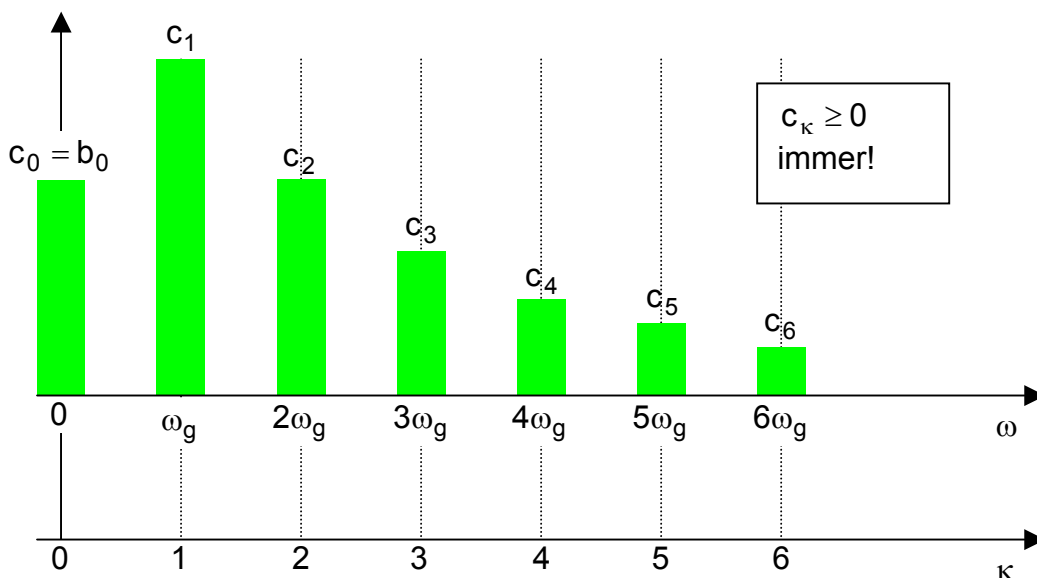
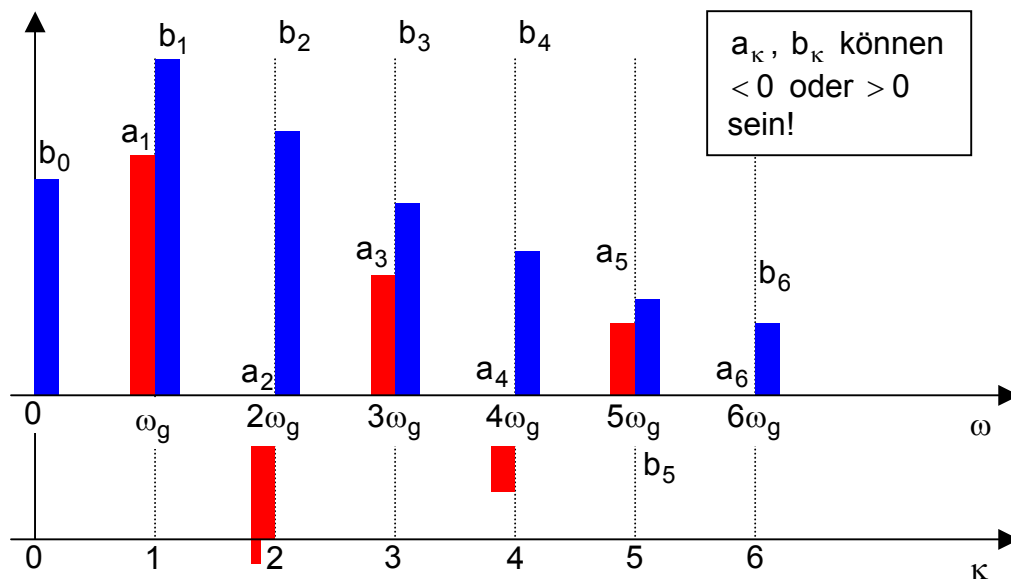
Mit Hilfe der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen lassen sich Glieder gleicher Ordnung κ noch zusammenfassen. Man erhält

$$f(x) = b_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (c_{\kappa} \cdot \sin(\kappa x + \varphi_{\kappa}))$$

wobei gilt:

$$\left. \begin{aligned} c_{\kappa} &= \sqrt{a_{\kappa}^2 + b_{\kappa}^2} \\ \tan(\varphi_{\kappa}) &= \frac{b_{\kappa}}{a_{\kappa}} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{\kappa} = c_{\kappa} \cdot \cos(\varphi_{\kappa}) \\ b_{\kappa} = c_{\kappa} \cdot \sin(\varphi_{\kappa}) \end{cases}$$

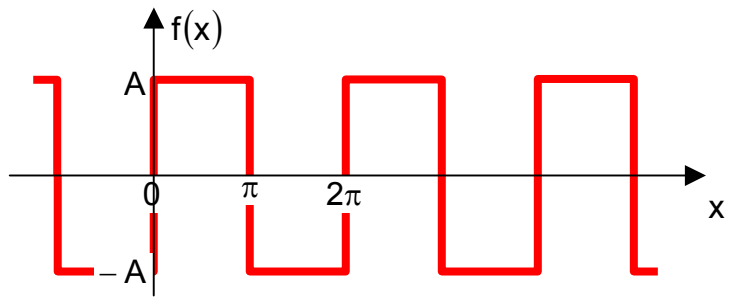
Man kann die Amplituden der einzelnen Harmonischen (Fourierkoeffizienten) über der Frequenz auftragen und erhält dann ein sogenanntes Linienspektrum.



Beispiel:

Gegeben ist die skizzierte Rechteckfunktion:

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{für: } 0 \leq x < \pi \\ -A & \text{für: } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$



Wie sieht die Fourierreihe aus, d.h. wie lauten die Fourierkoeffizienten?

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} f(x) \cdot dx = 0$$

kein linearer Mittelwert (trivial).

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} f(x) \cdot \cos(kx) \cdot dx \\ &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{\pi} A \cdot \cos(kx) \cdot dx + \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=\pi}^{2\pi} (-A) \cdot \cos(kx) \cdot dx \\ &= \frac{A}{\pi} \cdot \left(\int_{x=0}^{\pi} \cos(kx) \cdot dx - \int_{x=\pi}^{2\pi} \cos(kx) \cdot dx \right) \\ &= \frac{A}{\kappa\pi} \cdot \left(\sin(kx) \Big|_0^{\pi} - \sin(kx) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} f(x) \cdot \sin(kx) \cdot dx \\ &= \frac{A}{\pi} \cdot \left(\int_{x=0}^{\pi} \sin(kx) \cdot dx - \int_{x=\pi}^{2\pi} \sin(kx) \cdot dx \right) \\ &= \frac{A}{\kappa\pi} \cdot \left(-\cos(kx) \Big|_0^{\pi} + \cos(kx) \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) \\ &= \frac{A}{\kappa\pi} \cdot (-\cos(\kappa\pi) + 1 + 1 - \cos(\kappa\pi)) = \frac{2A}{\kappa\pi} \cdot (1 - \cos(\kappa\pi)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\kappa\pi) &= (-1)^\kappa \\ \Rightarrow a_\kappa &= \frac{2A}{\kappa\pi} \cdot (1 - (-1)^\kappa) \end{aligned}$$

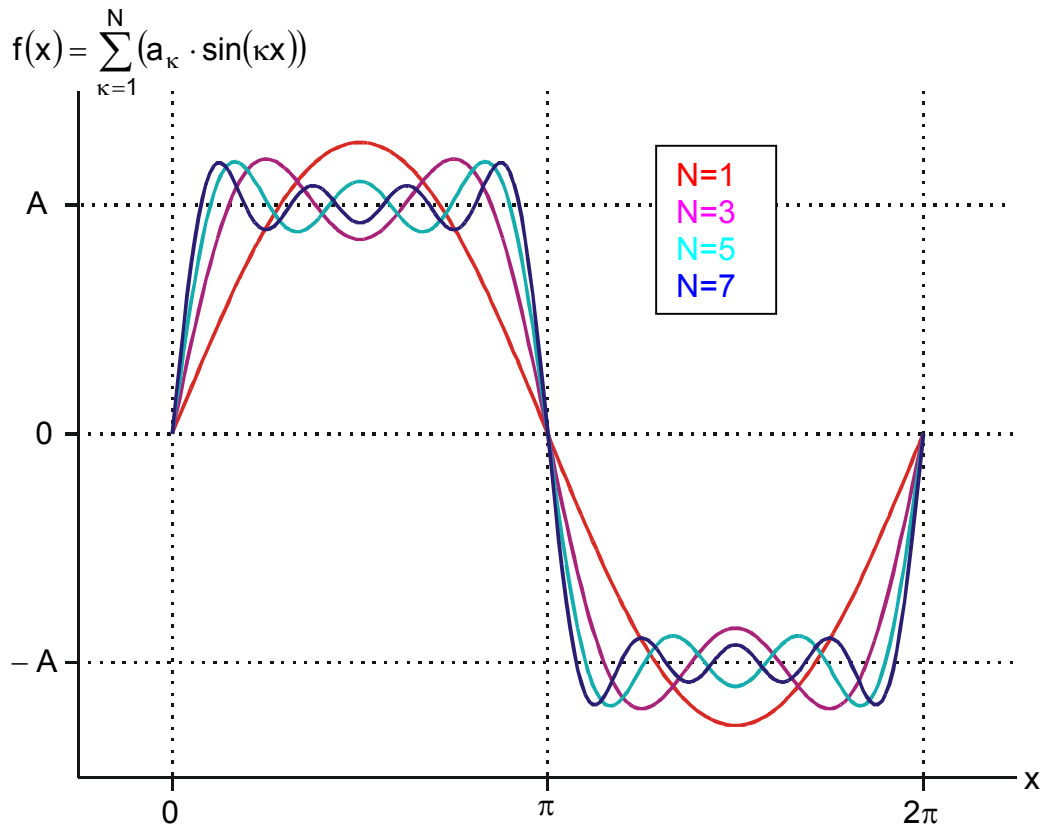
$$\kappa \text{ gerade:} \quad \kappa = 2, 4, 6, \dots \Rightarrow a_\kappa = 0$$

$$\kappa \text{ ungerade:} \quad \kappa = 1, 3, 5, \dots \Rightarrow a_\kappa = \frac{4A}{\kappa\pi}$$

Die Reihendarstellung der gegebenen Rechteckfunktion lautet also ausgeschrieben:

$$f(x) = \frac{4A}{\pi} \cdot \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \cdot \sin(3x) + \frac{1}{5} \cdot \sin(5x) + \dots \right)$$

Die nachfolgende grafische Darstellung lässt ahnen, wie mit wachsender Anzahl der Reihenglieder die Orginalfunktion (gegebene Rechteckfunktion) immer besser angenähert wird. Im Idealfall der unendlichen Reihe ($N = \infty$) stimmen Orginalfunktion und Reihendarstellung überein.



2.2 Symmetrie-Eigenschaften

Hat die gegebene periodische Funktion $f(x)$ gewisse Symmetrieeigenschaften, so vereinfacht sich die Berechnung der Fourierkoeffizienten („verkürzte“ Integration). Hierbei unterscheidet man zwischen 3 Arten von Symmetrie für $f(x)$:

- $f(x) = f(-x)$ „gerade“ Funktion
- $f(x) = -f(-x)$ „ungerade“ Funktion
- $f(x) = -f(x + \pi)$ „Halbwellen-Symmetrie“

Um die genannten 3 Symmetrietypen zu untersuchen, ist es sinnvoll, das Integrationsintervall bei den Bildungsgesetzen für die Fourierkoeffizienten zu verschieben. Dies ist erlaubt, weil in jedem Fall der Integrand periodisch in 2π ist.

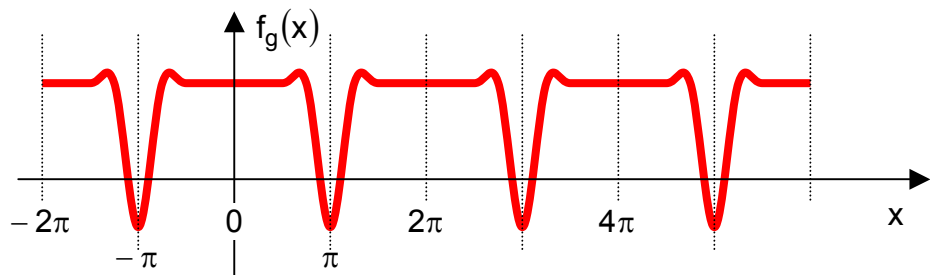
$$a_{\kappa} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} f(x) \cdot \sin(\kappa x) \cdot dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(\kappa x) \cdot dx$$

$$b_{\kappa} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} f(x) \cdot \cos(\kappa x) \cdot dx = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(\kappa x) \cdot dx$$

$$b_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} f(x) \cdot dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{x=-\pi}^{\pi} f(x) \cdot dx$$

a) $f(x)$ gerade Funktion

d.h. $f(x) = f_g(x)$,
so dass
 $f_g(-x) = f_g(x)$



Für die Berechnung der Fourierkoeffizienten a_κ (Amplituden der Sinusfunktionen in der Reihendarstellung) gilt bekanntlich:

$$a_\kappa = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=-\pi}^{\pi} f_g(x) \cdot \sin(\kappa x) \cdot dx :$$

$\sin(\kappa x)$ ist eine ungerade Funktion, und folglich $f_g(x) \cdot \sin(\kappa x) = U(x)$ ebenfalls ungerade. Es gilt aber allgemein für ungerade Funktionen:

$$\int_{x=-a}^a U(x) \cdot dx = 0$$

Folglich gilt

$$a_\kappa = 0, \text{ wenn } f(x) = f_g(x)$$

d.h. eine gerade Funktion besitzt keine Sinus-Anteile, sondern nur Kosinus-Anteile:

Für die Berechnung der Fourierkoeffizienten b_κ (Amplituden der Kosinusfunktionen in der Reihendarstellung) gilt:

$$b_\kappa = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=-\pi}^{\pi} f_g(x) \cdot \cos(\kappa x) \cdot dx$$

$\cos(\kappa x)$ ist eine gerade Funktion, und folglich $f_g(x) \cdot \cos(\kappa x) = G(x)$ ebenfalls gerade. Es gilt aber allgemein für gerade Funktionen:

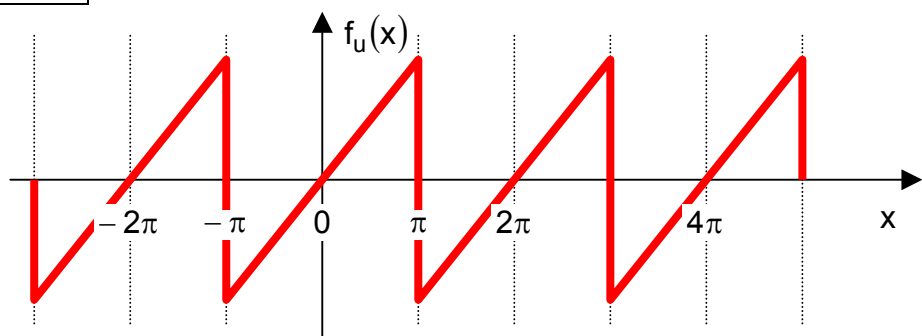
$$\int_{x=-a}^a G(x) \cdot dx = 2 \cdot \int_{x=0}^a G(x) \cdot dx$$

Folglich gilt:

$$b_\kappa = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{\pi} f_g(x) \cdot \cos(\kappa x) \cdot dx, \text{ wenn } f(x) = f_g(x) \text{ für alle } \kappa = 1,2,3\dots$$

b) $f(x)$ ungerade Funktion

d.h. $f(x) = f_u(x)$,
so dass
 $f_u(-x) = -f_u(x)$



Für die Berechnung der Fourierkoeffizienten b_κ (Amplituden der Kosinusfunktionen in der Reihendarstellung) gilt:

$$b_\kappa = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=-\pi}^{\pi} f_u(x) \cdot \cos(\kappa x) \cdot dx :$$

$\cos(\kappa x)$ ist eine gerade Funktion, folglich $f_u(x) \cdot \cos(\kappa x) = U(x)$ ungerade. Damit ergibt sich:

$$b_\kappa = 0, \text{ wenn } f(x) = f_u(x)$$

d.h. eine ungerade Funktion besitzt keine Kosinus-Anteile, sondern nur Sinus-Anteile:

Für die Berechnung der Fourierkoeffizienten a_κ (Amplituden der Sinusfunktionen in der Reihendarstellung) gilt:

$$a_\kappa = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=-\pi}^{\pi} f_u(x) \cdot \sin(\kappa x) \cdot dx$$

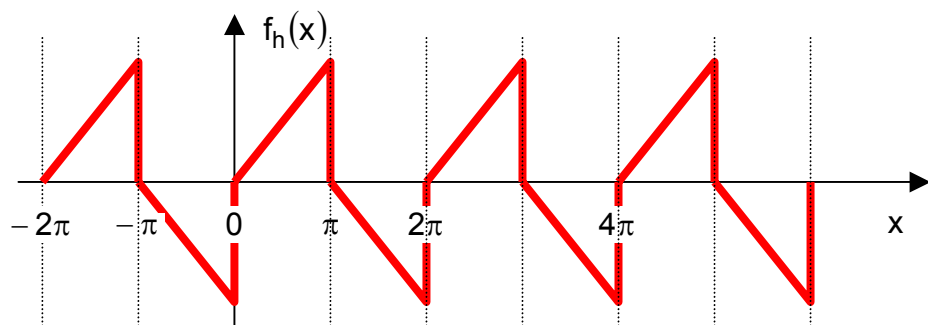
$\sin(\kappa x)$ ist eine ungerade Funktion, folglich $f_u(x) \cdot \sin(\kappa x) = G(x)$ gerade. Damit ergibt sich:

$$a_\kappa = \frac{2}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{\pi} f_u(x) \cdot \sin(\kappa x) \cdot dx, \text{ wenn } f(x) = f_u(x) \text{ für alle } \kappa = 1,2,3\dots$$

c) „Halbwellen-Symmetrie“

d.h. $f(x) = f_h(x)$, so dass $f_h(x) = -f_h(x + \pi) = -f_h(x - \pi)$

Wenn man die untere Halbwelle von $f_h(x)$ nach oben „klappt“, sieht sie aus wie die obere Halbwelle oder anders ausgedrückt, die zweite Halbwelle ist gleich der ersten Halbwelle multipliziert mit (-1) .



Zunächst ist $f_h(x)$ weder gerade noch ungerade. Es kommen also grundsätzlich a_κ und b_κ vor. Für die Berechnung der Fourierkoeffizienten a_κ (Amplituden der Sinusfunktionen in der Reihendarstellung) gilt:

$$\begin{aligned} a_\kappa &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=-\pi}^{\pi} f_h(x) \cdot \sin(\kappa x) \cdot dx \\ &= \underbrace{\frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=-\pi}^0 f_h(x) \cdot \sin(\kappa x) \cdot dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{\pi} f_h(x) \cdot \sin(\kappa x) \cdot dx}_{I_2} = I_1 + I_2 \end{aligned}$$

Das Integral I_1 kann aufgrund der Halbwellensymmetrie ($f_h(x) = -f_h(x + \pi)$) folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=-\pi}^0 f_h(x) \cdot \sin(\kappa x) \cdot dx \\ &= -\frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=-\pi}^0 f_h(x + \pi) \cdot \sin(\kappa x) \cdot dx \end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$y = x + \pi \quad \Rightarrow \quad x = y - \pi; \quad dx = dy$$

ergibt sich für das Integral I_1 :

$$I_1 = -\frac{1}{\pi} \cdot \int_{y=0}^{\pi} f_h(y) \cdot \sin(\kappa \cdot (y - \pi)) \cdot dy$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen lässt sich der Integrand folgendermaßen umformen:

$$\sin(\kappa \cdot (y - \pi)) = \sin(\kappa y) \cdot \underbrace{\cos(\kappa \pi)}_{(-1)^\kappa} - \cos(\kappa y) \cdot \underbrace{\sin(\kappa \pi)}_{=0} = (-1)^\kappa \cdot \sin(\kappa y)$$

Das Integral I_1 lautet damit:

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{\pi} \cdot (-1)^\kappa \cdot \int_{y=0}^{\pi} f_h(y) \cdot \sin(\kappa y) \cdot dy \\ &\stackrel{(x \leftrightarrow y)}{=} \dots \\ &= -(-1)^\kappa \cdot I_2 \end{aligned}$$

Für die Fourierkoeffizienten a_κ ergibt sich damit bei Halbwellensymmetrie:

$$\begin{aligned} a_\kappa &= I_2 \cdot (1 - (-1)^\kappa) \\ &= (1 - (-1)^\kappa) \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{\pi} f_h(x) \cdot \sin(\kappa x) \cdot dx \end{aligned}$$

$$a_\kappa = \begin{cases} 0 & \text{für: } \kappa = (0), 2, 4, 6 \dots \quad (\text{gerade}) \\ \frac{2}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{\pi} f_h(x) \cdot \sin(\kappa x) \cdot dx & \text{für: } \kappa = 1, 3, 5 \dots \quad (\text{ungerade}) \end{cases}$$

Ganz analog ergibt sich für die Berechnung der Fourierkoeffizienten b_κ (Amplituden der Kosinusfunktionen in der Reihendarstellung):

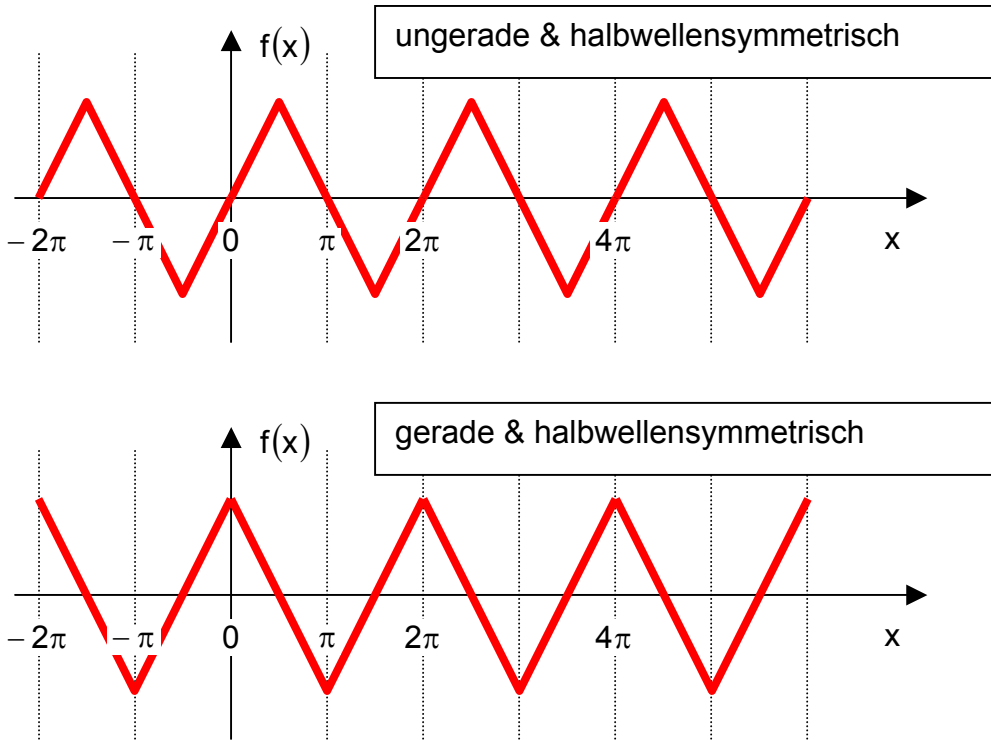
$$b_\kappa = (1 - (-1)^\kappa) \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{\pi} f_h(x) \cdot \cos(\kappa x) \cdot dx$$

$$b_\kappa = \begin{cases} 0 & \text{für: } \kappa = (0), 2, 4, 6 \dots \quad (\text{gerade}) \\ \frac{2}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{\pi} f_h(x) \cdot \cos(\kappa x) \cdot dx & \text{für: } \kappa = 1, 3, 5 \dots \quad (\text{ungerade}) \end{cases}$$

Funktionen mit Halbwellensymmetrie besitzen also nur Oberwellen mit ungerader Ordnung κ . In die Formeln mit $\frac{2}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{\pi} \dots$ dürfen dabei nur ungerade κ eingesetzt werden (bei geraden κ kommt im allgemeinen nicht Null heraus).

Anmerkungen:

- Man verwechsle nicht Eigenschaft c) (Halbwellensymmetrie) mit Eigenschaft b) (ungerade Funktion).
- Aufpassen bei der verkürzten Integration! Wenn man zeigen will, wie die Koeffizienten verschwinden, muß man über die ganze Periode integrieren.
- Eigenschaft a) oder b) können mit c) kombiniert sein.

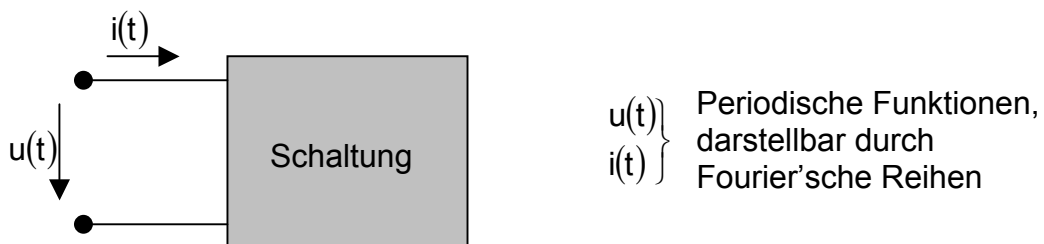


2.3 Effektivwerte und Leistungsdefinitionen bei nichtsinusförmigen Spannungen und Strömen

Fragestellung:

Spannung und Strom (periodisch, nichtsinusförmig) seien nach Fourier entwickelt. Wie stellen sich Effektivwerte bzw. Wirkleistung durch die Fourierkoeffizienten dar? Wie kann man „Scheinleistung“ und „Blindleistung“ definieren?

Effektivwert und Wirkleistung für beliebige periodische Funktionen wurden bereits im 1. Trimester definiert. Diese Definition wird hier natürlich beibehalten.



Gegeben seien die periodischen Originalfunktionen für Strom und Spannung (die natürlich Zeitfunktionen sind):

$$u(t) = u(t \pm n \cdot T)$$

$$i(t) = i(t \pm n \cdot T)$$

Diese Zeitfunktionen (Periodendauer T , Grundfrequenz $\omega_g = \frac{2\pi}{T}$) werden nun in ihre jeweiligen Fourierreihen entwickelt:

$$\begin{aligned} u(t) &= U_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_{\kappa} \cdot \sin(\kappa \cdot \omega_g t)) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (b_{\kappa} \cdot \cos(\kappa \cdot \omega_g t)) \\ &= U_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\hat{U}_{\kappa} \cdot \sin(\kappa \cdot \omega_g t + \varphi_{\kappa})) \end{aligned}$$

mit:

$$\left. \begin{aligned} a_{\kappa} &= \hat{U}_{\kappa} \cdot \cos(\varphi_{\kappa}) \\ b_{\kappa} &= \hat{U}_{\kappa} \cdot \sin(\varphi_{\kappa}) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{U}_{\kappa}^2 = a_{\kappa}^2 + b_{\kappa}^2 \\ \tan(\varphi_{\kappa}) = \frac{b_{\kappa}}{a_{\kappa}} \end{cases}$$

Spannung

$$a_{\kappa} = \frac{2}{T} \cdot \int_{t=0}^T u(t) \cdot \sin(\kappa \cdot \omega_g t) \cdot dt$$

$$b_{\kappa} = \frac{2}{T} \cdot \int_{t=0}^T u(t) \cdot \cos(\kappa \cdot \omega_g t) \cdot dt$$

$$U_0 = b_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T u(t) \cdot dt$$

$$\begin{aligned} i(t) &= I_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a'_{\kappa} \cdot \sin(\kappa \cdot \omega_g t)) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (b'_{\kappa} \cdot \cos(\kappa \cdot \omega_g t)) \\ &= I_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\hat{I}_{\kappa} \cdot \sin(\kappa \cdot \omega_g t + \varphi'_{\kappa})) \end{aligned}$$

mit:

$$\left. \begin{aligned} a'_{\kappa} &= \hat{I}_{\kappa} \cdot \cos(\varphi'_{\kappa}) \\ b'_{\kappa} &= \hat{I}_{\kappa} \cdot \sin(\varphi'_{\kappa}) \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{I}_{\kappa}^2 = a'_{\kappa}^2 + b'_{\kappa}^2 \\ \tan(\varphi'_{\kappa}) = \frac{b'_{\kappa}}{a'_{\kappa}} \end{cases}$$

Strom

$$a'_{\kappa} = \frac{2}{T} \cdot \int_{t=0}^T i(t) \cdot \sin(\kappa \cdot \omega_g t) \cdot dt$$

$$b'_{\kappa} = \frac{2}{T} \cdot \int_{t=0}^T i(t) \cdot \cos(\kappa \cdot \omega_g t) \cdot dt$$

$$I_0 = b'_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T i(t) \cdot dt$$

1) Effektivwerte:

Nach der bekannten Definition (vgl. 2. Trimester) werden die Effektivwerte gebildet:

a) für die Spannung

$$\begin{aligned}
 U_{\text{eff}}^2 &= \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T u^2(t) \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T \left(U_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_{\kappa} \cdot \sin(\kappa \cdot \omega_g t)) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (b_{\kappa} \cdot \cos(\kappa \cdot \omega_g t)) \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \left(U_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (a_{\lambda} \cdot \sin(\lambda \cdot \omega_g t)) + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (b_{\lambda} \cdot \cos(\lambda \cdot \omega_g t)) \right) \cdot dt \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

Das Ausmultiplizieren des Integranden führt zu folgenden 9 Termen, die u.a. mit Hilfe der Orthogonalitätssätze für trigonometrische Funktionen stark vereinfacht werden können:

$$1. \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T U_0^2 \cdot dt = \dots = U_0^2$$

$$2. \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T U_0 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} (a_{\lambda} \cdot \sin(\lambda \cdot \omega_g t)) \cdot dt = \dots = 0$$

(Integration über eine oder mehrere ganze Perioden einer Sinus-Funktion ergibt Null)

$$3. \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T U_0 \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} (b_{\lambda} \cdot \cos(\lambda \cdot \omega_g t)) \cdot dt = \dots = 0$$

(Integration über eine oder mehrere ganze Perioden einer Kosinus-Funktion ergibt Null)

$$4. \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_{\kappa} \cdot \sin(\kappa \cdot \omega_g t)) \cdot U_0 \cdot dt = \dots = 0$$

(siehe 2.)

$$5. \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_{\kappa} \cdot \sin(\kappa \cdot \omega_g t)) \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} (a_{\lambda} \cdot \sin(\lambda \cdot \omega_g t)) \cdot dt = \dots = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_{\kappa}^2)$$

$$\text{wegen Orthogonalitätssatz: } \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} \sin(\kappa x) \cdot \sin(\lambda x) \cdot dx = \begin{cases} 0 & \text{für: } \kappa \neq \lambda \\ 1 & \text{für: } \kappa = \lambda \neq 0 \\ 0 & \text{für: } \kappa = \lambda = 0 \end{cases}$$

$$6. \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_{\kappa} \cdot \sin(\kappa \cdot \omega_g t)) \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} (b_{\lambda} \cdot \cos(\lambda \cdot \omega_g t)) \cdot dt = \dots = 0$$

$$\text{wegen Orthogonalitätssatz: } \frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} \sin(\kappa x) \cdot \cos(\lambda x) \cdot dx = 0$$

$$7. \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T \sum_{\kappa=1}^{\infty} (b_{\kappa} \cdot \cos(\kappa \cdot \omega_g t)) \cdot U_0 \cdot dt = \dots = 0$$

(siehe 3.)

$$8. \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T \sum_{\kappa=1}^{\infty} (b_{\kappa} \cdot \cos(\kappa \cdot \omega_g t)) \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} (a_{\lambda} \cdot \sin(\lambda \cdot \omega_g t)) \cdot dt = \dots = 0$$

(siehe 6.)

$$9. \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T \sum_{\kappa=1}^{\infty} (b_{\kappa} \cdot \cos(\kappa \cdot \omega_g t)) \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} (b_{\lambda} \cdot \cos(\lambda \cdot \omega_g t)) \cdot dt = \dots = \frac{1}{2} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} (b_{\kappa}^2)$$

wegen Orthogonalitätssatz: $\frac{1}{\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} \cos(\kappa x) \cdot \cos(\lambda x) \cdot dx = \begin{cases} 0 & \text{für: } \kappa \neq \lambda \\ 1 & \text{für: } \kappa = \lambda \neq 0 \\ 2 & \text{für: } \kappa = \lambda = 0 \end{cases}$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} U_{\text{eff}}^2 &= U_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_{\kappa}^2 + b_{\kappa}^2) \\ &= U_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\hat{U}_{\kappa}^2) \\ &= U_0^2 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (U_{\kappa, \text{eff}}^2) \end{aligned}$$

mit: $U_{\kappa, \text{eff}} = \frac{\hat{U}_{\kappa}}{\sqrt{2}}$

(der Effektivwert einer Sinus- bzw. Kosinusfunktion ist deren Amplitude dividiert durch $\sqrt{2}$; vgl. 2. Trimester)

b) für den Strom

Nach analoger Rechnung erhält man:

$$\begin{aligned} I_{\text{eff}}^2 &= I_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a'_{\kappa}^2 + b'_{\kappa}^2) \\ &= I_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\hat{I}_{\kappa}^2) \\ &= I_0^2 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (I_{\kappa, \text{eff}}^2) \end{aligned}$$

mit: $I_{\kappa, \text{eff}} = \frac{\hat{I}_{\kappa}}{\sqrt{2}}$

Über das Verhältnis der Stromoberwellen zur Grundwelle ist bei einem periodischen Stromverlauf der „Klirrfaktor“ k folgendermaßen definiert:

$$k^2 = \frac{\sum_{\kappa=2}^{\infty} (\hat{I}_{\kappa}^2)}{\hat{I}_1^2}$$

2) Wirkleistung P_W :

Nach der bekannten Definition (vgl. 2. Trimester) wird die Wirkleistung berechnet:

$$\begin{aligned}
 P_W &= \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T u(t) \cdot i(t) \cdot dt \\
 &= \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T \left(U_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_{\kappa} \cdot \sin(\kappa \cdot \omega_g t)) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (b_{\kappa} \cdot \cos(\kappa \cdot \omega_g t)) \right) \cdot \\
 &\quad \cdot \left(I_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (a'_{\lambda} \cdot \sin(\lambda \cdot \omega_g t)) + \sum_{\lambda=1}^{\infty} (b'_{\lambda} \cdot \cos(\lambda \cdot \omega_g t)) \right) \cdot dt \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

Wie im Abschnitt vorher führt das Ausmultiplizieren des Integranden zu 9 Termen, die sich u.a. mit den Orthogonalitätssätzen stark vereinfachen lassen. Nach analoger Rechnung (und Anwendung eines Additionstheorems für trigonometrische Funktionen) erhält man:

$$\begin{aligned}
 P_W &= U_0 \cdot I_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_{\kappa} \cdot a'_{\kappa} + b_{\kappa} \cdot b'_{\kappa}) \\
 &= U_0 \cdot I_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\hat{U}_{\kappa} \cdot \hat{I}_{\kappa} \cdot (\cos(\varphi_{\kappa}) \cdot \cos(\varphi'_{\kappa}) + \sin(\varphi_{\kappa}) \cdot \sin(\varphi'_{\kappa}))) \\
 &= U_0 \cdot I_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\hat{U}_{\kappa} \cdot \hat{I}_{\kappa} \cdot \underbrace{\cos(\varphi_{\kappa} - \varphi'_{\kappa})}_{\varphi_{UI,\kappa}} \right) \\
 &= U_0 \cdot I_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (U_{\kappa,\text{eff}} \cdot I_{\kappa,\text{eff}} \cdot \cos(\varphi_{UI,\kappa}))
 \end{aligned}$$

$\varphi_{UI,\kappa}$ ist dabei der Phasenwinkel zwischen Strom- und Spannungsüberwelle gleicher Ordnung.

Anmerkungen:

Wenn $u(t)$ und $i(t)$ gegeben sind, so bildet man natürlich U_{eff} , I_{eff} und P_W unter Verwendung der Originalfunktionen in der ursprünglichen Form, d.h.

$$U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T u^2(t) \cdot dt$$

$$I_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T i^2(t) \cdot dt$$

$$P_W = \frac{1}{T} \cdot \int_{t=0}^T u(t) \cdot i(t) \cdot dt$$

Es ist unnötiger Aufwand, zuerst nach Fourier zu entwickeln und dann die oben abgeleiteten Formeln zu verwenden. Hat man die Fourierentwicklung aber aus anderen Gründen bereits durchgeführt, so zeigen die obigen Beziehungen anschaulich:

- Der Effektivwert ist die Wurzel aus der Quadratsumme der Effektivwerte der einzelnen Harmonischen, inklusive U_0^2 bzw. I_0^2 .

- Die Wirkleistung setzt sich zusammen aus den Teilwirkleistungen der einzelnen Harmonischen $U_{\kappa,\text{eff}} \cdot I_{\kappa,\text{eff}} \cdot \cos(\varphi_{UI,\kappa})$, wie üblich gebildet, einschließlich $U_0 \cdot I_0$. Nur Spannungs- und Stromoberwellen gleicher Ordnung tragen zu P_W bei.

3) Scheinleistung P_S :

Nach der bekannten Definition (vgl. 2. Trimester) wird die Scheinleistung berechnet:

$$P_S = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}}$$

Unter Verwendung von 1) kann man P_S auch durch die Fourierkoeffizienten von $u(t)$ und $i(t)$ ausdrücken:

$$\begin{aligned} P_S^2 &= U_{\text{eff}}^2 \cdot I_{\text{eff}}^2 \\ &= \left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} (U_{\kappa,\text{eff}}^2) \right) \cdot \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} (I_{\lambda,\text{eff}}^2) \right) \\ &= \left(U_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\hat{u}_{\kappa}^2) \right) \cdot \left(I_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} (\hat{i}_{\lambda}^2) \right) \\ &= \left(U_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_{\kappa}^2 + b_{\kappa}^2) \right) \cdot \left(I_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\infty} (a'_{\lambda}^2 + b'_{\lambda}^2) \right) \end{aligned}$$

4) Blindleistung P_B :

Bei nichtsinusförmigen periodischen Signalen wird zwischen 2 Blindleistungsarten unterschieden,

- die „Feldblindleistung“ und
- die „Verzerrungsblindleistung“.

4a) „Feldblindleistung“ P_{BF} :

Zunächst wird, analog zur Wirkleistung, die sog. Feldblindleistung P_{BF} gebildet. Die Phasenverschiebung $\varphi_{UI,\kappa}$ zwischen 2 Harmonischen gleicher Ordnung von Spannung und Strom hängt von den im Verbraucher enthaltenen Blindwiderständen ab. Man definiert also (analog zur Blindleistungsdefinition im 2. Trimester; ohne U_0 , I_0 , da in P_W enthalten):

$$\begin{aligned}
 P_{BF} &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} (P_{BF,\kappa}) \\
 &= \sum_{\kappa=1}^{\infty} (U_{\kappa,eff} \cdot I_{\kappa,eff} \cdot \sin(\varphi_{UI,\kappa})) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\hat{U}_{\kappa} \cdot \hat{I}_{\kappa} \cdot \sin(\varphi_{\kappa} - \varphi'_{\kappa})) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\hat{U}_{\kappa} \cdot \hat{I}_{\kappa} \cdot (\sin(\varphi_{\kappa}) \cdot \cos(\varphi'_{\kappa}) - \cos(\varphi_{\kappa}) \cdot \sin(\varphi'_{\kappa}))) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} (b_{\kappa} \cdot a'_{\kappa} - a_{\kappa} \cdot b'_{\kappa})
 \end{aligned}$$

Man erkennt, daß P_{BF} z.B. dann Null ist, wenn a_{κ} und a'_{κ} oder b_{κ} und b'_{κ} Null sind (für alle κ), d.h. wenn Spannung und Strom gerade oder ungerade Funktionen sind.

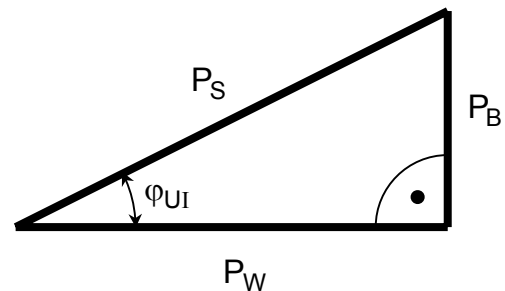
4b) „Verzerrungsblindleistung“ P_{BV} :

Wenn Spannung und Strom sinusförmig sind gilt bekanntlich:

$$\begin{aligned}
 P_W &= U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos(\varphi_{UI}) \quad \rightarrow \text{Wirkleistung} \\
 P_B &= U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin(\varphi_{UI}) \quad \rightarrow \text{Blindleistung} \\
 P_S &= U_{eff} \cdot I_{eff} \quad \rightarrow \text{Scheinleistung}
 \end{aligned}$$

Folglich gilt folgender Zusammenhang zwischen den einzelnen Leistungen (der in nebenstehender Abbildung grafisch veranschaulicht ist):

$$P_S^2 = P_W^2 + P_B^2$$



Bei nichtsinusförmigen Spannungen und Strömen gilt dagegen

➤ für die Wirkleistung	$P_W = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (U_{\kappa,eff} \cdot I_{\kappa,eff} \cdot \cos(\varphi_{UI,\kappa}))$	}	Nur Produkte von Harmonischen gleicher Ordnung
➤ für die „Feldblindleistung“	$P_{BF} = \sum_{\kappa=0}^{\infty} (U_{\kappa,eff} \cdot I_{\kappa,eff} \cdot \sin(\varphi_{UI,\kappa}))$		
➤ für die Scheinleistung	$P_S^2 = \left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} (U_{\kappa,eff}^2) \right) \cdot \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} (I_{\lambda,eff}^2) \right)$	}	Auch Produkte verschiedener Ordnung

Um einen zu sinusförmigen Strömen und Spannungen analogen Zusammenhang zwischen den einzelnen Leistungen zu gewinnen, werden die Quadrate der Leistungen benötigt:

$$\begin{aligned}
 P_W^2 &= \left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} (U_{\kappa,eff} \cdot I_{\kappa,eff} \cdot \cos(\varphi_{UI,\kappa})) \right) \cdot \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} (U_{\lambda,eff} \cdot I_{\lambda,eff} \cdot \cos(\varphi_{UI,\lambda})) \right) \\
 P_{BF}^2 &= \left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} (U_{\kappa,eff} \cdot I_{\kappa,eff} \cdot \sin(\varphi_{UI,\kappa})) \right) \cdot \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} (U_{\lambda,eff} \cdot I_{\lambda,eff} \cdot \sin(\varphi_{UI,\lambda})) \right)
 \end{aligned}$$

$$P_S^2 = \left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} (U_{\kappa, \text{eff}}^2) \right) \cdot \left(\sum_{\kappa=0}^{\infty} (I_{\kappa, \text{eff}}^2) \right)$$

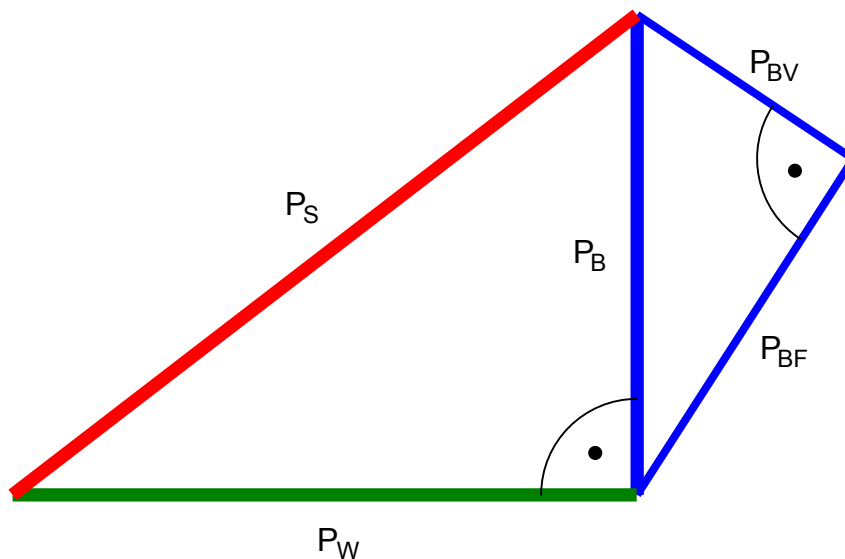
Man kann zeigen (langweilige Rechnung), dass im allgemeinen für nichtsinusförmige periodische Ströme und Spannungen gilt:

$$P_W^2 + P_{BF}^2 \leq P_S^2$$

Über diese Ungleichung wird nun die „Verzerrungsblindleistung“ P_{BV} definiert:

$$P_{BV}^2 = P_S^2 - (P_W^2 + P_{BF}^2)$$

Dieser Zusammenhang zwischen den einzelnen Leistungen bei nichtsinusförmigen periodischen Strömen und Spannungen lässt sich nun, analog zu vorher, wieder grafisch veranschaulichen.



Beispiel:

Es sei gegeben

- die periodische sinusförmige Spannung
 $u(t) = \hat{U}_1 \cdot \sin(\omega t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega t),$
- der periodische nichtsinusförmige (verzerrte) Strom

$$i(t) = I_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (\hat{I}_{\kappa} \cdot \sin(\omega t + \varphi'_{\kappa})),$$

(bereits nach Fourier in seine sinusförmigen Bestandteile zerlegt)

Damit erhält man:

a) Scheinleistung:

$$P_S^2 = U_{\text{eff}}^2 \cdot I_{\text{eff}}^2 = U_{1, \text{eff}}^2 \cdot \left(I_0^2 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (I_{\kappa, \text{eff}}^2) \right)$$

b) Wirkleistung:

$$P_W^2 = U_{1, \text{eff}}^2 \cdot I_{1, \text{eff}}^2 \cdot \cos^2(\varphi'_{1})$$

c) Feldblindleistung:

$$P_{BF}^2 = U_{1, \text{eff}}^2 \cdot I_{1, \text{eff}}^2 \cdot \sin^2(\varphi'_{1})$$

Keine Spannungsüberwellen

d) gesamte Blindleistung:

$$P_B^2 = P_S^2 - P_W^2$$

$$= \underbrace{U_{1,\text{eff}}^2 \cdot I_0^2 + U_{1,\text{eff}}^2 \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} (I_{\kappa,\text{eff}}^2)}_{P_S^2} - \underbrace{U_{1,\text{eff}}^2 \cdot I_{1,\text{eff}}^2 \cdot \cos^2(\varphi'_1)}_{P_W^2}$$

e) Verzerrungsblindleistung:

$$P_{BV}^2 = P_B^2 - P_{BF}^2$$

$$= U_{1,\text{eff}}^2 \cdot \underbrace{(I_0^2 + I_{2,\text{eff}}^2 + I_{3,\text{eff}}^2 + \dots)}_{I_{1,\text{eff}}^2 \text{ fehlt!}}$$

Wenn also die Spannung rein sinusförmig ist, dann gilt:

- Aus Spannung und Grundwelle des Stromes → P_W , P_{BF}
- Aus Spannung und den übrigen Harmonischen des Stromes → P_{BV}
- Aus Spannung und allen Harmonischen des Stromes → P_S

Anmerkung:

Wäre außerdem $\varphi'_1 = 0$, d.h. die Grundwellen von Strom und Spannung in Phase, so wäre $P_{BF} = 0$, d.h. $P_B = P_{BV}$ (reine Verzerrungsblindleistung).

2.4 Fourierreihe in komplexer Darstellung

Wie bei sinusförmigen Vorgängen ist es auch bei nichtsinusförmigen periodischen Vorgängen zweckmäßig, die reelle Rechnung durch die komplexe zu ersetzen. Hierdurch gewinnt die Fourier-Methode erst ihren wirklichen Wert. Man kann dann die komplexe Behandlung von Wechselstromschaltungen (vgl. 2. Trimester) auch auf nichtsinusförmige Vorgänge übertragen.

Dafür müssen die reellen Zeitfunktionen $\sin(\kappa \cdot \omega_g t)$ und $\cos(\kappa \cdot \omega_g t)$ durch die komplexe Exponentialfunktion $e^{j\kappa\omega_g t}$ ausgedrückt werden, und zwar sowohl in der Fourierreihe selbst als auch in den Formeln zur Berechnung der Fourierkoeffizienten a_κ und b_κ .

Hierzu benutzt man die bekannten Umrechnungsformeln (Euler!):

$$e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \cdot \sin(\alpha)$$

$$e^{-j\alpha} = \cos(\alpha) - j \cdot \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})$$

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{2j} \cdot (e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})$$

Wichtige Anmerkung:

Im 2. Trimester wurde mit komplexen Zeitfunktionen gerechnet, d.h. statt mit $\cos(\omega t)$ bzw. $\sin(\omega t)$ wurde mit $e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \cdot \sin(\omega t)$ gerechnet. (Um zur

reellen Darstellung zu gelangen musste der Realteil $\cos(\omega t)$ oder der Imaginärteil $\sin(\omega t)$ von $e^{j\omega t}$ betrachtet werden).

Hier sollen die reellen Funktionen erhalten bleiben. Man ersetzt also nicht $\cos(\omega t)$ oder $\sin(\omega t)$ durch $e^{j\omega t}$, sondern drückt $\cos(\omega t)$ und $\sin(\omega t)$ durch $e^{j\omega t}$ aus:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})$$

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{2j} \cdot (e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})$$

Hierdurch bleibt alles reell.

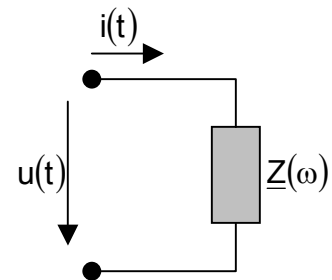
Man hätte dies übrigens im 2. Trimester auch so machen können.

Beispiel am komplexen Widerstand:

$$i(t) = A \cdot \cos(\omega t)$$

$$= \frac{A}{2} \cdot (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

Reelle Zeitfunktion $i(t)$, aber komplex angeschrieben, wobei $e^{-j\omega t}$ als $e^{j\omega t}$ mit „negativer“ Frequenz $\omega < 0$ aufgefasst werden kann.



Zu bestimmen ist nun die Spannung $u(t)$ (reell):

Wie bekannt ist der komplexe Widerstand :

$$\underline{Z}(\omega) = R(\omega) + j \cdot X(\omega) = Z(\omega) \cdot e^{j\varphi_Z(\omega)}$$

Man kann leicht zeigen, daß

$$\left. \begin{array}{l} R(\omega) = R(-\omega) \quad \text{gerade in } \omega \\ X(\omega) = -X(-\omega) \quad \text{ungerade in } \omega \end{array} \right\} \text{weil alle Funktionen von „} j\omega \text{“ sind}$$

Folglich gilt

$$\underline{Z}(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} = \underline{Z}(-\omega) \quad \text{gerade in } \omega$$

$$\tan(\varphi_Z(\omega)) = \frac{X(\omega)}{R(\omega)} = -\tan(-\varphi_Z(\omega))$$

$$\varphi_Z(\omega) = -\varphi_Z(-\omega) \quad \text{ungerade in } \omega$$

oder insgesamt:

$$\underline{Z}(-\omega) = \underline{Z}^*(\omega) \quad \text{konjugiert komplex}$$

Dann erhält man für die Spannung mit $i(t) = A \cdot \cos(\omega t)$:

$$u(t) = \frac{A}{2} \cdot e^{j\omega t} \cdot \underline{Z}(\omega) + \frac{A}{2} \cdot e^{-j\omega t} \cdot \underline{Z}(-\omega)$$

$$= \frac{A}{2} \cdot e^{j\omega t} \cdot Z(\omega) \cdot e^{j\varphi_Z(\omega)} + \frac{A}{2} \cdot e^{-j\omega t} \cdot Z(\omega) \cdot e^{-j\varphi_Z(\omega)}$$

$$= \frac{A}{2} \cdot Z(\omega) \cdot (e^{j(\omega t + \varphi_Z(\omega))} + e^{-j(\omega t + \varphi_Z(\omega))})$$

$$= A \cdot Z(\omega) \cdot \cos(\omega t + \varphi_Z(\omega)) \quad (\text{reell!!})$$

Analog zu diesem Beispiel wird nun bei der Fourierreihe vorgegangen. Zweckmäßig ist vorher eine kleine Umformung. Damit $\sin(\kappa \cdot \omega_g t)$ und $\cos(\kappa \cdot \omega_g t)$ nicht extra in der

Reihe und in den Koeffizienten durch $e^{j\kappa\omega_g t}$ und $e^{-j\kappa\omega_g t}$ ausdrücken werden müssen, werden die Formeln für die Koeffizienten vorher in die Reihe eingesetzt. Es muß dann allerdings unterschieden werden zwischen der laufenden Variablen $x = \omega_g t$ (in der Reihe) und der Integrationsvariablen $\xi = \omega_g \tau$ (in den Koeffizienten), also:

$$f(x) = b_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_{\kappa} \cdot \sin(\kappa x)) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (b_{\kappa} \cdot \cos(\kappa x))$$

$$\text{mit: } \left. \begin{aligned} a_{\kappa} &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot \sin(\kappa \xi) \cdot d\xi \\ b_{\kappa} &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot \cos(\kappa \xi) \cdot d\xi \\ b_0 &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot d\xi \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Dieselben Integrale wie bisher,} \\ \text{nur } x \text{ durch } \xi \text{ formal ersetzt,} \\ \text{wegen des folgenden Einsetzens!} \end{array}$$

Nun werden die Koeffizienten in die Reihe eingesetzt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot d\xi + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\sin(\kappa x) \cdot \int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot \sin(\kappa \xi) \cdot d\xi \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\cos(\kappa x) \cdot \int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot \cos(\kappa \xi) \cdot d\xi \right) \\ f(x) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot d\xi + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot (\sin(\kappa x) \cdot \sin(\kappa \xi) + \cos(\kappa x) \cdot \cos(\kappa \xi)) \cdot d\xi \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot d\xi + \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot \cos(\kappa \cdot (x - \xi)) \cdot d\xi \right) \end{aligned}$$

Man Beachte:

x ist im Integral Parameter, d.h. wird von der Integration nicht betroffen, denn die Integrationsvariable heißt ξ .

Nun erfolgt der Übergang zur komplexen Darstellung. Es ist

$$\cos(\kappa \cdot (x - \xi)) = \frac{1}{2} \cdot (e^{j\kappa \cdot (x - \xi)} + e^{-j\kappa \cdot (x - \xi)})$$

und damit:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot d\xi + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot e^{j\kappa \cdot (x - \xi)} \cdot d\xi \right) + \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot e^{-j\kappa \cdot (x - \xi)} \cdot d\xi \right) \right)$$

Für das letzte Glied kann man auch schreiben:

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot e^{-j\kappa \cdot (x - \xi)} \cdot d\xi \right) = \sum_{\kappa=-\infty}^{-1} \left(\int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot e^{j\kappa \cdot (x - \xi)} \cdot d\xi \right)$$

So kann man alle drei Glieder der Reihe (auch b_0 für $\kappa = 0$) zusammenfassen:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \left(\int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot e^{j\kappa \cdot (x-\xi)} \cdot d\xi \right)$$

Durch Herausziehen des von der Integration nicht betroffenen Faktors $e^{j\kappa x}$ gelangt man zu folgender Form:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{\left(\int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot e^{-j\kappa\xi} \cdot d\xi \right)}_{\underline{A}_{\kappa}} \cdot e^{j\kappa x} \right)$$

Das Integral unter dem Summenzeichen nennt man den komplexen Fourierkoeffizienten \underline{A}_{κ} .

Auf diese Art erhält man die reelle Fourier-Reihe in komplexer Darstellung ($f(x)$ ist nach wie vor reell!):

$$f(x) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} (\underline{A}_{\kappa} \cdot e^{j\kappa x})$$

$$\text{mit: } \underline{A}_{\kappa} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot e^{-j\kappa\xi} \cdot d\xi$$

Für Zeitfunktionen ergibt sich mit $x = \omega_g t$ und $\xi = \omega_g \tau$ (vgl. Fourierreihe in reeller Darstellung):

$$f(t) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} (\underline{A}_{\kappa} \cdot e^{j\kappa\omega_g t})$$

$$\text{mit: } \underline{A}_{\kappa} = \frac{1}{T} \cdot \int_{\tau=0}^T f(\tau) \cdot e^{-j\kappa\omega_g \tau} \cdot d\tau$$

(Man könnte jetzt natürlich, in der getrennten Darstellung, bei den Integralen ξ und τ wieder durch x und t ersetzen).

Zusammenhang zwischen komplexen und reellen Fourierkoeffizienten:

Die Formel zur Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten lässt sich folgendermaßen umformen

$$\begin{aligned} \underline{A}_{\kappa} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot e^{-j\kappa\xi} \cdot d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot (\cos(\kappa\xi) - j \cdot \sin(\kappa\xi)) \cdot d\xi \\ &= \frac{1}{2} \cdot (b_{\kappa} - j \cdot a_{\kappa}) \end{aligned}$$

oder formal für negative κ :

$$\begin{aligned} \underline{A}_{-\kappa} &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\xi=0}^{2\pi} f(\xi) \cdot (\cos(\kappa\xi) + j \cdot \sin(\kappa\xi)) \cdot d\xi \\ &= \frac{1}{2} \cdot (b_{\kappa} + j \cdot a_{\kappa}) \end{aligned}$$

Daraus ergeben sich die folgenden Eigenschaften für komplexe bzw. reelle Fourierkoeffizienten:

$$\begin{aligned}\underline{A}_{-k} &= \underline{A}_k^* && \text{(konjugiert komplex)} \\ \underline{b}_{-k} &= \underline{b}_k && \text{(gerade in } k \text{)} \\ \underline{a}_{-k} &= -\underline{a}_k && \text{(ungerade in } k \text{)}\end{aligned}$$

Außerdem:

$$\underline{A}_0 = \underline{b}_0$$

Umgekehrt ergibt sich:

$$\begin{aligned}\underline{b}_k &= \underline{A}_k + \underline{A}_{-k} \\ \underline{a}_k &= j \cdot (\underline{A}_k - \underline{A}_{-k})\end{aligned}$$

Man kann auch wieder die c_k einführen:

$$\begin{aligned}\underline{a}_k &= c_k \cdot \cos(\varphi_k) \\ \underline{b}_k &= c_k \cdot \sin(\varphi_k) \\ \Rightarrow \underline{A}_k &= \frac{1}{2} \cdot (\underline{b}_k - j \cdot \underline{a}_k) \\ &= \frac{1}{2} \cdot c_k \cdot (\sin(\varphi_k) - j \cdot \cos(\varphi_k)) \\ &= -j \cdot \frac{1}{2} \cdot c_k \cdot (\cos(\varphi_k) + j \cdot \sin(\varphi_k)) \\ &= -j \cdot \frac{1}{2} \cdot c_k \cdot e^{j\varphi_k} \\ \underline{A}_{-k} &= \underline{A}_k^* = j \cdot \frac{1}{2} \cdot c_k \cdot e^{-j\varphi_k}\end{aligned}$$

So kann man sich aus der komplexen Darstellung der Fourierreihe wieder die reelle Darstellung zusammensetzen:

$$\begin{aligned}f(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\underline{A}_k \cdot e^{jkx}) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} (\underline{A}_k \cdot e^{jkx}) + \underline{A}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\underline{A}_k \cdot e^{jkx}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (\underline{A}_{-k} \cdot e^{-jkx}) + \underline{A}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\underline{A}_k \cdot e^{jkx}) \\ &= \underline{b}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\underline{A}_k \cdot (\cos(kx) + j \cdot \sin(kx)) + \underline{A}_{-k} \cdot (\cos(kx) - j \cdot \sin(kx))) \\ &= \underline{b}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{(\underline{A}_k + \underline{A}_{-k})}_{\underline{b}_k} \cdot \cos(kx) \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\underbrace{j \cdot (\underline{A}_k - \underline{A}_{-k})}_{\underline{a}_k} \cdot \sin(kx) \right)\end{aligned}$$

Anmerkung:

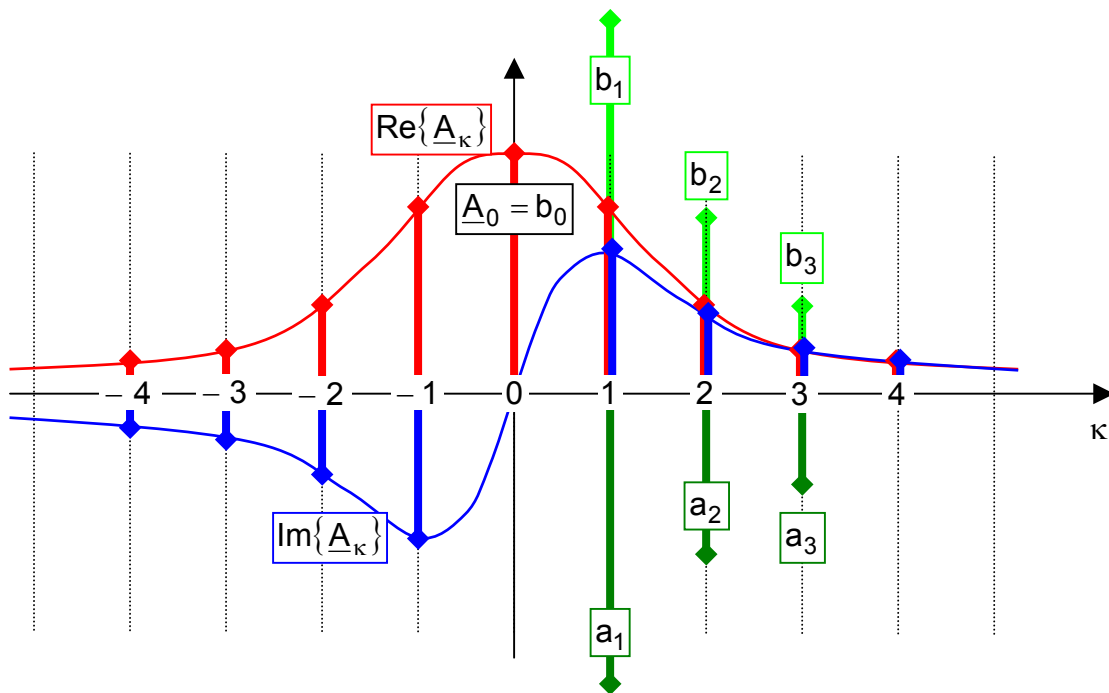
- Auch beim komplexen Fourierkoeffizienten \underline{A}_k darf das Integrationsintervall beliebig verschoben werden, also z.B.:

$$\underline{A}_k = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\xi=-\pi}^{\pi} f(\xi) \cdot e^{-jk\xi} \cdot d\xi$$

- Verkürzte Integration aufgrund von Symmetrieeigenschaften ist nur bei den reellen Koeffizienten a_k und b_k möglich, nicht bei den komplexen Koeffizienten \underline{A}_k .

Veranschaulichung eines Linienspektrums in reeller und komplexer Darstellung:

$$\underline{A}_k = \frac{1}{2} \cdot (b_k - j \cdot a_k) \Leftrightarrow \begin{cases} b_k = 2 \cdot \operatorname{Re}\{\underline{A}_k\} & \text{gerade in } k \\ a_k = -2 \cdot \operatorname{Im}\{\underline{A}_k\} & \text{ungerade in } k \end{cases}$$



Anmerkung:

Man hätte die komplexen Koeffizienten \underline{A}_k auch ohne den Umweg über die reelle Darstellung der Reihe mit Hilfe der Orthogonalitätssätze für die komplexe e-Funktion gewinnen können:

Ansatz:

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\underline{A}_k \cdot e^{jkx})$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{x=0}^{2\pi} f(x) \cdot e^{-j\lambda x} \cdot dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\underline{A}_k \cdot \int_{x=0}^{2\pi} e^{-j(\kappa-\lambda) \cdot x} \cdot dx \right) = \underline{A}_\lambda$$

3 Nichtperiodische Vorgänge

Im vorangegangenen Kapitel wurden periodische nichtsinusförmige Funktionen nach Fourier zerlegt. Das Resultat waren Reihendarstellungen, in reeller oder komplexer Schreibweise. Jede Oberwelle hat ihre Amplitude (und Phase), wobei reelle oder komplexe Darstellung möglich ist. Trägt man die Fourierkoeffizienten über der Frequenz auf, so erhält man ein „Linienspektrum“, diskrete Frequenzen bzw. diskrete Spektrallinien (diskontinuierliches Spektrum).

Im anschließenden Kapitel wird nun die Analyse nichtperiodischer Vorgänge behandelt. Es wird sich zeigen, daß auch solche Vorgänge als Überlagerung periodisch-stationärer Schwingungen aufgefasst werden können. Man erhält dann anstatt der Reihe (Summe) ein Integral (das sog. Fourierintegral). Das Spektrum wird dann kontinuierlich (wobei dann allerdings anstatt der komplexen Amplituden im Spektrum die sogenannte „Spektralfunktion“ = Amplitude/Frequenzintervall eingeführt wird).

Man gelangt zum Fourierintegral von der Reihe aus durch Grenzübergang. Sinnvollerweise wird bei diesem Grenzübergang gleich von der komplexen Fourierreihe ausgegangen; man gelangt so sofort zum Fourierintegral in komplexer Darstellung (die komplexe Schreibweise ist viel universeller und brauchbarer). Der Vollständigkeit halber wird in einem späteren Kapitel auch die reelle Darstellung des Fourierintegrals gezeigt.

3.1 Das komplexe Fourierintegral

Für eine periodische (hier reell angenommene) Zeitfunktion $f_P(t)$ (Periodendauer T) ist die Fourierreihe in komplexer Darstellung bekannt:

$$f_P(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(A_k \cdot e^{jk\omega_g t} \right) \quad \text{mit:} \quad A_k = \frac{1}{T} \cdot \int_{\tau=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_P(\tau) \cdot e^{-jk\omega_g \tau} \cdot d\tau$$

(Das Integrationsintervall wurde nach $-\frac{T}{2} \leq \tau \leq \frac{T}{2}$ verschoben; dies ist natürlich erlaubt; es muß lediglich über eine Periodendauer der Zeitfunktion integriert werden).

Nun soll in ähnlicher Weise eine nichtperiodische Funktion $f(t)$ zerlegt werden. Das ist tatsächlich möglich. Auch nichtperiodische Vorgänge (instationäre Vorgänge, einzelne Impulse, Schaltvorgänge) können als Überlagerung von periodisch stationären Schwingungen aufgefaßt werden. Man muß dabei allerdings aufpassen.

Zunächst primitiv gesagt: Man faßt einfach einen nichtperiodischen Vorgang als einen periodischen Vorgang mit unendlicher Periodendauer ($T \rightarrow \infty$) auf. Dann wird aber natürlich die Grundfrequenz $\omega_g = \frac{2\pi}{T}$ unendlich klein, und die Fourierkoeffizien-

ten $\frac{1}{T} \cdot \int \dots$ ebenfalls.

In 7 Schritten wird im folgenden gezeigt, wie man vorgehen muß; jedenfalls ist ein Grenzübergang notwendig.

1. Schritt

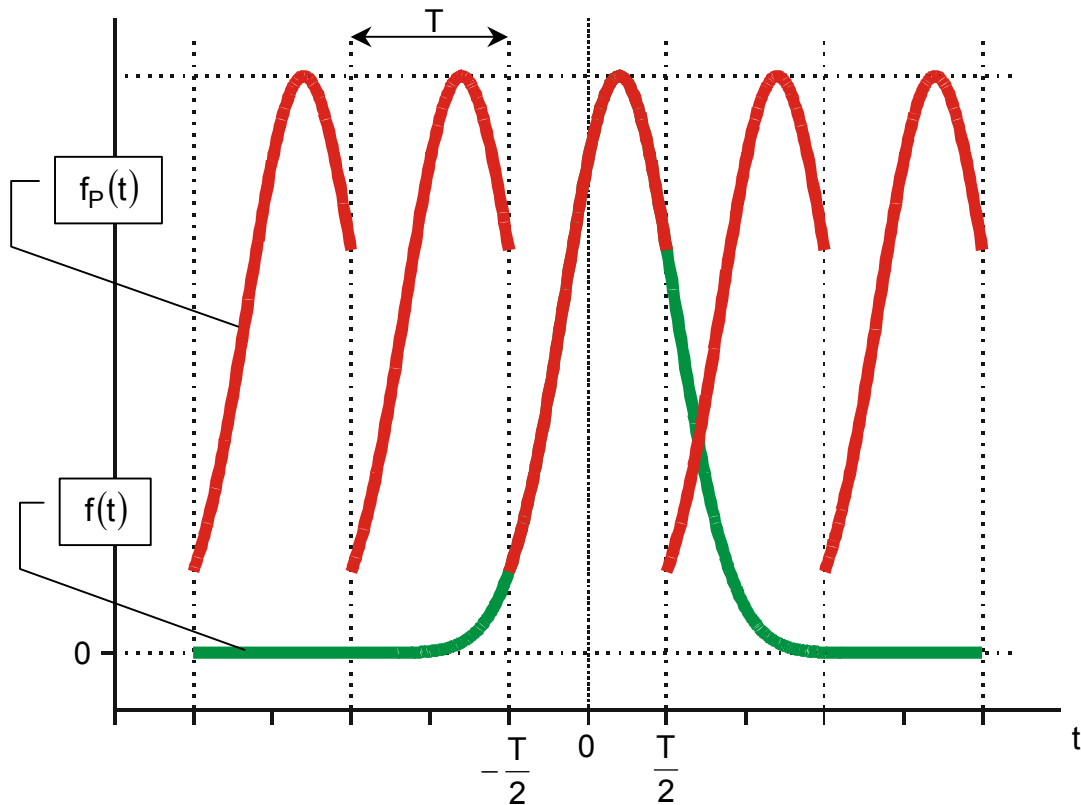
Gegeben ist die (reelle) nichtperiodische Zeitfunktion $f(t)$, definiert im ganzen Zeitbereich $-\infty < t < \infty$.

Es soll ferner gelten: $\int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot dt < \infty$ (Konvergenz des Integrals; hinreichend!)

2. Schritt

Man wählt willkürlich eine Periodendauer T und betrachtet nur denjenigen Teil von $f(t)$, der im Bereich $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ liegt. Durch periodische Fortsetzung dieses Teils erhält man eine periodische Ersatzfunktion $f_p(t) = f_p(t \pm n \cdot T)$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$. Im Intervall $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$ gilt also:

$$f_p\left(-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}\right) \equiv f\left(-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}\right)$$



3. Schritt

Es wird nun Grundfrequenz der Ersatzfunktion $f_p(t)$ mit ω_g bezeichnet, wie bisher:

$$\omega_g = \frac{2\pi}{T}$$

Dann kann $f_p(t)$ in eine komplexe Fourierreihe entwickelt werden:

$$f_p(t) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \left(A_{\kappa} \cdot e^{j\kappa\omega_g t} \right)$$

mit:

$$\begin{aligned}\underline{A}_\kappa &= \frac{1}{T} \cdot \int_{\tau=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_P(\tau) \cdot e^{-j\kappa\omega_g\tau} \cdot d\tau \\ &= \frac{1}{T} \cdot \int_{\tau=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cdot e^{-j\kappa\omega_g\tau} \cdot d\tau\end{aligned}$$

Im Intervall $-\frac{T}{2} < \tau < \frac{T}{2}$ braucht man ja nicht zwischen $f(\tau)$ und $f_P(\tau)$ zu unterscheiden.

Diese Reihe stellt also die periodische Funktion $f_P(t)$ dar, die im Grundintervall mit der gegebenen Funktion $f(t)$ übereinstimmt.

4.Schritt

Die Reihe bzw. die Koeffizienten werden nun ein bißchen umgeschrieben:

Es gilt:

- $\omega_g = \frac{2\pi}{T}$ (Grundfrequenz), und wir nennen
- $\kappa \cdot \omega_g = \omega_\kappa$ (Frequenz der Harmonischen „Nr. κ “)
- Der Abstand der Frequenzen zweier benachbarter Harmonischen ist

$$\Delta\omega = \omega_{\kappa+1} - \omega_\kappa = (\kappa + 1) \cdot \omega_g - \kappa \cdot \omega_g = \omega_g = \frac{2\pi}{T}$$

Die Gleichung zur Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten lässt sich damit folgendermaßen umschreiben:

$$\begin{aligned}\underline{A}_\kappa &= \frac{1}{T} \cdot \int_{\tau=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cdot e^{-j\kappa\omega_g\tau} \cdot d\tau \\ &= \Delta\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\tau=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cdot e^{-j\omega_\kappa\tau} \cdot d\tau \\ &= \Delta\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot \underline{F}_T(\omega_\kappa)\end{aligned}$$

$$\text{mit: } \underline{F}_T(\omega_\kappa) = \int_{\tau=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cdot e^{-j\omega_\kappa\tau} \cdot d\tau$$

Außerdem gilt für die Fourierreihe der periodischen Ersatzfunktion $f_P(t)$ in komplexer Darstellung:

$$f_P(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{\underline{F}_T(\omega_\kappa) \cdot \Delta\omega}_{=2\pi \cdot \underline{A}_\kappa} \cdot e^{j\kappa\omega_g t} \right)$$

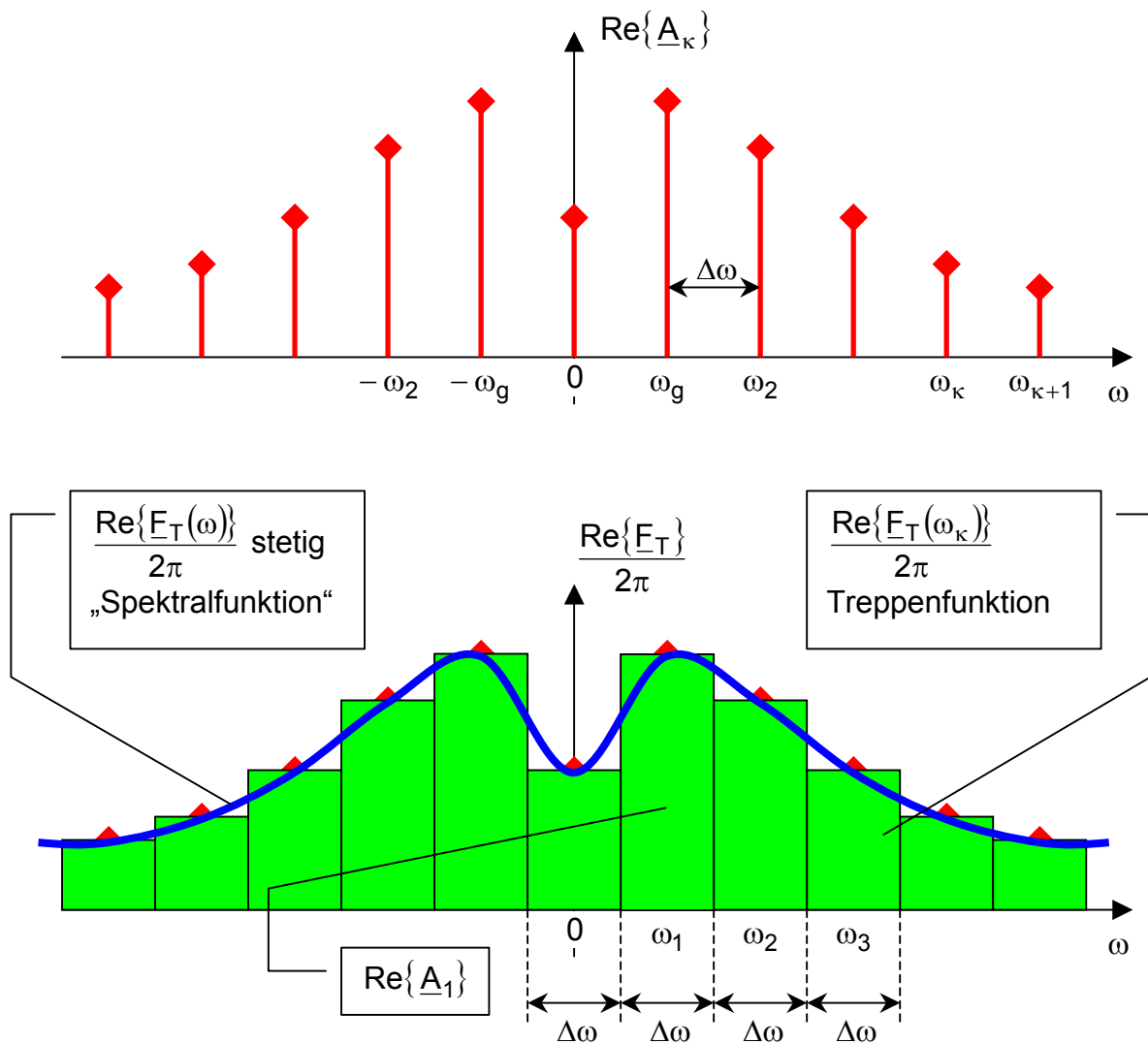
Es werden nun die Werte $\underline{E}_T(\omega_\kappa)$ als spezielle Werte der in ω stetigen Funktion $\underline{E}_T(\omega)$ interpretiert:

$$\underline{E}_T(\omega_\kappa) = \left\{ \int_{\tau=-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau \right\}_{\omega=\omega_\kappa} = \{ \underline{E}_T(\omega) \}_{\omega=\omega_\kappa}$$

5.Schritt

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird bei dieser Veranschaulichung von einer reellen und geraden Zeitfunktion ausgegangen. Das Spektrum ist dann nämlich auch reell und gerade (siehe Kap.3.3). Die Allgemeingültigkeit der Theorie wird hiervon nicht berührt.

Es wird nun das Spektrum von $f_p(t)$ betrachtet. Anstelle der diskreten Linien (Höhe $\text{Re}\{\underline{A}_\kappa\}$ bzw. $\text{Im}\{\underline{A}_\kappa\}$) werden Rechtecke (Breite $\Delta\omega$, Höhe $\text{Re}\{\underline{E}_T\}$ bzw. $\text{Im}\{\underline{E}_T\}$) gezeichnet:



(Die Rechtecke sind hier symmetrisch zu ω_κ gezeichnet)

Die gesamte (noch periodische) Zeitfunktion $f_p(t)$ erhält man durch die gewohnte Reihenbildung nach Multiplikation der Glieder mit dem Zeitfaktor $e^{j\kappa\omega_g t} = e^{j\omega_\kappa t}$

$$f_P(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\omega_k=-\infty}^{\infty} \left(\operatorname{Re} \left\{ \underline{E}_T(\omega) \cdot e^{j\omega t} \right\}_{\omega=\omega_k} \cdot \Delta\omega \right) = \operatorname{Re} \{ f_P(t) \} = f_P(t)$$

wogegen natürlich hier gelten muß ($f(t)$ auch gerade!):

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\omega_k=-\infty}^{\infty} \left(\operatorname{Im} \left\{ \overbrace{\underline{E}_T(\omega)}^{\text{gerade}} \cdot e^{j\omega t} \right\}_{\omega=\omega_k} \cdot \Delta\omega \right) = \operatorname{Im} \{ f_P(t) \} = 0$$

↑
Allgemein $f_{Ru}(t)$

Wenn $\underline{E}_T(\omega)$ ungerade in ω ist,
dann gibt's auch ein $f_{Ru}(t)$!

da ja von einer reellen und geraden Zeitfunktion $f(t)$ ausgegangen wurde. Es ist also:

$$f_P(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{\omega_k=-\infty}^{\infty} \left(\left\{ \underline{E}_T(\omega) \cdot e^{j\omega t} \right\}_{\omega=\omega_k} \cdot \Delta\omega \right)$$

6.Schritt

Bis jetzt noch nichts Neues. Es wurde die periodische Ersatzfunktion $f_P(t)$ (die mit $f(t)$ im Grundintervall übereinstimmt) in eine komplexe Fourierreihe entwickelt.

Um nun aber die gegebene Funktion $f(t)$ ganz zu erfassen, muß der Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ vorgenommen werden. Dabei passiert dreierlei:

- Die ganze Funktion $f(t)$ wird erfaßt ($-\infty < t < \infty$).
- Die stetige Funktion $\underline{E}_T(\omega)$ (Höhe der Rechtecke) ändert sich durch die Erweiterung des Integrationsbereichs nach Maßgabe des Verlaufs von $f(t)$:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \{ \underline{E}_P(\omega) \} = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau = \underline{E}(\omega)$$

Für festes ω strebt $\underline{E}_T(\omega)$ für $T \rightarrow \infty$ einem Grenzwert zu, wenn $f(t)$ für große t hinreichend verschwindet. Dies ist der Fall, wenn $f(t)$ die in Schritt 1 erwähnte Bedingung erfüllt:

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot dt < \infty \quad (\text{konvergent; hinreichend!})$$

- Die Summe für $f_P(t)$ geht über in ein Integral für $f(t)$. Für $T \rightarrow \infty$ wird aus $\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} \rightarrow d\omega$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \{ f_P(t) \} &= f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \left\{ \sum_{\omega_k=-\infty}^{\infty} \left(\left\{ \underline{E}_T(\omega) \cdot e^{j\omega t} \right\}_{\omega=\omega_k} \cdot \Delta\omega \right) \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \underline{E}(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega \end{aligned}$$

Letzteres ergibt sich aus der Definition des bestimmten Integrals:

$$\int_{(B)} f(x) \cdot dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \sum_{(B)} (f(x_v) \cdot \Delta x) \right\}$$

7. Schritt

Damit lässt sich nun das Fourierintegral-Theorem zusammenfassen:

Eine nichtperiodische Funktion $f(t)$, die der Bedingung $\int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)| \cdot dt < \infty$ (konvergent) genügt, kann dargestellt werden durch:

$$\underbrace{f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega}_{\text{Zeitfunktion}} \quad \text{mit:} \quad \underbrace{\underline{F}(\omega) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau}_{\text{Spektralfunktion}}$$

Symbol:



Zusammenfassend angeschrieben in Form des Fourier'schen Doppelintegrals:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{j\omega \cdot (t-\tau)} \cdot d\tau \cdot d\omega$$

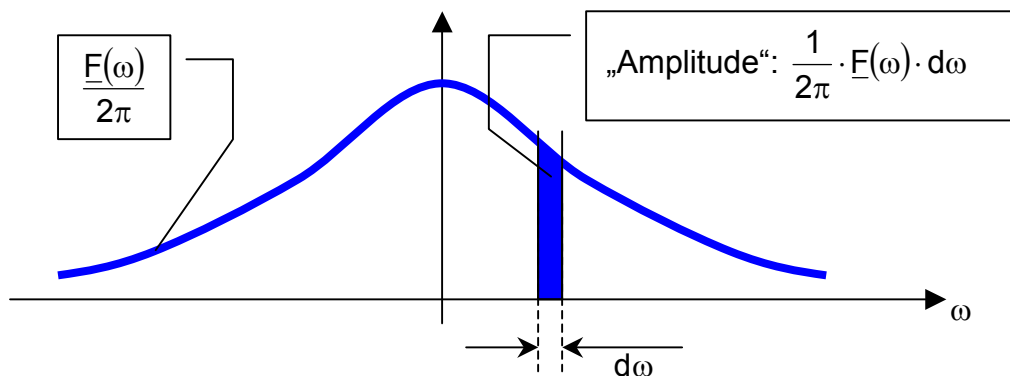
Veranschaulichung:

$f(t)$ kann interpretiert werden als Überlagerung von ∞ vielen „Teilschwingungen“:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \underbrace{\underline{F}(\omega) \cdot d\omega}_{\text{„dA“}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{Zeitfaktor}} \quad (\infty \text{ kleine}) \text{ komplexe Amplituden } (\underline{F}(\omega) \cdot d\omega)$$

$\underline{F}(\omega)$ ist also eine „Spektraldichte“.

z.B.: Reelles $\underline{F}(\omega)$ (das ist so, wenn $f(t)$ gerade und reell ist):



Wenn beispielsweise $f(t)$ in [Volt] gegeben ist (Zeitverlauf einer Spannung), dann erhält man für $\underline{F}(\omega)$ die Einheit [Volt-sec] oder $\left[\frac{\text{Volt}}{\text{Hz}} \right]$.

Anmerkung:

$f(t)$ ist Parameter-Integral (t ist Parameter, ω ist Integrationsvariable). Daher ist auch eine geschlossene Darstellung unstetiger (stückweise zusammengesetzter) Funktionen möglich.

3.2 Reelle Darstellung des Fourierintegrals

Ebenso wie bei der Fourierreihe ist natürlich auch beim Fourierintegral eine reelle Darstellung möglich. Bei der Reihe erfolgte der Übergang von der reellen zur komplexen Darstellung. Hier wird nun von der komplexen Darstellung des Integrals zur reellen Darstellung zurückgekehrt, indem man $e^{j\alpha}$ durch $\cos(\alpha)$ und $\sin(\alpha)$ ausdrückt.

„Komplexe Darstellung“: Entwicklung nach komplexen Funktionen ($e^{j\alpha}$)
 „Reelle Darstellung“: Entwicklung nach reellen Funktionen ($\cos(\alpha)$, $\sin(\alpha)$)

Anmerkung:

Es sollen hier nur reelle Zeitfunktionen betrachtet werden. $f(\tau)$ darf aber durchaus komplex sein. Dann erhält man auch in der „reellen“ Darstellung komplexe Spektralfunktionen bzw. Fourierkoeffizienten.

Ausgangspunkt ist das Fourier'sche Doppelintegral in komplexer Darstellung:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \left(\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau \right) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{j\omega \cdot (t-\tau)} \cdot d\tau \cdot d\omega \end{aligned}$$

Die komplexe Exponentialfunktion im Integranden wird nun durch Sinus- und Kosinusfunktion ausgedrückt:

$$e^{j\omega \cdot (t-\tau)} = \cos(\omega \cdot (t-\tau)) + j \cdot \sin(\omega \cdot (t-\tau))$$

Man erhält damit:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \cos(\omega \cdot (t-\tau)) \cdot d\tau}_{\text{gerade in } \omega} + j \cdot \underbrace{\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \sin(\omega \cdot (t-\tau)) \cdot d\tau}_{\text{ungerade in } \omega} \right) \cdot d\omega$$

Wegen der Symmetrieeigenschaften bzgl. ω verschwindet das 2. Integral bei der Integration über ω ; das 1. Integral lässt sich zu $2 \cdot \int_{\omega=0}^{\infty} \dots$ verkürzen. Man erhält also:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{\omega=0}^{\infty} \left(\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \cos(\omega \cdot (t - \tau)) \cdot d\tau \right) \cdot d\omega \\ &= \dots \text{(mit Additionstheorem)} \dots \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=0}^{\infty} \left(\left(2 \cdot \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \cos(\omega\tau) \cdot d\tau \right) \cdot \cos(\omega t) + \right. \\ &\quad \left. + \left(2 \cdot \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \sin(\omega\tau) \cdot d\tau \right) \cdot \sin(\omega t) \right) \cdot d\omega \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=0}^{\infty} a(\omega) \cdot \sin(\omega t) \cdot d\omega + \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=0}^{\infty} b(\omega) \cdot \cos(\omega t) \cdot d\omega$$

$$\text{mit: } a(\omega) = 2 \cdot \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \sin(\omega\tau) \cdot d\tau$$

$$b(\omega) = 2 \cdot \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot \cos(\omega\tau) \cdot d\tau$$

Dies ist die reelle Darstellung des Fourierintegrals. Bei reellen Zeitfunktionen $f(\tau)$ sind $a(\omega)$ und $b(\omega)$ wieder reelle Spektralfunktionen.

Der Zusammenhang mit der komplexen Spektralfunktion

$$\underline{F}(\omega) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} \cdot d\tau = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot (\cos(\omega\tau) - j \cdot \sin(\omega\tau)) \cdot d\tau$$

ist wieder (wie bei der Reihe):

$$\underline{F}(\omega) = \frac{1}{2} \cdot (b(\omega) - j \cdot a(\omega))$$

Anmerkung:

Die komplexe Darstellung ist eleganter und brauchbarer als die reelle, da Methoden der komplexen Integration, z.B. Residuensätze direkt anwendbar sind.

3.3 Zuordnungssatz und Symmetrieeigenschaften

„Zuordnungssatz“

Im allgemeinsten Fall können sowohl Zeitfunktion $f(t)$ als auch Spektralfunktion $\underline{F}(\omega)$ komplex sein. Dabei können sowohl Real- als auch Imaginärteil einen in t bzw. in ω „geraden“ oder/und einen „ungeraden“ Anteil haben.

$$\text{„Gerade Funktion“: } G(-x) = G(x)$$

$$\text{„Ungerade Funktion“: } U(-x) = -U(x)$$

Es soll bedeuten:

- Rg: Realteil, gerade
- Ru: Realteil, ungerade
- Ig: Imaginärteil, gerade
- Iu: Imaginärteil, ungerade

Dann gilt, wie man sofort aus den Formeln für $\underline{F}(\omega)$, $a(\omega)$, $b(\omega)$ sieht, der folgende Zuordnungssatz:

$$\begin{array}{ccccccc} \textcircled{f(t)} & = & \textcircled{f_{Rg}(t)} & + & \textcircled{f_{Ru}(t)} & + & j \cdot \textcircled{f_{Ig}(t)} & + & j \cdot \textcircled{f_{Iu}(t)} \\ \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\ \textcircled{\underline{F}(\omega)} & = & \textcircled{F_{Rg}(\omega)} & + & \textcircled{F_{Ru}(\omega)} & + & j \cdot \textcircled{F_{Ig}(\omega)} & + & j \cdot \textcircled{F_{Iu}(\omega)} \\ \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \end{array}$$

z.B. gilt also:

Das Spektrum einer reellen Zeitfunktion hat immer einen in ω geraden Realteil und ungeraden Imaginärteil, d.h.

$$\underline{F}(-\omega) = \underline{F}^*(\omega) \quad \text{für reelles } f(t)$$

oder

$f(t)$ reell, gerade	$\textcircled{\quad} \text{---} \bullet$	$\underline{F}(\omega)$ reell, gerade
$f(t)$ reell, ungerade	$\textcircled{\quad} \text{---} \bullet$	$\underline{F}(\omega)$ imaginär, ungerade

oder

$f(t)$ gerade	$\textcircled{\quad} \text{---} \bullet$	$\underline{F}(\omega)$ gerade	} allgemein
$f(t)$ ungerade	$\textcircled{\quad} \text{---} \bullet$	$\underline{F}(\omega)$ ungerade	

Verkürzte Integration bei Symmetrieeigenschaften

(1) $f(t)$ gerade, d.h. $f(t) = f_g(t) = f_g(-t)$

$$\Rightarrow \underline{F}(\omega) = \frac{1}{2} \cdot b(\omega)$$

$$a(\omega) = 0$$

$$b(\omega) = 4 \cdot \int_{\tau=0}^{\infty} f(\tau) \cdot \cos(\omega\tau) \cdot d\tau$$

(2) $f(t)$ ungerade, d.h. $f(t) = f_u(t) = -f_u(-t)$

$$\Rightarrow \underline{F}(\omega) = -j \cdot \frac{1}{2} \cdot a(\omega)$$

$$b(\omega) = 0$$

$$a(\omega) = 4 \cdot \int_{\tau=0}^{\infty} f(\tau) \cdot \sin(\omega\tau) \cdot d\tau$$

Anmerkung:

Symmetrieeigenschaften sind nicht nutzbar für $\underline{F}(\omega)$ selbst.

3.4 Berechnung von Spektralfunktionen und Herleitung von Rücktransmutationsformeln

Bei gegebenem $f(t)$ (auch stückweise zusammengesetzt) ist es grundsätzlich einfach, das zugehörige $\underline{F}(\omega)$ zu berechnen. Umgekehrt aber bildet der Übergang

$$\underline{F}(\omega) \bullet \longrightarrow \circ f(t) \quad (\text{„Rücktransformation“})$$

zunächst Schwierigkeiten, da ja das Rücktransmutationsintegral (Parameterintegral mit t als Parameter)

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

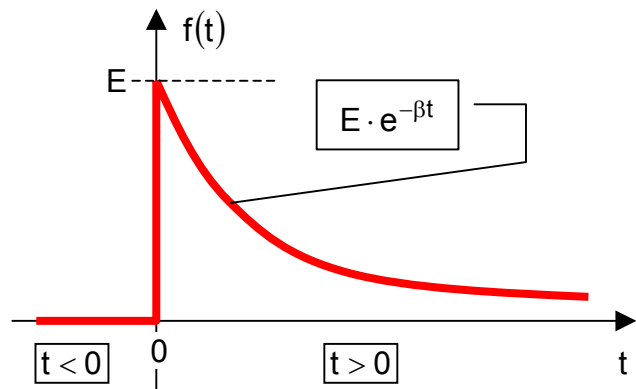
die geschlossene Darstellung einer stückweise zusammengesetzten Zeitfunktion sein kann, die dann wieder original herauskommen muß.

Mangels Stoffkenntnissen in Funktionentheorie kann hier leider nicht die mathematische Herleitung gebracht werden. Es bietet sich demnach die folgende Vorgehensweise an: Man kennt ja das (gegebene) $f(t)$, das nach Hin- und Rücktransmutation wieder herauskommen muß. Auf diese Weise lassen sich für einige wesentliche Zeitfunktionen die wichtigsten Rücktransmutationsformeln herleiten, die man bei Schaltvorgängen immer wieder braucht.

1.Beispiel (Einschaltvorgang)

Die folgende, in Tabellenform ange-schriebene, Zeitfunktion $f(t)$ sei gegeben:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für: } t < 0 \\ E \cdot e^{-\beta t} & \text{für: } t > 0 \end{cases}$$



Für die dazugehörige Spektralfunktion $\underline{F}(\omega)$ erhält man dann:

$$\begin{aligned} \underline{F}(\omega) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \\ &= E \cdot \int_{t=0}^{\infty} e^{-\beta t} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \\ &= E \cdot \int_{t=0}^{\infty} e^{-\overbrace{(j\omega + \beta)}^z} \cdot dt \\ &= E \cdot \frac{1}{\beta + j\omega} \cdot \int_{z=0}^{\infty} e^{-z} \cdot dz \\ &= E \cdot \frac{1}{\beta + j\omega} \cdot \left[-e^{-z} \right]_0^{\infty} = E \cdot \frac{1}{\beta + j\omega} = \frac{E}{j} \cdot \frac{1}{\omega - j\beta} \end{aligned}$$

Substitution:
 $z = (j\omega + \beta) \cdot t$
 $\frac{dz}{dt} = j\omega + \beta$
 $t = 0 \rightarrow z = 0$
 $t = \infty \rightarrow z = \infty$

oder

$$\underline{F}(\omega) = E \cdot \left(\frac{\beta}{\omega^2 + \beta^2} - j \cdot \frac{\omega}{\omega^2 + \beta^2} \right)$$

Die „Hintransformation“

$$f(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{F}(\omega)$$

stellt, wie erwartet, kein Problem dar. Doch jetzt zur „Rücktransformation“:

$$\underline{F}(\omega) \quad \bullet \text{---} \circ \quad f(t)$$

Diese Umkehrung muß natürlich wieder das ursprüngliche $f(t)$ ergeben. Man kann also (ohne irgendwas zu rechnen) sofort hinschreiben:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega = \frac{E}{2\pi j} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega - j\beta} \cdot d\omega = \begin{cases} 0 & \text{für: } t < 0 \\ E \cdot e^{-\beta t} & \text{für: } t > 0 \end{cases}$$

Das Parameterintegral (t =Parameter) „zerplatzt“ in die Tabelle.

Aus diesem Beispiel läßt sich folgende allgemeine Rechenregel (für die Rücktransformation) ableiten:

Ist eine komplexe Zeitfunktion gegeben ($\underline{\omega}_v$: fest)

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für: } t < 0 \\ e^{j\underline{\omega}_v t} & \text{für: } t > 0 \end{cases}$$

mit: $\underline{\omega}_v = \Omega + j\beta$

wobei $\text{Im}\{\underline{\omega}_v\} = \beta > 0$ sein muß

so ergibt sich für die zugehörige Spektralfunktion (entsprechend Beispiel 1: $E = 1$, $\underline{\omega}_v = j\beta$, $\beta = -j\underline{\omega}_v$)

$$\underline{F}(\omega) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-j(\omega - \underline{\omega}_v)t} \cdot dt = \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{\omega - \underline{\omega}_v}$$

und die Rücktransformation liefert die wichtige Formel:

$$\frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega - \underline{\omega}_v} \cdot d\omega = \begin{cases} 0 & \text{für: } t < 0 \\ e^{j\underline{\omega}_v t} & \text{für: } t > 0 \end{cases}$$

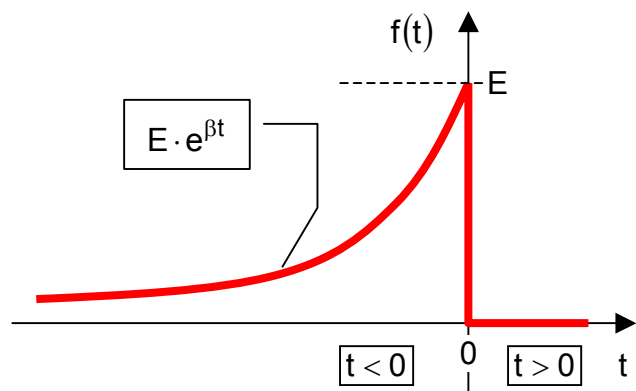
mit: $\text{Im}\{\underline{\omega}_v\} > 0$ (wegen Konvergenz!)

2.Beispiel (Abschaltvorgang)

Die folgende, in Tabellenform ange-schriebene, Zeitfunktion $f(t)$ sei gegeben:

$$f(t) = \begin{cases} E \cdot e^{\beta t} & \text{für: } t < 0 \\ 0 & \text{für: } t > 0 \end{cases}$$

Für die dazugehörige Spektralfunktion $\underline{F}(\omega)$ erhält man dann:



$$\begin{aligned}
 \underline{F}(\omega) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \\
 &= E \cdot \int_{t=-\infty}^0 e^{\beta t} \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \\
 &= E \cdot \int_{t=-\infty}^0 e^{\overbrace{(-j\omega+\beta)}^z} \cdot t \cdot dt \\
 &= E \cdot \frac{1}{\beta - j\omega} \cdot \int_{z=-\infty}^0 e^z \cdot dz \\
 &= E \cdot \frac{1}{\beta - j\omega} \cdot \left[e^z \right]_{z=-\infty}^0 = E \cdot \frac{1}{\beta - j\omega} = -\frac{E}{j} \cdot \frac{1}{\omega + j\beta}
 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Substitution:} \\ z = (-j\omega + \beta) \cdot t \\ \frac{dz}{dt} = -j\omega + \beta \\ t = -\infty \rightarrow z = -\infty \\ t = 0 \rightarrow z = 0 \end{array} \right)$$

Analog zu Beispiel 1 muß die Umkehrung natürlich wieder das ursprüngliche $f(t)$ ergeben. Man kann also sofort hinschreiben (für $\beta > 0$):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega = -\frac{E}{2\pi j} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega + j\beta} \cdot d\omega = \begin{cases} E \cdot e^{\beta t} & \text{für: } t < 0 \\ 0 & \text{für: } t > 0 \end{cases}$$

Aus diesem Beispiel läßt sich folgende allgemeine Rechenregel (für die Rücktransformation) ableiten:

Ist eine komplexe Zeitfunktion gegeben ($\underline{\omega}_v$: fest)

$$f(t) = \begin{cases} -e^{j\underline{\omega}_v t} & \text{für: } t < 0 \\ 0 & \text{für: } t > 0 \end{cases}$$

mit: $\underline{\omega}_v = \Omega + j\beta$

wobei $\text{Im}\{\underline{\omega}_v\} = \beta < 0$ sein muß

so ergibt sich für die zugehörige Spektralfunktion (entsprechend Beispiel 2: $E = -1$, $\underline{\omega}_v = -j\beta$, $\beta = j\underline{\omega}_v$)

$$\underline{F}(\omega) = \int_{t=0}^{\infty} e^{-j(\omega - \underline{\omega}_v)t} \cdot dt = \frac{1}{j} \cdot \frac{1}{\omega - \underline{\omega}_v}$$

und die Rücktransformation liefert die wichtige Formel:

$$\frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega - \underline{\omega}_v} \cdot d\omega = \begin{cases} -e^{j\underline{\omega}_v t} & \text{für: } t < 0 \\ 0 & \text{für: } t > 0 \end{cases}$$

mit: $\text{Im}\{\underline{\omega}_v\} < 0$ (wegen Konvergenz!)

Zusammenfassend gilt also:

$$\frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega - \underline{\omega}_v} \cdot d\omega = \begin{cases} \begin{cases} -e^{j\underline{\omega}_v t} & \text{für: } t < 0 \\ 0 & \text{für: } t > 0 \end{cases} & \text{für: } \text{Im}\{\underline{\omega}_v\} < 0 \\ \begin{cases} 0 & \text{für: } t < 0 \\ e^{j\underline{\omega}_v t} & \text{für: } t > 0 \end{cases} & \text{für: } \text{Im}\{\underline{\omega}_v\} > 0 \end{cases}$$

Eine weitere wichtige Rücktransformationsformel erhält man hieraus durch Partialbruchzerlegung:

$$\int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} \cdot d\omega}{(\omega - \underline{\omega}_1) \cdot (\omega - \underline{\omega}_2)} = \underline{A} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} \cdot d\omega}{(\omega - \underline{\omega}_1)} + \underline{B} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} \cdot d\omega}{(\omega - \underline{\omega}_2)}$$

Wie man leicht zeigen kann, ist

$$\underline{A} = \frac{1}{\underline{\omega}_1 - \underline{\omega}_2}$$

und

$$\underline{B} = -\underline{A} = \frac{-1}{\underline{\omega}_1 - \underline{\omega}_2}$$

$$\psi(\omega) = \frac{1}{(\omega - \underline{\omega}_1) \cdot (\omega - \underline{\omega}_2)} = \frac{\underline{A}}{(\omega - \underline{\omega}_1)} + \frac{\underline{B}}{(\omega - \underline{\omega}_2)}$$

$$\rightarrow \underline{A} = \left[(\omega - \underline{\omega}_1) \cdot \psi(\omega) \right]_{\omega=\underline{\omega}_1} = \frac{1}{\underline{\omega}_1 - \underline{\omega}_2}$$

$$\underline{B} = \left[(\omega - \underline{\omega}_2) \cdot \psi(\omega) \right]_{\omega=\underline{\omega}_2} = \frac{1}{\underline{\omega}_2 - \underline{\omega}_1}$$

Damit ergibt sich eine weitere Rücktransformationsformel:

$$\frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{(\omega - \underline{\omega}_1) \cdot (\omega - \underline{\omega}_2)} \cdot d\omega =$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{-e^{j\underline{\omega}_1 t} + e^{j\underline{\omega}_2 t}}{\underline{\omega}_1 - \underline{\omega}_2} & \text{für: } t < 0 \\ 0 & \text{für: } t > 0 \end{array} \right\} \quad \text{für: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Im}\{\underline{\omega}_1\} < 0 \\ \text{Im}\{\underline{\omega}_2\} < 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} \frac{-e^{j\underline{\omega}_1 t}}{\underline{\omega}_1 - \underline{\omega}_2} & \text{für: } t < 0 \\ \frac{-e^{j\underline{\omega}_2 t}}{\underline{\omega}_1 - \underline{\omega}_2} & \text{für: } t > 0 \end{array} \right\} \quad \text{für: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Im}\{\underline{\omega}_1\} < 0 \\ \text{Im}\{\underline{\omega}_2\} > 0 \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & \text{für: } t < 0 \\ \frac{e^{j\underline{\omega}_1 t} - e^{j\underline{\omega}_2 t}}{\underline{\omega}_1 - \underline{\omega}_2} & \text{für: } t > 0 \end{array} \right\} \quad \text{für: } \left\{ \begin{array}{l} \text{Im}\{\underline{\omega}_1\} > 0 \\ \text{Im}\{\underline{\omega}_2\} > 0 \end{array} \right\}$$

So erhält man, ausgehend von der ersten Formel die wichtigsten Rücktransformationsformeln, z.B. auch:

$$\frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{\omega \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega}{(\omega - \underline{\omega}_1) \cdot (\omega - \underline{\omega}_2) \cdot (\omega - \underline{\omega}_3)} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für: } t < 0 \\ \frac{\underline{\omega}_1 \cdot e^{j\underline{\omega}_1 t}}{(\underline{\omega}_1 - \underline{\omega}_2) \cdot (\underline{\omega}_1 - \underline{\omega}_3)} + \frac{\underline{\omega}_2 \cdot e^{j\underline{\omega}_2 t}}{(\underline{\omega}_2 - \underline{\omega}_1) \cdot (\underline{\omega}_2 - \underline{\omega}_3)} + \frac{\underline{\omega}_3 \cdot e^{j\underline{\omega}_3 t}}{(\underline{\omega}_3 - \underline{\omega}_1) \cdot (\underline{\omega}_3 - \underline{\omega}_2)} & \text{für: } t > 0 \end{cases}$$

mit: $\text{Im}\{\underline{\omega}_v\} \geq 0$ (wegen Konvergenz!)

Anmerkung zu den Rücktransmutationsformeln

Der Integrand in den Formeln ($\underline{F}(\omega) \cdot e^{j\omega t}$) hat „Pole“ (Unendlichkeitsstellen, Nullstellen des Nenners). Diese Pole liegen bei den komplexen Frequenzen $\underline{\omega}_v = \Omega_v + j\beta_v$. Dabei musste bisher sein: $\text{Im}\{\underline{\omega}_v\} = \beta_v > 0$ oder $\text{Im}\{\underline{\omega}_v\} = \beta_v < 0$. Diese beiden Fälle sind unproblematisch. Was passiert aber bei dem Grenzfall $\beta_v = 0$?

Wird in den oben erwähnten Rücktransmutationsformeln auch der Grenzfall $\beta_v = 0$ zugelassen, dann stellt das eine Verletzung des Zuordnungssatzes dar. Dies ist aber nicht weiter störend, wie man an den Schaltungsbeispielen in Kap.3.5 sehen wird. Diese Problematik wird an Beispiel 1 (Einschalten einer abklingenden Exponentialfunktion) im folgenden veranschaulicht. Von der allgemeinen Rücktransmutationsformel

$$\frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega - \underline{\omega}_v} \cdot d\omega = \begin{cases} 0 & \text{für: } t < 0 \\ e^{j\underline{\omega}_v t} & \text{für: } t > 0 \end{cases} \quad \text{mit: } \text{Im}\{\underline{\omega}_v\} > 0$$

kommt man zu erwähntem Beispiel 1, indem $\underline{\omega}_v = j\beta$ (rein imaginär, $\beta > 0$) gesetzt wird. Es ergibt sich dann

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{\omega - j\beta} \cdot d\omega = \underbrace{\begin{cases} 0 & \text{für: } t < 0 \\ e^{-\beta t} & \text{für: } t > 0 \end{cases}}_{f(t)} = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

mit:

$$f(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{F}(\omega) = \frac{1}{\beta + j\omega} = \frac{\beta}{\omega^2 + \beta^2} - j \cdot \frac{\omega}{\omega^2 + \beta^2} = F_g(\omega) + j \cdot F_u(\omega)$$

Die Zeitfunktion ist reell. Für das Spektrum gilt: $\text{Re}\{\underline{F}(\omega)\}$ ist eine in ω gerade Funktion, $\text{Im}\{\underline{F}(\omega)\}$ ist eine in ω ungerade Funktion. Entsprechend dem Zuordnungssatz (Kap.3.4) gilt nun (für eine reelle Zeitfunktion $f(t)$)

$$\begin{array}{c} f(t) = f_g(t) + f_u(t) \\ \circ \quad \quad \quad \circ \quad \quad \quad \circ \\ | \quad \quad \quad | \quad \quad \quad | \\ \bullet \quad \quad \quad \bullet \quad \quad \quad \bullet \\ \underline{F}(\omega) = F_g(\omega) + j \cdot F_u(\omega) \end{array}$$

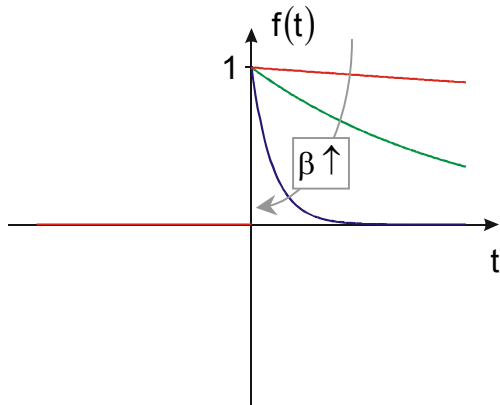
wobei

$$f_g(t) = \frac{1}{2} \cdot (f(t) + f(-t))$$

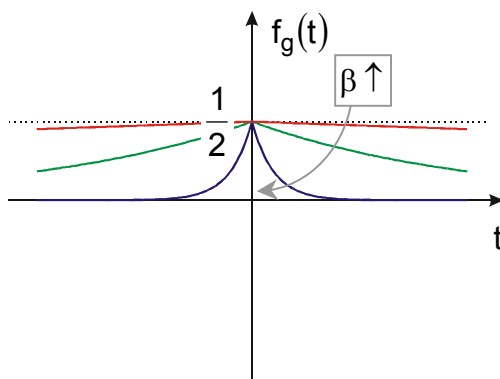
und

$$f_u(t) = \frac{1}{2} \cdot (f(t) - f(-t))$$

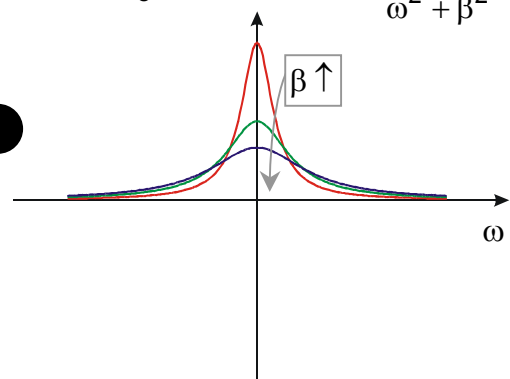
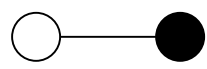
ist. Eine grafische Veranschaulichung dieses Sachverhalts ist in nachfolgenden Abbildungen dargestellt.



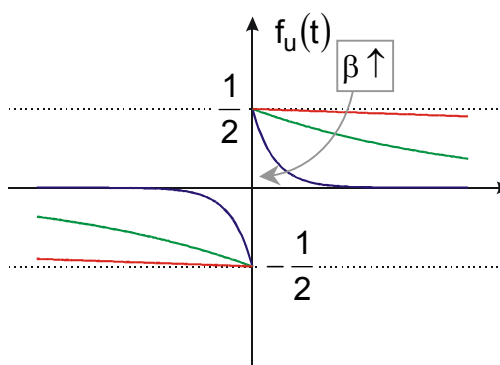
=



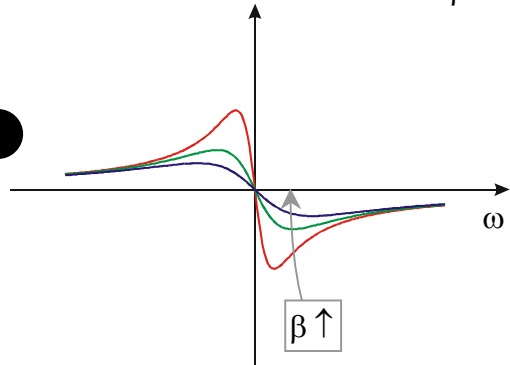
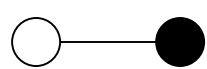
$$F_g(\omega) = \text{Re}\{F(\omega)\} = \frac{\beta}{\omega^2 + \beta^2}$$



+



$$F_u(\omega) = \text{Im}\{F(\omega)\} = \frac{-\omega}{\omega^2 + \beta^2}$$



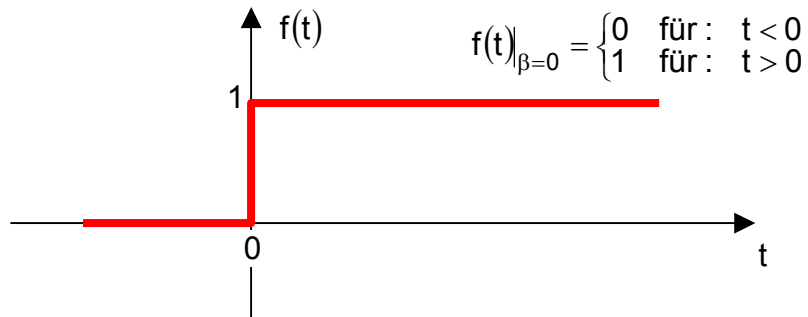
Bildet man das Integral über $\text{Re}\{F(\omega)\}$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F_g(\omega) \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F_g(\omega) \cdot \underbrace{e^{j\omega \cdot 0}}_{=1} \cdot d\omega = f_g(t=0) = \frac{1}{2},$$

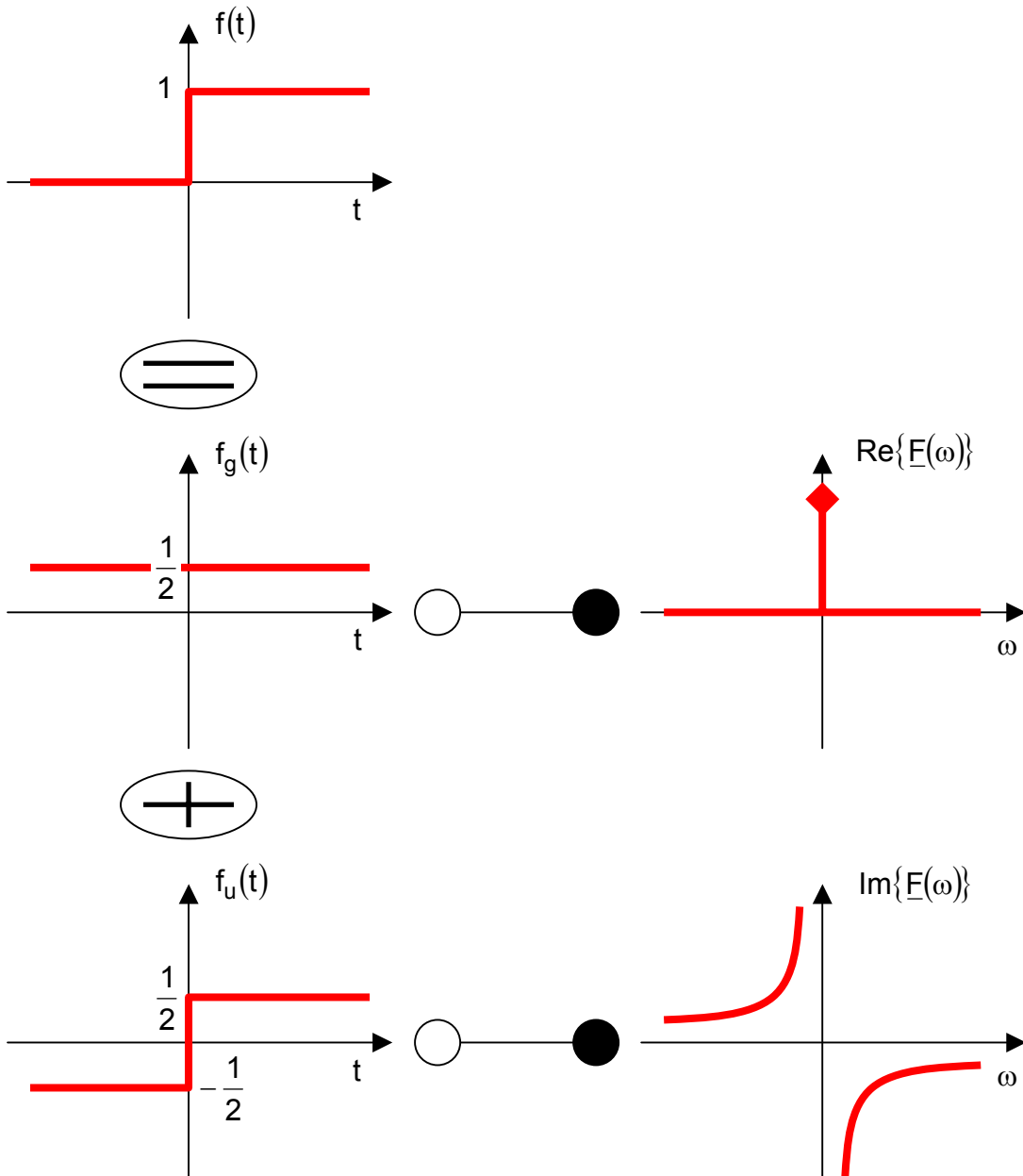
so zeigt sich, dass dieses unabhängig von β ist.

Nun zum Grenzfall $\beta = 0$:

Wenn man achtlos den Grenzübergang $\lim_{\beta \rightarrow 0} \{ \underline{E}(\omega) \} = \frac{1}{j\omega}$ bildet, so erhält man ein rein imaginäres Spektrum, d.h. die Zeitfunktion $f(t)$ müsste ungerade sein (Zuordnungssatz). Das ist sie aber nicht.



Vielmehr sieht es jetzt so aus:



Der Grenzübergang liefert also folgendes Ergebnis:

$$\lim_{\beta=0} \{ \operatorname{Re} \{ \underline{F}(\omega) \} \} = \pi \cdot \delta(\omega)$$

$$\lim_{\beta=0} \{ \operatorname{Im} \{ \underline{F}(\omega) \} \} = -\frac{1}{\omega}$$

$\delta(\omega)$ = „Delta-Funktion“ oder „Dirac-Funktion“: „Distribution“

Definition: $\delta(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für: } \omega \neq 0 \\ \infty & \text{für: } \omega = 0 \end{cases}$

mit: $\int_{\omega=-\infty}^{\infty} \delta(\omega) \cdot d\omega = 1$

Es gilt also mathematisch exakt:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für: } t < 0 \\ 1 & \text{für: } t > 0 \end{cases} \quad \text{○} \text{---} \text{●} \quad \underline{F}(\omega) = \pi \cdot \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

„Einheitssprung“, „Treppenfunktion“

↑
„versteckte Dirac-Funktion“

Damit erhält man für den Fall $\beta = 0$:

$$j \cdot F_u(\omega) = \frac{1}{j\omega} \quad \text{●} \text{---} \text{○} \quad f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{für: } t < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{für: } t > 0 \end{cases}$$

$$F_g(\omega) = \pi \cdot \delta(\omega) \quad \text{●} \text{---} \text{○} \quad f(t) = \frac{1}{2} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \delta(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega = \frac{1}{2} \cdot e^{j0t} = \frac{1}{2}$$

(für: $-\infty < t < \infty$)

So eine Geschichte passiert immer, wenn bei den Rücktransmutationsformeln ein Pol auf der reellen Achse liegt ($\operatorname{Im}\{\underline{\omega}_v\} = 0$). Wenn man diesen Pol bei der Frequenzintegration (längs der reellen ω -Achse) entzweischneidet, befolgt man den Zuordnungssatz richtig, und man erhält Funktionen, die auch für $t < 0$ endlich sind. Die Korrektur erfolgt durch die Dirac-Funktion im Realteil des Spektrums.

Normalerweise läßt man die δ -Funktion weg, d.h. man rechnet den Pol auf der reellen ω -Achse ganz zur oberen oder ganz zur unteren ω -Halbebene. Dann verletzt man zwar die Symmetrieregeln (Zuordnungssatz). Es kommt aber trotzdem alles richtig heraus, wenn man denselben „Fehler“ bei der Hin- und Rücktransmutation macht, d.h. in unseren Rücktransmutationsformeln auch $\operatorname{Im}\{\underline{\omega}_v\} = 0$ zuläßt. Am besten sieht man das an den folgenden Beispielen (Kap.3.5).

3.5 Elektrische Schaltvorgänge

Gegenstand dieses Kapitels ist die Diskussion von „instationären“ oder „Ausgleichsvorgängen“. Dazu werden Schaltungen mit linearen, konstanten Schaltelementen (passiv) untersucht.

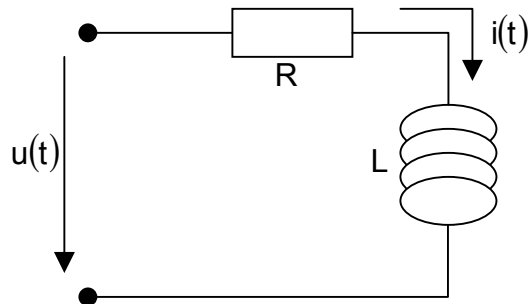
Die Zielsetzung besteht in der

- Anwendung des komplexen Fourierintegrals auf Schaltvorgänge und
- Lösung desselben Problems mittels Differentialgleichungen (zum Vergleich).

Eine denkbare Aufgabenstellung sieht folgendermaßen aus:

Am Eingang einer Serienschaltung aus R und L liegt die Spannung $u(t)$, deren Zeitverlauf gegeben ist. Gesucht ist der Zeitverlauf des Stromes $i(t)$

Gegeben: $u(t)$, „Erregung“
Gesucht: $i(t)$, „Antwort“



- a) Wenn $u(t)$ rein sinusförmig (eingeschwungen) ist, dann findet natürlich die komplexe Rechnung wie im 2. Trimester Anwendung:

$$\underline{u}(t) = \underline{U} \cdot e^{j\omega t} = U \cdot e^{j\varphi_U} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\underline{i}(t) = \underline{I} \cdot e^{j\omega t} = I \cdot e^{j\varphi_I} \cdot e^{j\omega t}$$

\underline{U} , \underline{I} „komplexe Amplituden“

Es gilt dann mit dem komplexen Widerstand $\underline{Z}(\omega)$:

$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}(\omega)}$$

- b) Wenn $u(t)$ und $i(t)$ nicht sinusförmig und instationär sind, setzt man nach Fourier $u(t)$ und $i(t)$ aus lauter eingeschwungenen „Bestandteilen“

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \underbrace{\underline{U}(\omega) \cdot d\omega}_{\text{„dU“}} \cdot e^{j\omega t}$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \underbrace{\underline{I}(\omega) \cdot d\omega}_{\text{„dI“}} \cdot e^{j\omega t}$$

zusammen:

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \underline{U}(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

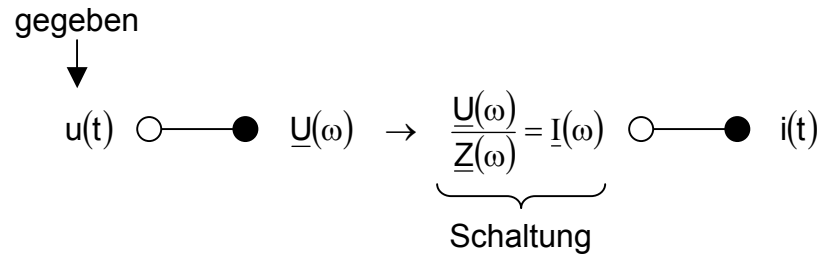
$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \underline{I}(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

Für jeden „Bestandteil“ gilt (weil eingeschwungen) das komplexe ohmsche Gesetz:

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \underline{U}(\omega) \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \underline{I}(\omega) \cdot d\omega \cdot \underline{Z}(\omega)$$

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \underline{I}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\underline{U}(\omega)}{\underline{Z}(\omega)}$$

Für die Spektralfunktionen gilt also dasselbe wie für die komplexen Amplituden im 2. Trimester.



Anmerkung:

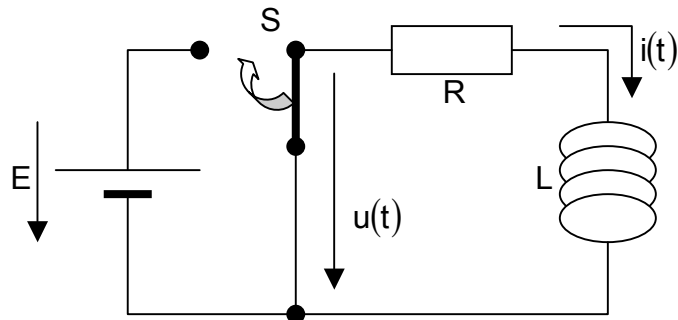
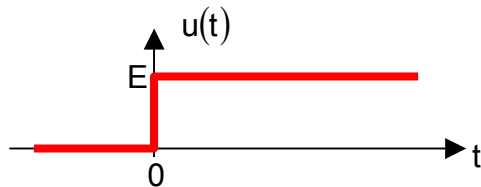
Die Erregung (hier $u(t)$) muß im gesamten Zeitbereich $-\infty < t < \infty$ definiert sein

Einschalten einer Gleichspannung an R-L-Serienschaltung:

A Lösung mit Fourier-Methode

Gegeben ist $u(t)$ als Sprungfunktion:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ E & \text{für } t > 0 \end{cases}$$



a) Zunächst wird die Spektralfunktion der Spannung gebildet:

$$u(t) \text{ --- } \underline{U}(\omega) = \frac{E}{j\omega}$$

(vgl. das über $\beta \rightarrow 0$ in Kap.3.4 gezeigte; δ weglassen)

b)
$$\underline{I}(\omega) = \frac{\underline{U}(\omega)}{\underline{Z}(\omega)} = \frac{\underline{U}(\omega)}{R + j\omega L} = \frac{E}{j} \cdot \frac{1}{\omega \cdot (R + j\omega L)}$$

Dieser Ausdruck muß (will man die Rücktransmutationsformeln anwenden)

auf die Form $\frac{1}{(\omega - \omega_1) \cdot (\omega - \omega_2)}$ gebracht werden:

$$\underline{I}(\omega) = \frac{E}{j} \cdot \frac{1}{jL} \cdot \frac{1}{\omega \cdot \left(\omega - j \cdot \frac{R}{L} \right)}$$

c) Jetzt erfolgt die Rücktransmutation:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \underline{I}(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega = \frac{E}{2\pi j} \cdot \frac{1}{jL} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} \cdot d\omega}{\omega \cdot \left(\omega - j \cdot \frac{R}{L} \right)}$$

also: $\omega_1 = 0$

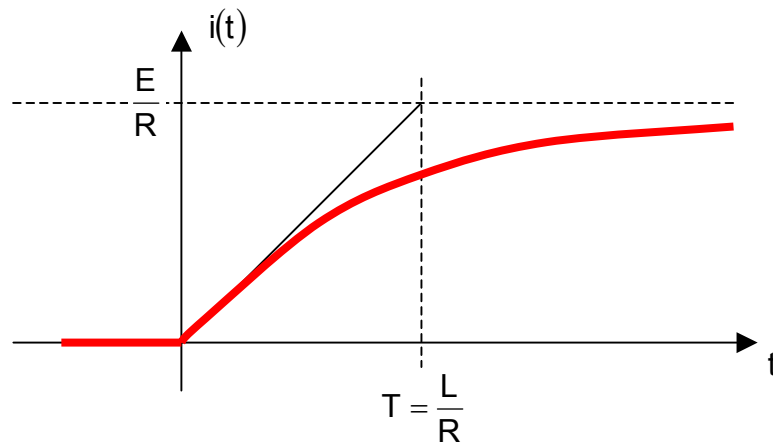
$$\underline{\omega}_2 = j \cdot \frac{R}{L}$$

Die Rücktransformationsformel lautet:

$$\frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t}}{(\omega - \underline{\omega}_1) \cdot (\omega - \underline{\omega}_2)} \cdot d\omega = \begin{cases} 0 & \text{für: } t < 0 \\ \frac{e^{j\underline{\omega}_1 t} - e^{j\underline{\omega}_2 t}}{\underline{\omega}_1 - \underline{\omega}_2} & \text{für: } t > 0 \end{cases}$$

Damit erhält man als Ergebnis:

$$i(t) = \begin{cases} 0 & \text{für: } t < 0 \\ E \cdot \frac{1}{jL} \cdot \frac{1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t}}{0 - j \cdot \frac{R}{L}} & \text{für: } t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{für: } t < 0 \\ \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right) & \text{für: } t > 0 \end{cases}$$



(„Zeitkonstante“)

B Lösung mit Differentialgleichung

Zur Zeit $t = 0$ wird Schalter S geschlossen.

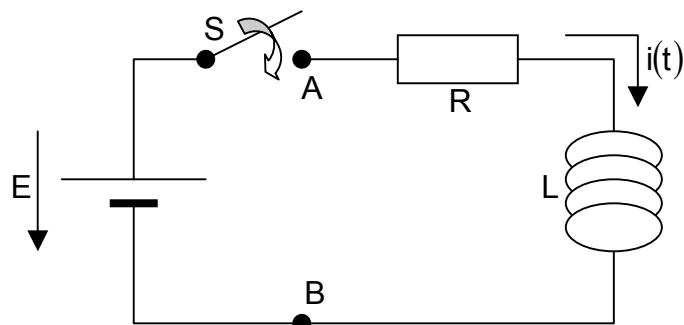
Für $t > 0$ gilt folgende Differentialgleichung:

$$E = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

oder

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i(t) = \frac{E}{L}$$

(inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, Lösung mit den bekannten Methoden der Mathematik)



- 1) verkürzte Gleichung (homogen): „freier“ Vorgang, (Kurzschluß A-B)

$$\frac{di_f(t)}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i_f(t) = 0$$

$$\frac{di_f(t)}{i_f(t)} = -\frac{R}{L} \cdot dt$$

$$\ln(i_f(t)) = -\frac{R}{L} \cdot t + \text{konst.}$$

$$\Rightarrow i_f(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \quad (\text{allgemeine Lösung der verkürzten Gleichung})$$

- 2) erweiterte Gleichung (inhomogen):
partikuläre Lösung der erweiterten Gleichung durch „Probieren“: Man wählt hierzu die stationäre Lösung für $t \rightarrow \infty$:

$$i_{st} = \frac{E}{R}$$

sie befriedigt die erweiterte Differentialgleichung

$$\underbrace{\frac{di_{st}(t)}{dt}}_{=0} + \frac{R}{L} \cdot \underbrace{i_{st}(t)}_{=\frac{E}{R}} = \frac{E}{L}$$

- 3) Allgemeine Lösung der erweiterten Gleichung = Allgemeine Lösung der verkürzten Gleichung + partikuläre Lösung der erweiterten Gleichung

$$i(t) = i_f(t) + i_{st} = A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{E}{R}$$

- 4) Nun ist noch die Konstante A zu bestimmen: Man erhält sie aus den „Anfangsbedingungen“.

Jetzt wird das Resultat der „Vorgeschichte“ benötigt (die in der Fouriemethode schon enthalten ist, da dort $u(t)$ von $-\infty < t < \infty$ definiert war). Hier soll gefordert werden: Der Energiespeicher L ist vor dem Einschalten „leer“, d.h. $\frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2 = 0$ für $t < 0$, d.h. $i = 0$ für $t < 0$ (Schalter offen). Dann muß auch sein: $i = 0$ für $t = 0$ (Anfangsbedingung, denn der Strom durch eine Spule darf nicht springen; $u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt} < \infty$).

Also:

$$i(t=0) = 0 = A + \frac{E}{R} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{E}{R}$$

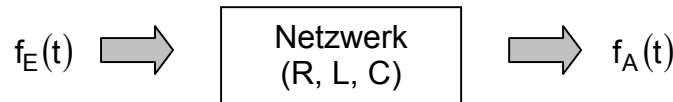
Somit erhält man als Lösung:

$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot \left(1 - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \right) \quad \text{für } t > 0, \text{ d.h. im Geltungsbereich der Differentialgleichung}$$

$$i(t) = 0 \quad \text{für } t < 0 \text{ (war gefordert)}$$

Zusammenfassung Schaltvorgänge

- 1) Problem:
Gegeben: lineares passives Netzwerk (R, L, C)
 „Erregung“ $f_E(t)$, (Ursache)
Gesucht: „Antwort“ $f_A(t)$, (Folge)



2) Behandlung mittels Fourier-Transformation

$$f_E(t) \text{ (circle) } \longrightarrow \bullet \text{ (circle) } \underline{F}_E(\omega) \longrightarrow \underline{F}_E(\omega) \cdot \underline{\ddot{u}}(\omega) = \underline{F}_A(\omega) \text{ (circle) } \longrightarrow \bullet \text{ (circle) } f_A(t)$$

$\underline{\ddot{u}}(\omega)$ = komplexer „Übertragungsfaktor“ des Netzwerks.

3) Behandlung mittels Differentialgleichung

Lineare Schaltelemente:

$$u_R(t) = R \cdot i_R(t)$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i_C(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$$

Kirchhoffsche Gleichungen; Eliminieren aller übrigen Größen liefert: 1 Differentialgleichung für $f_A(t)$ bei gegebenem $f_E(t)$ für $t > 0$. (Ordnung n = Anzahl der unabhängigen Energiespeicher).

Lösung dieser Differentialgleichung unter Berücksichtigung der n Anfangsbedingungen (Speicherinhalte, Erregung) $\Rightarrow f_A(t)$.

Beachte: $i_L(t)$, $u_C(t)$ dürfen nicht „springen“!

4) Bemerkungen zum Vergleich beider Methoden

a. Fourier:

$f_E(t)$ für $-\infty < t < \infty$ definiert, $f_A(t)$ kommt automatisch richtig (kausal) heraus

b. Differentialgleichung:

Gilt nur für $t > 0$; $f_E(t)$ nur für $t > 0$ definiert, „Vorgeschichte“ extra zu berücksichtigen \Rightarrow Anfangsbedingungen

Man beachte den Unterschied im Beispiel:

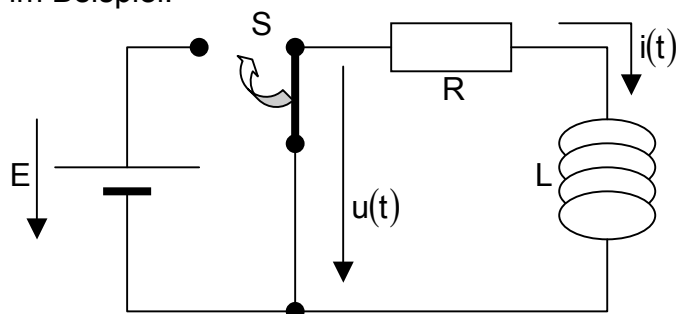
Fourier:

$u(t) = 0$ erzwungen für $t < 0$

d.h.

$$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = 0 \text{ für } t < 0$$

und



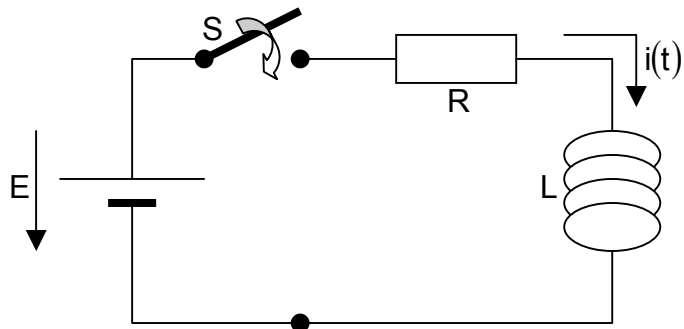
$$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = E \text{ für } t > 0$$

Differentialgleichung:

$i(t) = 0$ erzwungen für $t < 0$

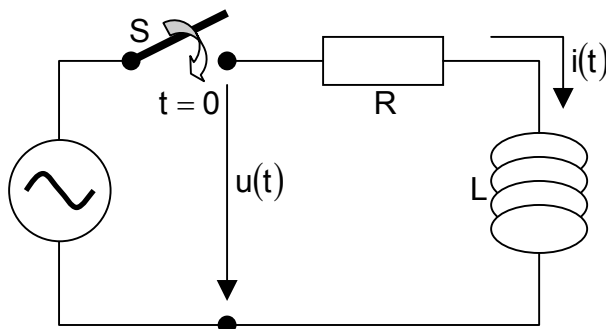
und

$$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = E \text{ für } t > 0$$



Einschalten einer Wechselspannung an R-L-Serienschaltung

A Lösung mit Differentialgleichung



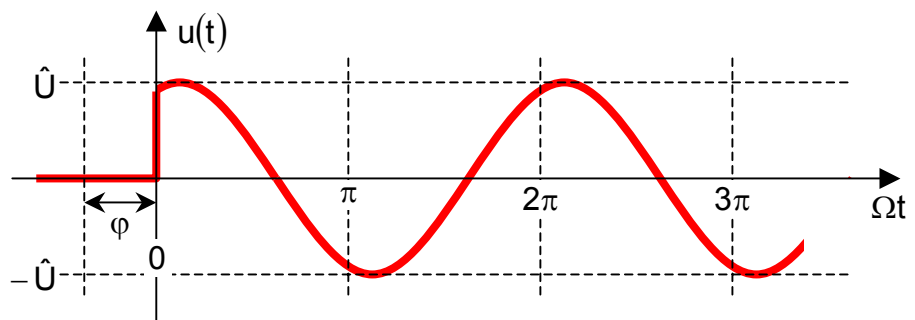
Gegeben:

Erregung $u(t)$ für $t > 0$

Zur Zeit $t = 0$ wird $u(t)$ „angelegt“.

Erregung für $t > 0$ definiert:

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\Omega t + \varphi)$$



Gesucht: $i(t)$ für $t > 0$

Differentialgleichung:
$$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = \hat{U} \cdot \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i(t) = \frac{\hat{U}}{L} \cdot \sin(\Omega t + \varphi)$$

Lösung der verkürzten (homogenen) Gleichung:

$$\frac{di_f(t)}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i_f(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad i_f(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$$

Partikuläre Lösung der erweiterten Gleichung:

Hierfür wird die stationäre Lösung $i_{st}(t) = i(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gewählt. Diese ist natürlich vom 2. Trimester her längst bekannt:

$$i_{st}(t) = \frac{\hat{U}}{Z} \cdot \sin(\Omega t + \varphi - \varphi_Z)$$

$$\text{mit: } Z = \sqrt{R^2 + (\Omega L)^2}$$

$$\tan(\varphi_Z) = \frac{\Omega L}{R}$$

Damit ergibt sich als gesamte Lösung:

$$i(t) = i_f(t) + i_{st}(t) = A \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{\hat{U}}{Z} \cdot \sin(\Omega t + \varphi - \varphi_Z)$$

Zur Bestimmung der Konstanten A wird eine Anfangsbedingung benötigt:

$$i(t=0) = 0 = A + \frac{\hat{U}}{Z} \cdot \sin(\varphi - \varphi_Z)$$

$$\Rightarrow A = -\frac{\hat{U}}{Z} \cdot \sin(\varphi - \varphi_Z)$$

Das Endergebnis lautet also:

$$i(t) = \frac{\hat{U}}{Z} \cdot \left(\sin(\Omega t + \varphi - \varphi_Z) - e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot \sin(\varphi - \varphi_Z) \right) \quad \text{für } t > 0$$

Diskussion des Ergebnisses:

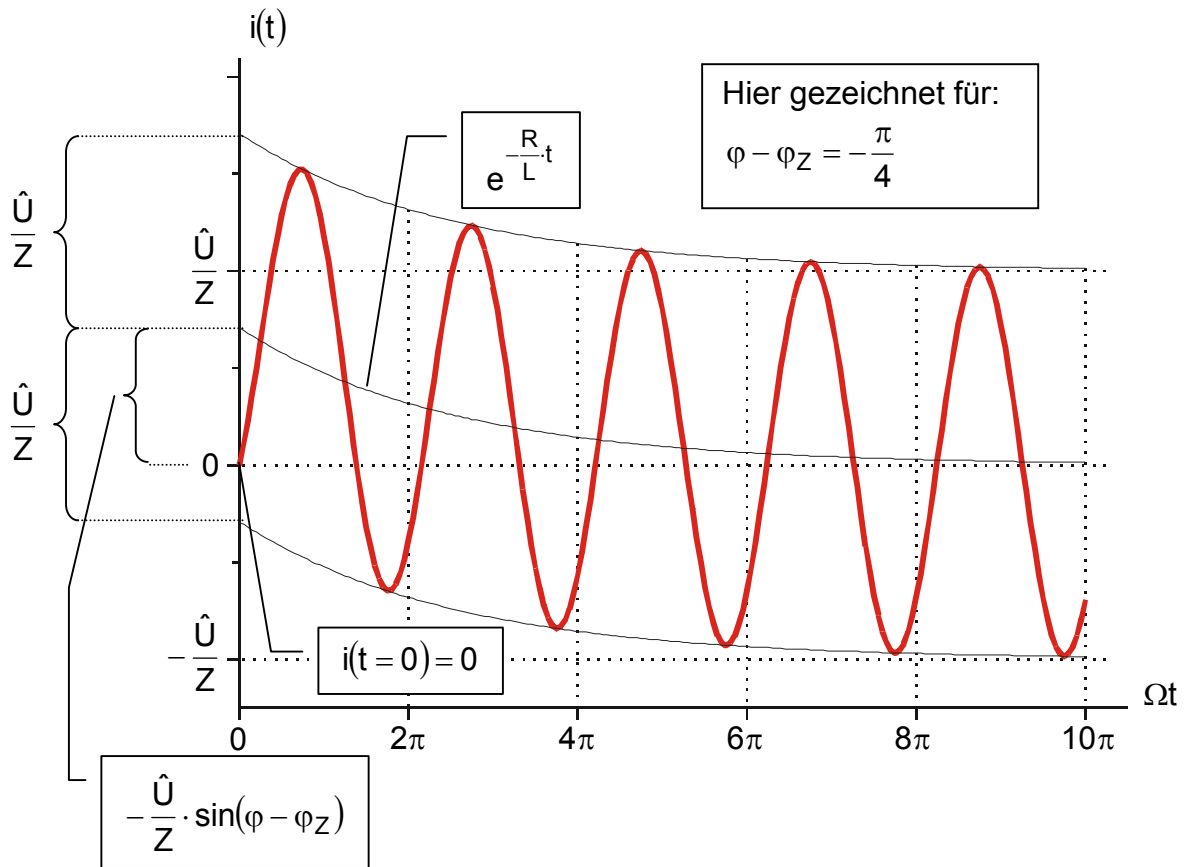
Das Ergebnis setzt sich aus 2 Anteilen zusammen:

$$\text{➤ } \frac{\hat{U}}{Z} \cdot \sin(\Omega t + \varphi - \varphi_Z) = i_{st}(t)$$

bleibt allein übrig für $t \rightarrow \infty$, stationärer Endzustand (2. Trimester).

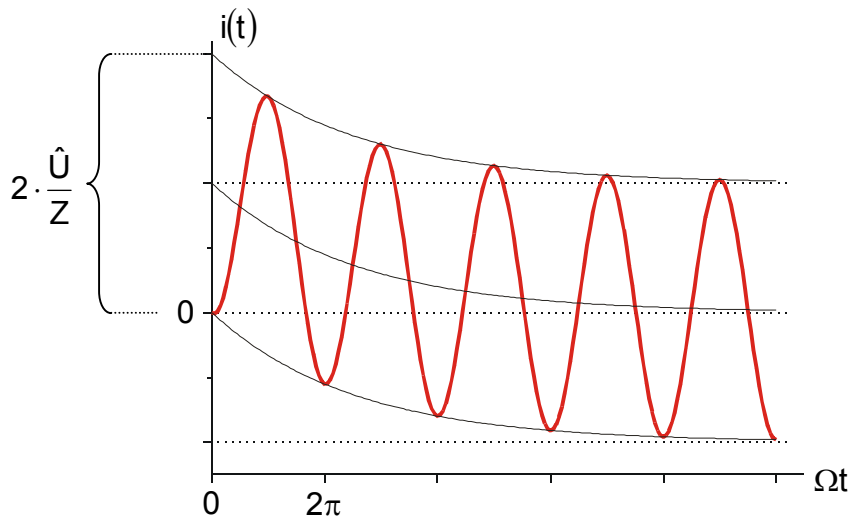
$$\text{➤ } -\frac{\hat{U}}{Z} \cdot e^{-\frac{R}{L} \cdot t} \cdot \sin(\varphi - \varphi_Z) = i_f(t)$$

„Störung“ durch Einschalten, die mit $e^{-\frac{R}{L} \cdot t} = e^{-\frac{t}{T}}$, d.h. mit „Zeitkonstante“ $T = \frac{L}{R}$, abklingt.

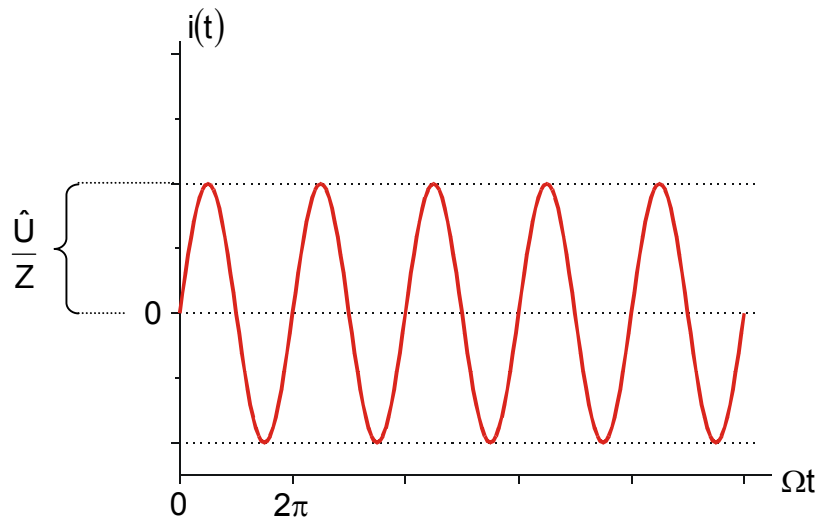


Wichtige Spezialfälle:

- (1) Bei $\varphi - \varphi_Z = \pm \frac{\pi}{2}$, d.h. $\sin(\varphi - \varphi_Z) = \pm 1$, am Anfang hohe Amplituden, d.h. $2 \times$ Endamplitude



- (2) Bei $\varphi = \varphi_Z$, d.h. $\sin(\varphi - \varphi_Z) = 0$ (im richtigen Zeitpunkt einschalten) tritt die „Schaltstörung“ gar nicht auf, da ja dann die stationäre Stromschwingung $\frac{\hat{U}}{Z} \cdot \sin(\Omega t)$ allein schon die Anfangsbedingung $i(t=0) = 0$ erfüllt:



Anmerkung:

Vorsicht also beim Einschalten von Selbstinduktionen, Sicherung kann durchbrennen, wenn man einen dummen Einschaltzeitpunkt erwischt.

B Lösung mit Fourier-Methode

Dasselbe Beispiel soll nun nach Fourier behandelt werden. Hierzu ist aber vorher noch eine grundsätzliche Zwischenbetrachtung sinnvoll:

Spektralfunktion modulierter Signale

Verschiebungssätze:

a) „Modulation“ im Zeitbereich $\circ \text{---} \bullet$ Verschiebung im Spektrum

$$f(t) = f_H(t) \cdot e^{j\Omega t}$$

$$f_H(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{F}_H(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f_H(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

$$f(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{F}(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt = \int_{t=-\infty}^{\infty} f_H(t) \cdot e^{-j(\omega-\Omega)t} \cdot dt = \underline{F}_H(\omega - \Omega)$$

b) analog umgekehrt:

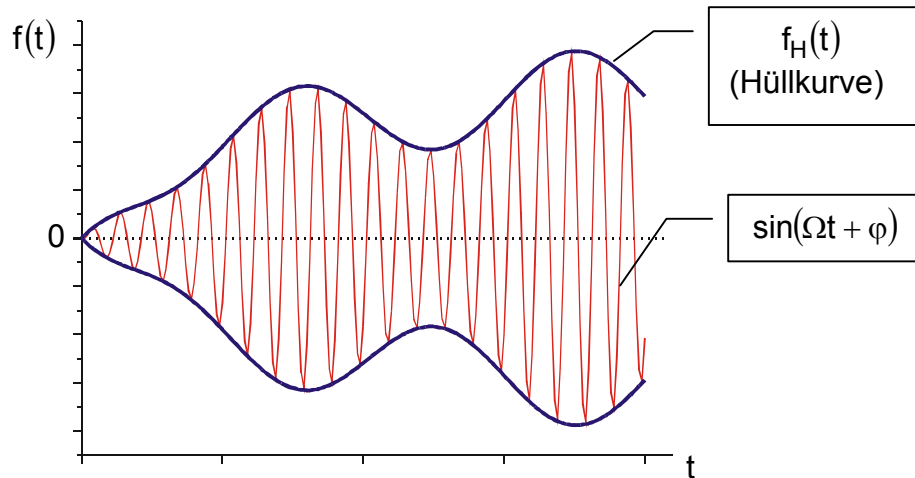
„Modulation“ im Spektralbereich $\bullet \text{---} \circ$ Verschiebung in der Zeitfunktion

$$\underline{F}(\omega) = \underline{F}_H(\omega) \cdot e^{-j\omega T}$$

$$\underline{F}_H(\omega) \quad \bullet \text{---} \circ \quad f_H(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \underline{F}_H(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega$$

$$\underline{F}(\omega) \quad \bullet \text{---} \circ \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \underline{F}(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \underline{F}_H(\omega) \cdot e^{j\omega(t-T)} \cdot d\omega = f_H(t-T)$$

Gegeben sei eine Sinusschwingung mit zeitabhängiger Amplitude:



$$f(t) = f_H(t) \cdot \sin(\Omega t + \varphi)$$

Das Spektrum der Hüllkurve lässt sich nach bekanntem Muster berechnen:

$$f_H(t) \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{E}_H(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f_H(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt$$

Wie kann man nun das Spektrum der gesamten gegebenen Zeitfunktion

$$\underline{E}(\omega) \quad \bullet \text{---} \circ \quad f(t)$$

durch das Spektrum der Hüllkurve

$$\underline{E}_H(\omega) \quad \bullet \text{---} \circ \quad f_H(t)$$


ausdrücken?

Für die gegebene Zeitfunktion gilt:

$$f(t) = f_H(t) \cdot \frac{1}{2j} \cdot (e^{j(\Omega t + \varphi)} - e^{-j(\Omega t + \varphi)})$$

$$\begin{aligned} \underline{E}(\omega) &= \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \\ &= \frac{1}{2j} \cdot \int_{t=-\infty}^{\infty} f_H(t) \cdot (e^{j(\Omega t + \varphi)} - e^{-j(\Omega t + \varphi)}) \cdot e^{-j\omega t} \cdot dt \\ &= \frac{1}{2j} \cdot \left(e^{j\varphi} \cdot \underbrace{\int_{t=-\infty}^{\infty} f_H(t) \cdot e^{-j(\omega - \Omega)t} \cdot dt}_{\underline{E}_H(\omega - \Omega)} - e^{-j\varphi} \cdot \underbrace{\int_{t=-\infty}^{\infty} f_H(t) \cdot e^{-j(\omega + \Omega)t} \cdot dt}_{\underline{E}_H(\omega + \Omega)} \right) \end{aligned}$$

$$f(t) = f_H(t) \cdot \sin(\Omega t + \varphi)$$



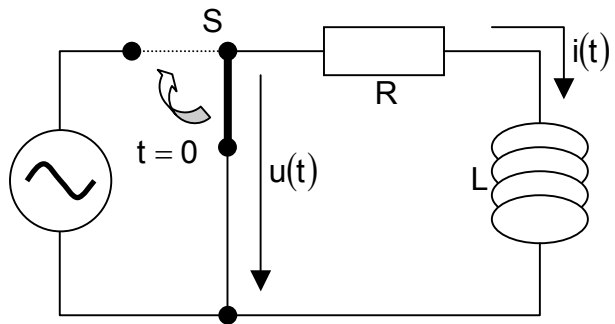
„Verschiebungssatz“

$$\underline{F}(\omega) = \frac{1}{2j} \cdot \left(e^{j\varphi} \cdot \underline{F}_H(\omega - \Omega) - e^{-j\varphi} \cdot \underline{F}_H(\omega + \Omega) \right)$$

Anmerkung:

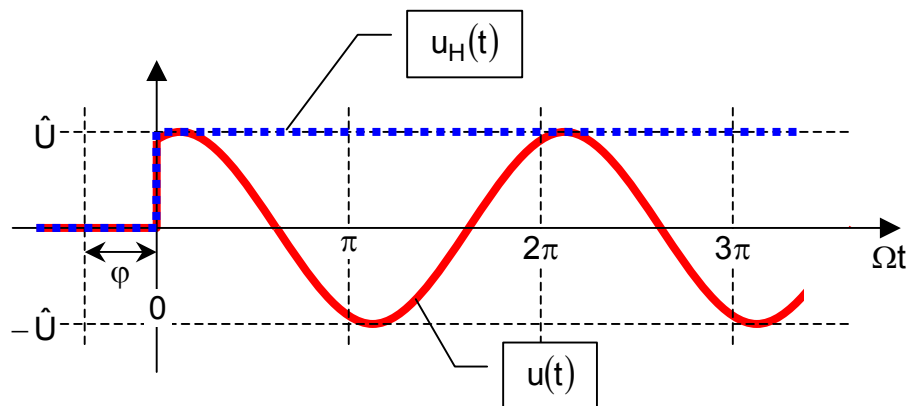
Man hätte natürlich auch $\cos(\Omega t + \varphi)$ oder $e^{j(\Omega t + \varphi)}$ ansetzen können.

Dieser Verschiebungssatz soll nun im Beispiel (Einschalten einer Wechselspannung an R-L-Serienschaltung) angewendet werden.



$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für : } t < 0 \\ \hat{U} \cdot \sin(\Omega t + \varphi) & \text{für : } t > 0 \end{cases}$$

Die Hüllkurve ist hier die schon behandelte Treppenfunktion.



$$u_H(t) = \begin{cases} 0 & \text{für : } t < 0 \\ \hat{U} & \text{für : } t > 0 \end{cases} \quad \circ \text{---} \bullet \quad \underline{U}_H(\omega) = \frac{\hat{U}}{j\omega} \quad (\text{ohne } \delta(\omega))$$

Unter Berücksichtigung des Verschiebungssatzes ergibt sich damit für das Spektrum der „Erregung“:

$$\underline{U}(\omega) = \frac{1}{2j} \cdot \frac{\hat{U}}{j} \cdot \left(\frac{e^{j\varphi}}{\omega - \Omega} - \frac{e^{-j\varphi}}{\omega + \Omega} \right)$$

Das Spektrum des Stromes („Antwort“) lautet:

$$\begin{aligned} \underline{I}(\omega) &= \frac{\underline{U}(\omega)}{\underline{Z}(\omega)} = \frac{\underline{U}(\omega)}{R + j\omega L} \\ &= \frac{1}{2j} \cdot \frac{\hat{U}}{j} \cdot \frac{1}{jL} \cdot \left(\frac{e^{j\varphi}}{(\omega - \Omega) \cdot \left(\omega - j\frac{R}{L}\right)} - \frac{e^{-j\varphi}}{(\omega + \Omega) \cdot \left(\omega - j\frac{R}{L}\right)} \right) \end{aligned}$$

Nun wird die Rücktransformation durchgeführt, um den Zeitverlauf der „Antwort“ zu erhalten:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \underline{I}(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega \\ &= \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{jL} \cdot \frac{\hat{U}}{2\pi j} \cdot \left(e^{j\varphi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} \cdot d\omega}{(\omega - \Omega) \cdot \left(\omega - j\frac{R}{L}\right)} - e^{-j\varphi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} \cdot d\omega}{(\omega + \Omega) \cdot \left(\omega - j\frac{R}{L}\right)} \right) \\ &= \frac{1}{2j} \cdot \frac{1}{jL} \cdot \frac{\hat{U}}{2\pi j} \cdot \left(e^{j\varphi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} \cdot d\omega}{(\omega - \underline{\omega}_{a1}) \cdot (\omega - \underline{\omega}_{a2})} - e^{-j\varphi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} \cdot d\omega}{(\omega - \underline{\omega}_{b1}) \cdot (\omega - \underline{\omega}_{b2})} \right) \end{aligned}$$

mit: $\underline{\omega}_{a1} = \Omega$
 $\underline{\omega}_{b1} = -\Omega$
 $\underline{\omega}_{a2} = \underline{\omega}_{b2} = j\frac{R}{L}$

Mit der bereits bekannten Rücktransformationsformel

$$\frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} \cdot d\omega}{(\omega - \underline{\omega}_1) \cdot (\omega - \underline{\omega}_2)} = \begin{cases} 0 & \text{für: } t < 0 \\ \frac{e^{j\underline{\omega}_1 t} - e^{j\underline{\omega}_2 t}}{\underline{\omega}_1 - \underline{\omega}_2} & \text{für: } t > 0 \end{cases}$$

erhält man

$$i(t) = 0 \quad \text{für: } t < 0$$

und für $t > 0$:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{2j} \cdot \frac{\hat{U}}{jL} \cdot \left(e^{j\varphi} \cdot \frac{e^{j\Omega t} - e^{-\frac{R}{L}t}}{\Omega - j\frac{R}{L}} - e^{-j\varphi} \cdot \frac{e^{-j\Omega t} - e^{-\frac{R}{L}t}}{-\Omega - j\frac{R}{L}} \right) \\ &= \frac{\hat{U}}{2j} \cdot \left(e^{j\varphi} \cdot \frac{e^{j\Omega t} - e^{-\frac{R}{L}t}}{R + j\Omega L} - e^{-j\varphi} \cdot \frac{e^{-j\Omega t} - e^{-\frac{R}{L}t}}{R - j\Omega L} \right) = \dots \end{aligned}$$

mit: $R + j\Omega L = \underline{Z} = Z \cdot e^{j\varphi Z}$
 $R - j\Omega L = \underline{Z}^* = Z \cdot e^{-j\varphi Z}$

$$\begin{aligned}
 i(t) &= \frac{\hat{U}}{Z} \cdot \frac{1}{2j} \cdot \left(e^{j(\varphi-\varphi_Z)} \cdot \left(e^{j\Omega t} - e^{-\frac{R}{L}t} \right) - e^{-j(\varphi-\varphi_Z)} \cdot \left(e^{-j\Omega t} - e^{-\frac{R}{L}t} \right) \right) \\
 &= \frac{\hat{U}}{Z} \cdot \frac{1}{2j} \cdot \left(\left(e^{j(\Omega t + \varphi - \varphi_Z)} - e^{-j(\Omega t + \varphi - \varphi_Z)} \right) - e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \left(e^{j(\varphi - \varphi_Z)} - e^{-j(\varphi - \varphi_Z)} \right) \right) \\
 &= \frac{\hat{U}}{Z} \cdot \left(\sin(\Omega t + \varphi - \varphi_Z) - e^{-\frac{R}{L}t} \cdot \sin(\varphi - \varphi_Z) \right)
 \end{aligned}$$

Man erhält selbstverständlich dasselbe Ergebnis wie mit der Lösung durch Differentialgleichung.

Anmerkung:

Die Differentialgleichung führt hier scheinbar rascher zum Ziel. Die Schwierigkeit bei der Fouriermethode liegt aber nicht an der Methode, sondern an der Umrechnung nach der Rücktransformation. Wenn man gute Tabellen hat, geht's oft mit der Fouriermethode schneller. Das hängt auch sehr vom behandelten Fall ab. Der Vorteil der Fouriermethode ist die komplexe Berechnung des Übertragungsfaktors.

Einschalten einer Wechselspannung am Serienresonanzkreis

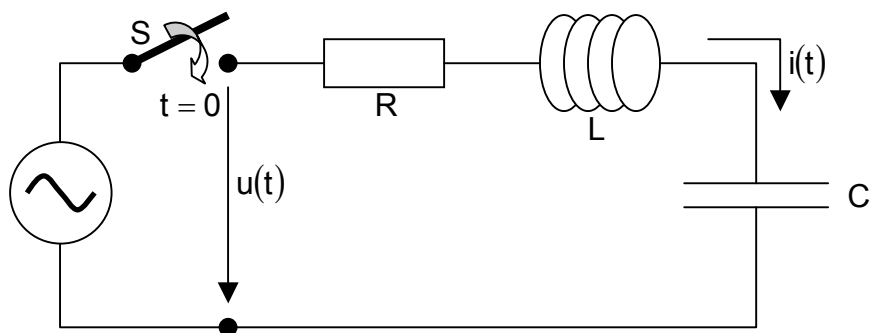
Dieses Beispiel soll im Rahmen dieser Vorlesung nur mit der Differentialgleichungsmethode untersucht werden.

Gegeben: R, L, C und

Erregung: $u(t) = \hat{U} \cdot \sin(\Omega t + \varphi)$ für $t > 0$

Alle Speicher leer für $t < 0$! (bzw. Inhalte gegeben)

Gesucht: $i(t)$ für $t > 0$



Zunächst muß die Differentialgleichung (für $t > 0$) für die gesuchte Größe aufgestellt werden:

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

$$\text{mit: } u_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \quad \text{bzw.} \quad u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) \cdot dt$$

Um das Integral zu vermeiden wird als gesuchte Zeitfunktion anstelle von $i(t)$ die Ladung $q(t)$ auf C eingeführt:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

Für die Einzelspannungen an den Bauelementen erhält man damit:

$$u_R(t) = R \cdot \frac{dq(t)}{dt}$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{d^2q(t)}{dt^2}$$

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Es ergibt sich somit eine inhomogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten für den Zeitverlauf der Ladung:

$$L \cdot \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q(t) = u(t) \quad \text{für } t > 0$$

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \cdot q(t) = \frac{1}{L} \cdot u(t)$$

Es ist sinnvoll, folgende Abkürzungen einzuführen:

$$\frac{1}{LC} = \omega_0^2$$

$$\frac{R}{L} = 2\alpha \quad \left(\alpha = \frac{R}{2L} \right)$$

Mit diesen Abkürzungen lautet die vorherige Differentialgleichung:

$$\frac{d^2q_f(t)}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{dq_f(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot q_f(t) = \frac{1}{L} \cdot u(t)$$

Zur Lösung dieser Differentialgleichung wird nun wieder das übliche Verfahren verwendet:

$$q(t) = q_f(t) + q_{st}(t)$$

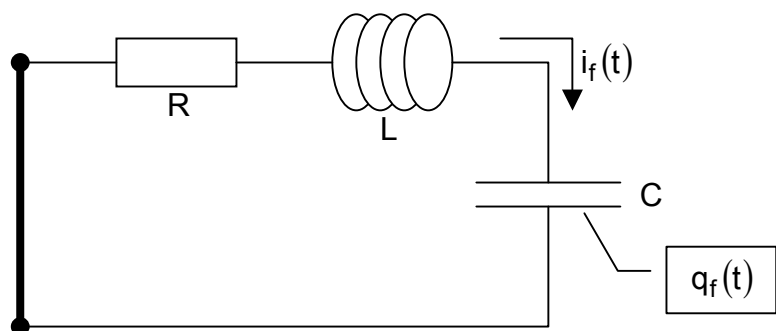
(1) Lösung der verkürzten Gleichung, freie Schwingung

Zunächst wird die verkürzte Gleichung (homogene Differentialgleichung) betrachtet:

$$\frac{d^2q_f(t)}{dt^2} + 2\alpha \cdot \frac{dq_f(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot q_f(t) = 0$$

Dies bedeutet physikalisch:

$$u(t) = 0$$



Anmerkung:

Damit dieser Kurzschlussfall betrachtet werden kann müssen natürlich $W_L = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$ und $W_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_f^2}{C}$ für $t = 0$ vorgegeben werden (2 Anfangsbedingungen).

Es wird der Lösungsansatz

$$q_f(t) = Q_f \cdot e^{\lambda t}$$

gewählt, der eingesetzt in die Differentialgleichung, zu der folgenden „charakteristischen Gleichung“ führt:

$$\lambda^2 \cdot Q_f \cdot e^{\lambda t} + 2\alpha \cdot \lambda \cdot Q_f \cdot e^{\lambda t} + \omega_0^2 \cdot Q_f \cdot e^{\lambda t} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 2\alpha \cdot \lambda + \omega_0^2 = 0$$

Es gibt 2 Lösungen für λ

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

also auch 2 Lösungen, welche die homogene Differentialgleichung befriedigen:

$$q_{f1}(t) = Q_{f1} \cdot e^{\lambda_1 t}$$

$$q_{f2}(t) = Q_{f2} \cdot e^{\lambda_2 t}$$

Wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ist, dann sind die beiden Lösungen linear unabhängig, d.h. $q_{f1}(t)$ nicht proportional zu $q_{f2}(t)$. Die Mathematik lehrt, dass dann die allgemeine Lösung der verkürzten Gleichung lautet:

$$q_f(t) = q_{f1}(t) + q_{f2}(t) = Q_{f1} \cdot e^{\lambda_1 t} + Q_{f2} \cdot e^{\lambda_2 t}$$

Die Konstanten Q_{f1} und Q_{f2} müssen nun aus den Anfangsbedingungen für $t = 0$ bestimmt werden.

Es sei $i(t = 0) = 0$ ist und der Kondensator trage zur Zeit $t = 0$ (vor dem Kurzschluß) die Ladung Q_0 , also:

$$t = 0: \quad q_f(t = 0) = Q_0 \quad (\text{d.h. } W_C(t = 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_0^2}{C})$$

$$i_f(t = 0) = 0 \quad (\text{d.h. } W_L(t = 0) = 0)$$

Diese beiden Anfangsbedingungen eingesetzt in die allgemeine Lösung für die homogene Differentialgleichung liefert 2 Gleichungen, aus denen die beiden Konstanten Q_{f1} und Q_{f2} bestimmt werden können:

$$Q_0 = q_f(t = 0) = Q_{f1} + Q_{f2} \quad (\text{Gl.1})$$

$$i_f(t) = \frac{dq_f(t)}{dt} = \lambda_1 \cdot Q_{f1} \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \cdot Q_{f2} \cdot e^{\lambda_2 t}$$

$$i_f(t = 0) = \lambda_1 \cdot Q_{f1} + \lambda_2 \cdot Q_{f2} \quad (\text{Gl.2})$$

$$\lambda_1 \cdot Q_{f1} + \lambda_2 \cdot (Q_0 - Q_{f1}) = 0$$

$$Q_{f1} \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) = -\lambda_2 \cdot Q_0$$

$$\Rightarrow Q_{f1} = \frac{-\lambda_2 \cdot Q_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

$$Q_{f2} = -Q_{f1} \cdot \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1 \cdot Q_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

Damit erhält man folgende Lösungen:

Ladung: $q_f(t) = \frac{Q_0}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot (-\lambda_2 \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_1 \cdot e^{\lambda_2 t})$

Strom: $i_f(t) = \frac{dq_f(t)}{dt} = \frac{Q_0 \cdot \lambda_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot (-e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t})$

Nun können aber nach der charakteristischen Gleichung die λ entweder reell ($\sqrt{\dots}$ reell oder 0) oder komplex ($\sqrt{\dots}$ imaginär) sein. Es sollen hier beide Fälle (ohne den aperiodischen Grenzfall, $\sqrt{\dots} = 0$) untersucht werden.

(a) „Aperiodischer Fall“:

Die beiden Lösungen der charakteristischen Gleichung $\lambda_{1,2}$ sind reell, d.h. $\sqrt{\dots}$ reell.

In diesem Fall gilt:

$$\alpha > \omega_0$$

$$\rightarrow \frac{R}{2L} > \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\rightarrow \text{Güte } G = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} < \frac{1}{2}$$

λ_1 und λ_2 sind reell und < 0 ; die Lösung setzt sich zusammen aus 2 mit unterschiedlichen Zeitkonstanten abklingenden Exponentialfunktionen.

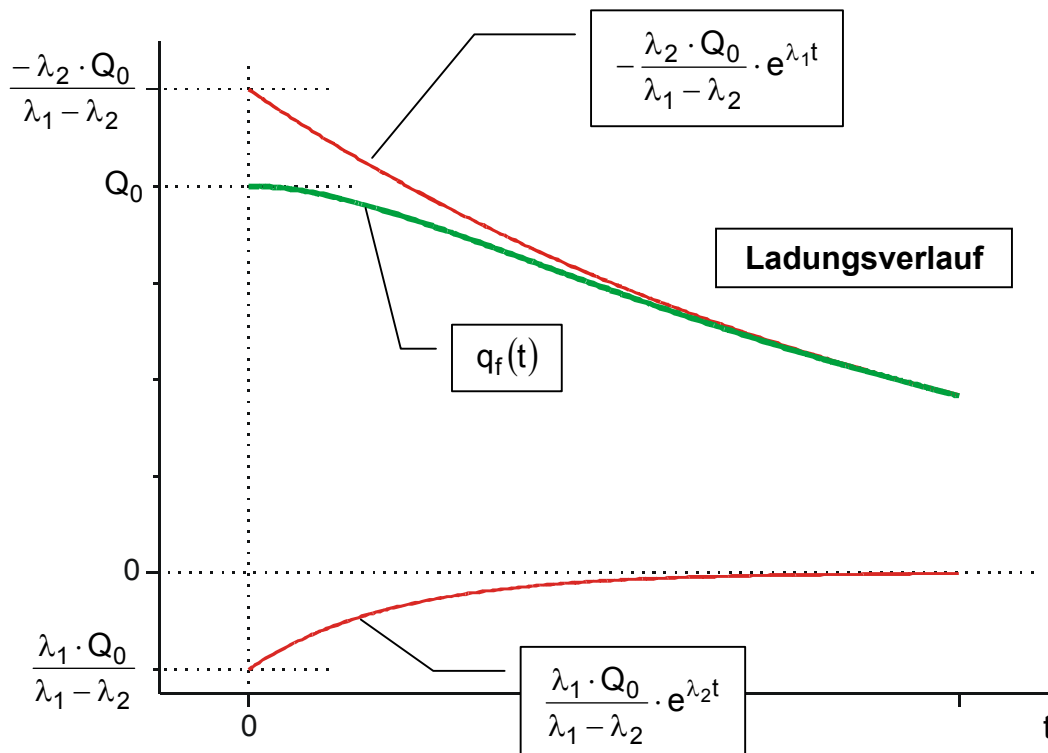
Außerdem gilt:

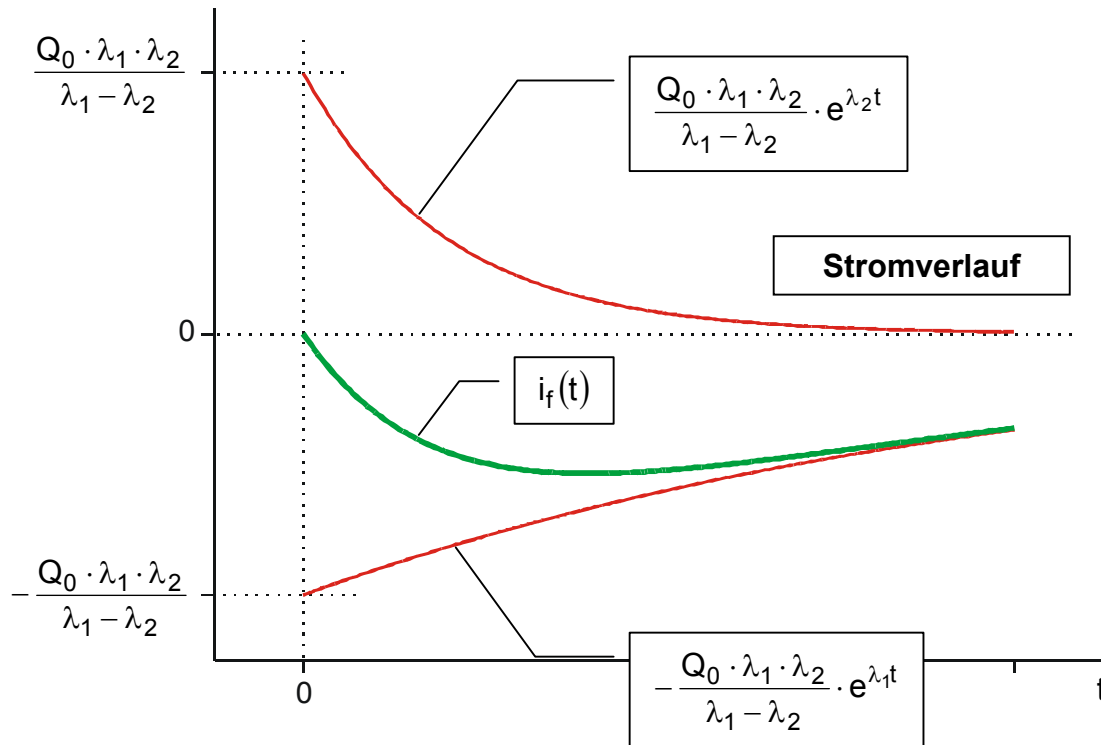
$$|\lambda_2| > |\lambda_1|$$

$$\rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 > 0$$

$$\rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$$

In nachfolgenden Darstellungen sind Ladungs- und Stromverlauf für $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 5$ dargestellt.





(b) „Periodische Entladung“:

Die beiden Lösungen der charakteristischen Gleichung $\lambda_{1,2}$ sind komplex, d.h. $\sqrt{\dots}$ imaginär.

In diesem Fall gilt:

$$\text{Güte } G > \frac{1}{2}$$

$$\omega_0^2 > \alpha^2$$

Für $\lambda_{1,2}$ wird gesetzt:

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j \cdot \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j \cdot \omega_E$$

$$\text{mit: } \omega_E = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \quad (\text{„Eigenfrequenz“})$$

Damit erhält man:

$$\lambda_1 = -\alpha + j \cdot \omega_E$$

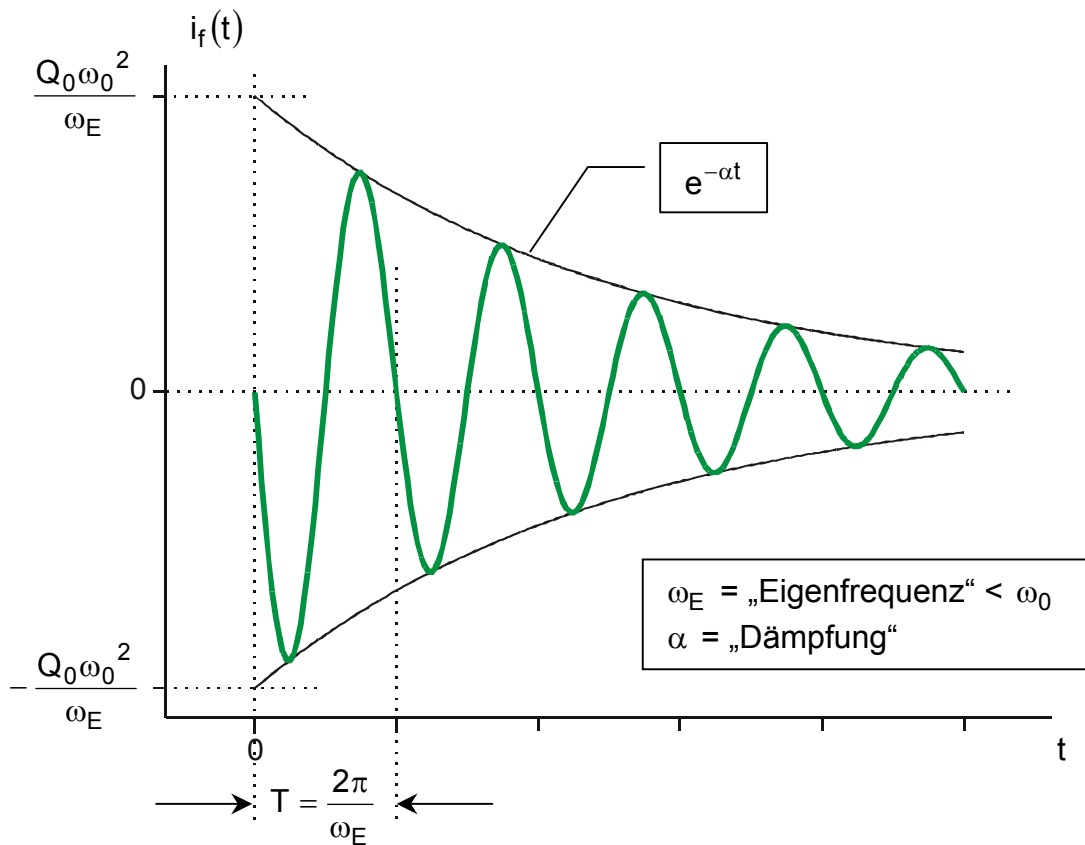
$$\lambda_2 = -\alpha - j \cdot \omega_E$$

$$\rightarrow \lambda_1 - \lambda_2 = 2j\omega_E$$

$$\rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \alpha^2 + \omega_E^2 = \omega_0^2$$

Für den Zeitverlauf des Stroms $i_f(t)$ ergibt sich also:

$$\begin{aligned} i_f(t) &= \frac{Q_0 \omega_0^2}{2j\omega_E} \cdot e^{-\alpha t} \cdot (-e^{j\omega_E t} + e^{-j\omega_E t}) \\ &= -\frac{Q_0 \omega_0^2}{\omega_E} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \sin(\omega_E t) \end{aligned}$$



Der Zeitverlauf des Stroms ist eine gedämpfte Schwingung, wobei der Serienresonanzkreis mit seiner „Eigenfrequenz“ ω_E ausschwingt. Bzgl. Eigenfrequenz und Resonanzfrequenz des Kreises gilt: $\omega_E < \omega_0$. Nur im dämpfungsfreien Fall ($\alpha = 0$, d.h. $R = 0$) ist $\omega_E = \omega_0$. (Die „Resonanzfrequenz“ ω_0 war auch dadurch definiert, daß im stationären Fall Strom und Spannung in Phase sind.)

(2) Lösung der erweiterten Gleichung, erzwungene Schwingung

Die Lösung der erweiterten Gleichung (inhomogene Differentialgleichung) setzt sich zusammen aus der freien Schwingung und der erzwungenen Schwingung

$$q(t) = q_f(t) + q_{st}(t)$$

wobei der Lösungsansatz für die freie Schwingung

$$q_f(t) = Q_{f1} \cdot e^{\lambda_1 t} + Q_{f2} \cdot e^{\lambda_2 t}$$

gültig bleibt. Selbstverständlich müssen jetzt die Konstanten Q_{f1} und Q_{f2} neu bestimmt werden. (Man muß immer erst die Differentialgleichung, die man braucht, ganz lösen und dann aus den Anfangsbedingungen die Konstanten bestimmen.)

Es wird also zunächst die partikuläre Lösung der erweiterten Gleichung benötigt. Hierfür wird natürlich wieder die wohlbekannt Lösung für den stationären Fall benutzt:

$$i_{st}(t) = \frac{\hat{U}}{Z} \cdot \sin(\Omega t + \varphi - \varphi_Z)$$

mit (vgl. 2. Trimester):

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}$$

$$\tan(\varphi_Z) = \frac{\Omega L - \frac{1}{\Omega C}}{R}$$

Wegen $i_{st}(t) = \frac{dq_{st}(t)}{dt}$ gilt:

$$q_{st}(t) = -\frac{\hat{U}}{\Omega Z} \cdot \cos(\Omega t + \varphi - \varphi_Z)$$

Damit erhält man als gesamte Lösung (allgemeine Lösung der erweiterten Gleichung):

$$q(t) = Q_{f1} \cdot e^{\lambda_1 t} + Q_{f2} \cdot e^{\lambda_2 t} - \frac{\hat{U}}{\Omega Z} \cdot \cos(\Omega t + \varphi - \varphi_Z)$$

$$i(t) = \lambda_1 \cdot Q_{f1} \cdot e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 \cdot Q_{f2} \cdot e^{\lambda_2 t} + \frac{\hat{U}}{Z} \cdot \sin(\Omega t + \varphi - \varphi_Z)$$

Erst jetzt kommen die Anfangsbedingungen ins Spiel. Sie lauten hier z.B. (im Gegensatz zu vorher)

$$q(t=0) = 0$$

$$i(t=0) = 0$$

d.h. beide Energiespeicher sind leer beim Einschalten. (Das ist nicht zwingend notwendig, aber es erleichtert die Rechnung.)

Mit Hilfe dieser beiden Anfangsbedingungen lassen sich nun 2 Gleichungen aufstellen

$$Q_{f1} + Q_{f2} = \frac{\hat{U}}{\Omega Z} \cdot \cos(\varphi - \varphi_Z)$$

$$\lambda_1 \cdot Q_{f1} + \lambda_2 \cdot Q_{f2} = -\frac{\hat{U}}{Z} \cdot \sin(\varphi - \varphi_Z)$$

aus denen die beiden Konstanten Q_{f1} und Q_{f2} bestimmt werden:

$$\Rightarrow Q_{f1} = \frac{-1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \frac{\hat{U}}{Z} \cdot \left(\sin(\varphi - \varphi_Z) + \frac{\lambda_2}{\Omega} \cdot \cos(\varphi - \varphi_Z) \right)$$

$$Q_{f2} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \frac{\hat{U}}{Z} \cdot \left(\sin(\varphi - \varphi_Z) + \frac{\lambda_1}{\Omega} \cdot \cos(\varphi - \varphi_Z) \right)$$

Diese beiden Konstanten sind nun in die allgemeine Lösung der erweiterten Gleichung (Ladung oder Strom) einzusetzen.

Im weiteren soll nur die periodische Lösung für den Strom untersucht werden. In diesem Fall gilt (wie vorher):

$$\text{Güte } G > \frac{1}{2}$$

$$\lambda_1 - \lambda_2 = 2j\omega_E$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \omega_0^2$$

Der Zeitverlauf des Stromes lautet also:

$$i(t) = \frac{\hat{U}}{Z} \cdot \frac{1}{2j\omega_E} \cdot \left(-\lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \left(\sin(\varphi - \varphi_Z) + \frac{\lambda_2}{\Omega} \cdot \cos(\varphi - \varphi_Z) \right) + \right. \\ \left. + \lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \left(\sin(\varphi - \varphi_Z) + \frac{\lambda_1}{\Omega} \cdot \cos(\varphi - \varphi_Z) \right) \right) + \\ + \frac{\hat{U}}{Z} \cdot \underbrace{\sin(\Omega t + \varphi - \varphi_Z)}_{i_{st}}$$

mit: $\lambda_1 = -\alpha + j\omega_E$
 $\lambda_2 = -\alpha - j\omega_E$

Nach geeigneter Umformung

$$i(t) = \frac{\hat{U}}{Z} \cdot \frac{1}{2j\omega_E} \cdot \frac{1}{\Omega} \cdot \cos(\varphi - \varphi_Z) \cdot \omega_0^2 \cdot (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}) + \\ + \frac{\hat{U}}{Z} \cdot \frac{1}{2j\omega_E} \cdot \sin(\varphi - \varphi_Z) \cdot (\lambda_2 \cdot e^{\lambda_2 t} - \lambda_1 \cdot e^{\lambda_1 t}) + \\ + i_{st}$$

$$= \frac{\hat{U}}{Z \cdot 2j\omega_E} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \left(\frac{\omega_0^2}{\Omega} \cdot \cos(\varphi - \varphi_Z) \cdot (-2j \cdot \sin(\omega_E t)) + \right. \\ \left. + \sin(\varphi - \varphi_Z) \cdot ((-\alpha - j\omega_E) \cdot e^{-j\omega_E t} - (-\alpha + j\omega_E) \cdot e^{j\omega_E t}) \right) + \\ + i_{st}$$

gelangt man schließlich zu nachfolgender Darstellung:

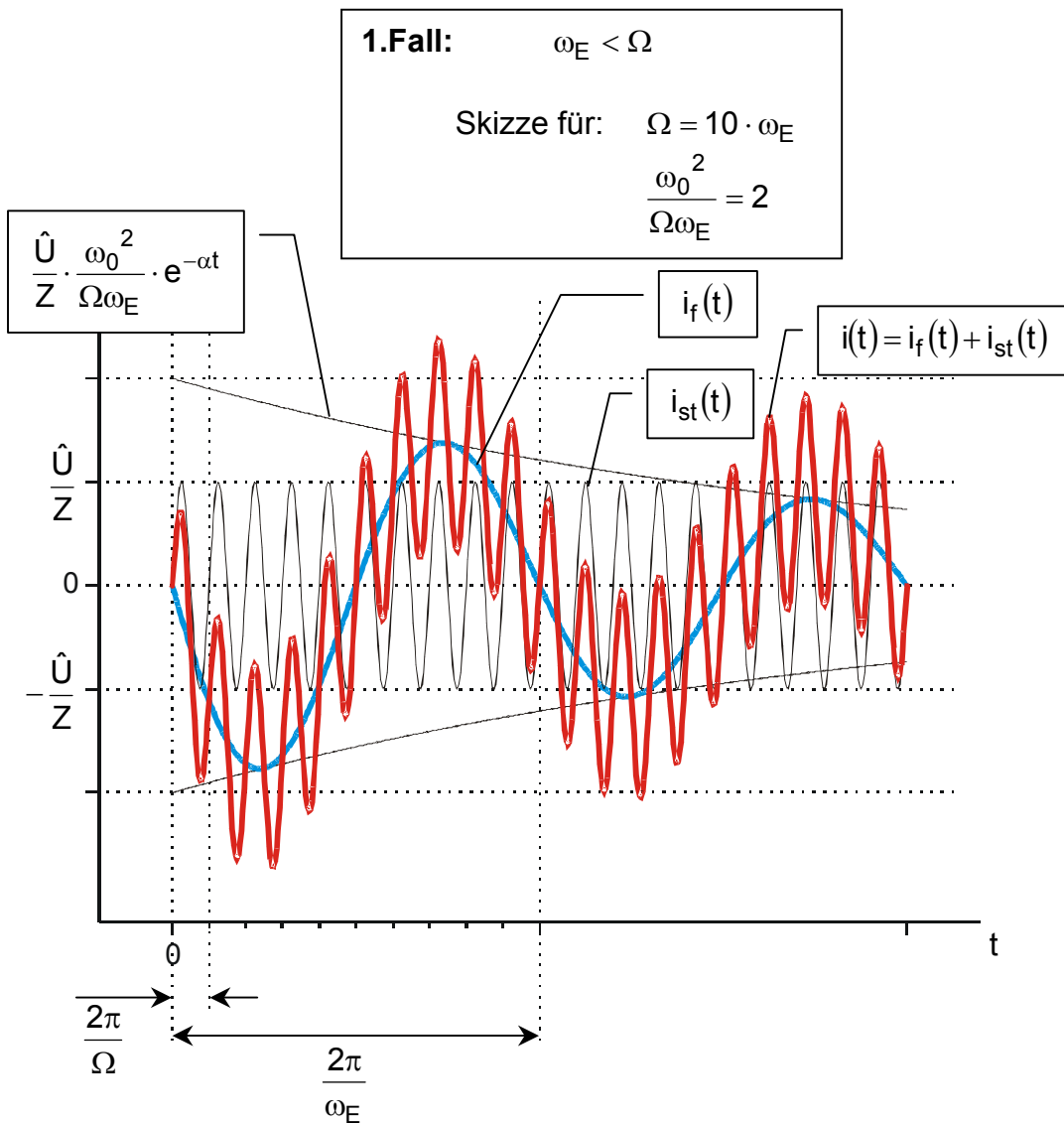
$$i(t) = \frac{\hat{U}}{Z} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \left(\left(\frac{\alpha}{\omega_E} \cdot \sin(\varphi - \varphi_Z) - \frac{\omega_0^2}{\Omega \cdot \omega_E} \cdot \cos(\varphi - \varphi_Z) \right) \cdot \sin(\omega_E t) - \right. \\ \left. - \sin(\varphi - \varphi_Z) \cdot \cos(\omega_E t) \right) + \\ + \frac{\hat{U}}{Z} \cdot \underbrace{\sin(\Omega t + \varphi - \varphi_Z)}_{\text{"erzwungen"}}$$

Der zeitliche Verlauf des Stromes setzt sich also zusammen aus

- einer freien Schwingung mit der Frequenz ω_E („Eigenfrequenz“ des Resonanzkreises), die mit $e^{-\alpha t}$ abklingt (α und ω_E von der Schaltung her bestimmt) und
- einer stationären („erzwungenen“) Schwingung, deren Frequenz Ω von der angelegten Spannung herrührt (Phasenverschiebung φ_Z zwischen $i_{st}(t)$ und $u(t)$ von der Schaltung her bestimmt).

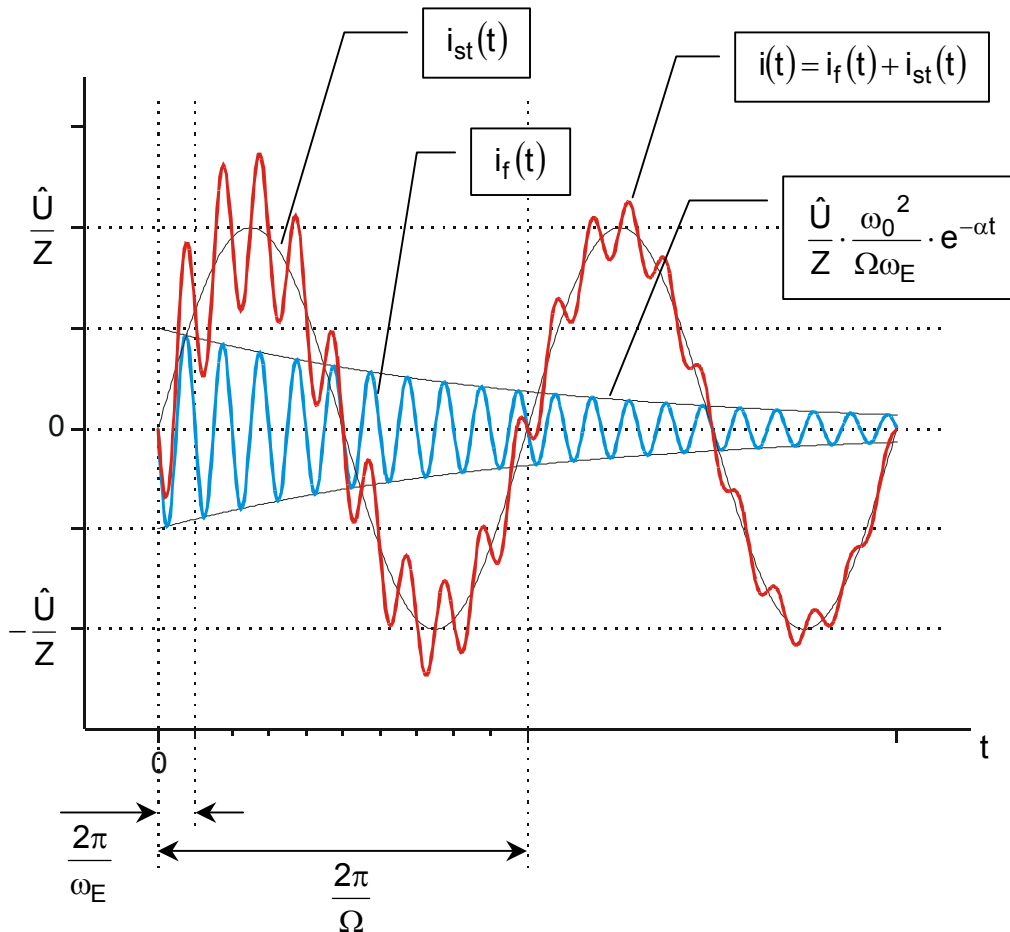
Für die nachfolgende grafische Diskussion des Ergebnisses wird der Einfachheit halber $\varphi = \varphi_Z$ (d.h. Einschalten im Nulldurchgang von i_{st}) gesetzt. Der zeitliche Verlauf des Stromes lautet für diesen Spezialfall:

$$i(t)_{\varphi=\varphi_Z} = \frac{\hat{U}}{Z} \cdot \left(-e^{-\alpha t} \cdot \frac{\omega_0^2}{\Omega\omega_E} \cdot \sin(\omega_E t) + \sin(\Omega t) \right)$$



2.Fall: $\omega_E > \Omega$

Skizze für: $\Omega = \frac{1}{10} \cdot \omega_E$
 $\frac{\omega_0^2}{\Omega\omega_E} = \frac{1}{2}$



Ein weiterer interessanter Spezialfall ist der „Resonanzfall“ $\Omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Hier gilt:

$$Z = R$$

$$\varphi_Z = 0$$

Damit ergibt sich für den Strom:

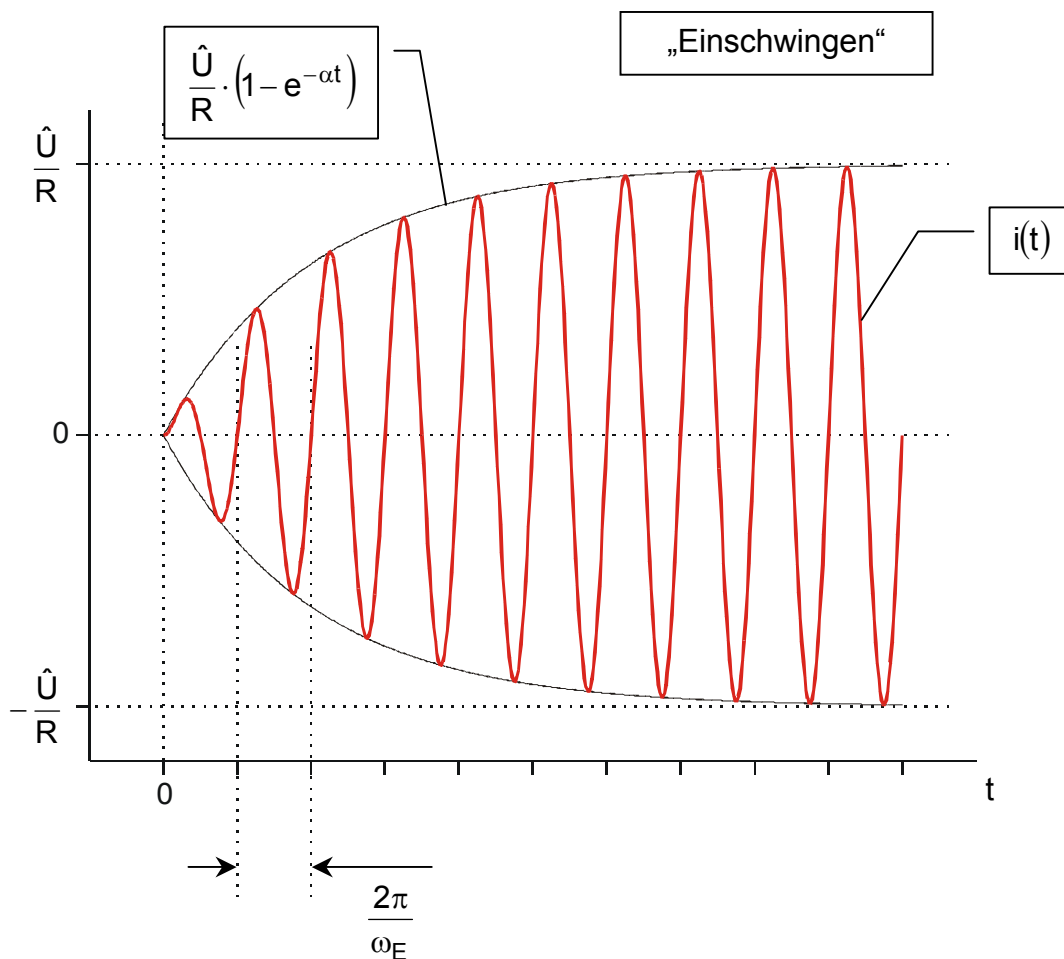
$$i(t) = \frac{\hat{U}}{R} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \left(\left(\frac{\alpha}{\omega_E} \cdot \sin(\varphi) - \frac{\omega_0}{\omega_E} \cdot \cos(\varphi) \right) \cdot \sin(\omega_E t) - \sin(\varphi) \cdot \cos(\omega_E t) \right) + \frac{\hat{U}}{R} \cdot \sin(\Omega t + \varphi)$$

Nun sei ferner $\alpha \ll \omega_E$ (kleine Dämpfung), also $\Omega = \omega_0 \cong \omega_E$, dann gilt:

$$i(t) = \frac{\hat{U}}{R} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \left(\underbrace{\frac{\alpha}{\omega_E} \cdot \sin(\varphi)}_{\ll 1} - \underbrace{\frac{\omega_0}{\omega_E} \cdot \cos(\varphi)}_{\cong 1} \right) \cdot \sin(\omega_E t) - \sin(\varphi) \cdot \cos(\omega_E t) + \frac{\hat{U}}{R} \cdot \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$i(t) = \frac{\hat{U}}{R} \cdot e^{-\alpha t} \cdot \left(\underbrace{-\cos(\varphi) \cdot \sin(\omega_E t) - \sin(\varphi) \cdot \cos(\omega_E t)}_{-\sin(\omega_E t + \varphi)} \right) + \frac{\hat{U}}{R} \cdot \sin(\underbrace{\Omega t}_{=\omega_E t} + \varphi)$$

$$= \frac{\hat{U}}{R} \cdot (1 - e^{-\alpha t}) \cdot \sin(\omega_E t + \varphi)$$



Für diesen Spezialfall des Stromverlaufs ergeben sich die folgenden Kenndaten:

Zeitkonstante: $T = \frac{1}{\alpha} = \frac{2L}{R}$

Güte: $G = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R}$

Halbwertsverstimmung: $v_H = \frac{1}{G} = \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$

Absolute Bandbreite: $b = \omega(v = +v_H) - \omega(v = -v_H) = \omega_0 v_H$
 $\rightarrow b = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \frac{R}{\sqrt{\frac{L}{C}}} = \frac{R}{L} = 2\alpha = \frac{2}{T}$

$\Rightarrow b \cdot T = \text{konstant}$
 („Gute“ Kreise haben lange Einschwingzeitkonstanten und umgekehrt.)

Was passiert schließlich für $R \rightarrow 0$, d.h. $\alpha \rightarrow 0$?

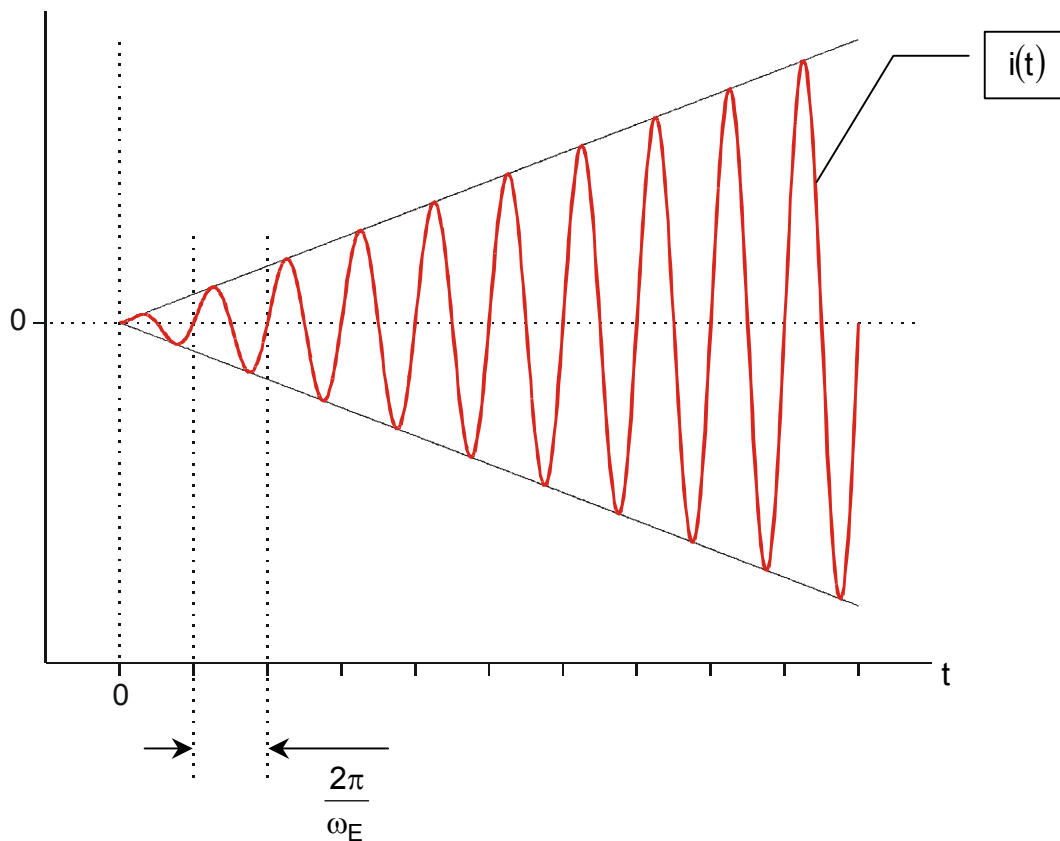
Berücksichtigt man aus der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion

$$e^{-\alpha t} = 1 - \alpha t + \dots$$

nur die beiden ersten Glieder, so erhält man für den Zeitverlauf des Stroms:

$$i(t) = \frac{\hat{U}}{R} \cdot \alpha t \cdot \sin(\omega_E t + \varphi) = \frac{\hat{U}}{2L} \cdot t \cdot \sin(\omega_E t + \varphi)$$

Im Anfang der e-Funktion,
 d.h. solange αt noch klein!
 „Resonanzkatastrophe“



Abschaltvorgang

Beispiel: Entladung eines Kondensators, behandelt mit

1. Differentialgleichung,
2. Fourier-Methode.

Ein Kondensator sei für $t \leq 0$ auf $q = Q_0 = C \cdot U_0$ aufgeladen. Zur Zeit $t = 0$ wird über den Widerstand R kurzgeschlossen. Gesucht ist der Stromverlauf.

1. Lösung mit Differentialgleichung

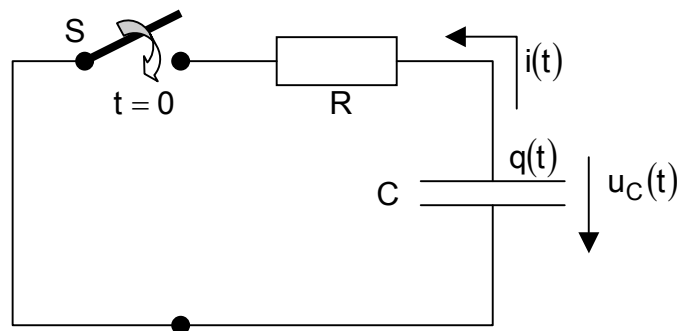
$t \geq 0$ interessant

Anfangsbedingung:

$$q(t=0) = Q_0 = C \cdot U_0$$

$$i(t=0) = \frac{U_0}{R}$$

(Strom durch Kondensator darf springen!)



für $t \geq 0$ gilt:

$$-i(t) \cdot R + u_C(t) = 0$$

$$\text{mit: } i(t) = -\frac{dq(t)}{dt}$$

$$u_C(t) = \frac{q}{C}$$

$$\rightarrow R \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot q(t) = 0$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot q(t)$$

$$\rightarrow q(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

Anfangsbedingung:

$$q(t=0) = Q_0 = A$$

$$\rightarrow q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$i(t) = -\frac{dq(t)}{dt} = \frac{Q_0}{RC} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

oder auch

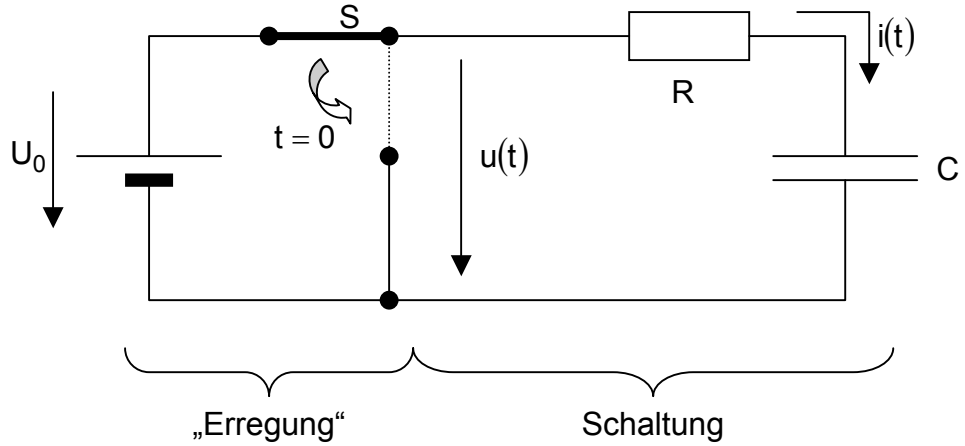
$$u_C(t) = u_R(t) = \frac{q(t)}{C} = R \cdot i(t)$$

$$\rightarrow i(t) = \frac{q(t)}{RC} = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

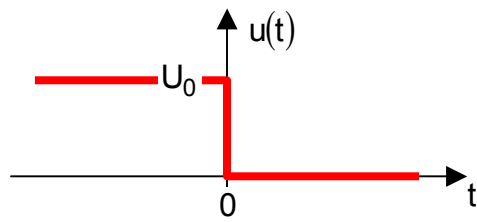
„Vorgeschichte“ ist hier durch die Anfangsbedingung(en) berücksichtigt.

1. Lösung mit Fourier-Transformation (zweiseitig)

Hier muß die Vorgeschichte durch die Form der Erregung (gesamter Zeitbereich $-\infty < t < \infty$) berücksichtigt werden. Für negative Zeiten liegt U_0 an, dann wird Kurzschluß aufgeprägt:



(Man beachte: Der Zählpfeil für $i(t)$ ist gegenüber 1) in der Schaltung anders herum eingezeichnet!)

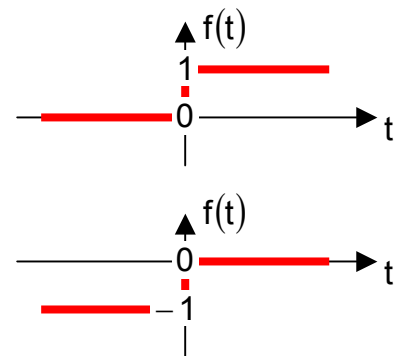
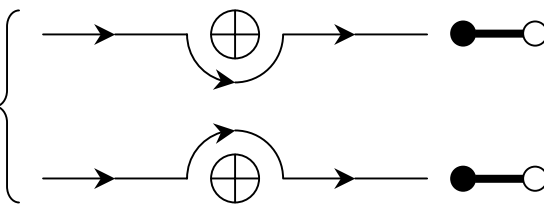


$$u(t) = \begin{cases} U_0 & \text{für: } t < 0 \\ 0 & \text{für: } t > 0 \end{cases}$$

Wie lautet das Spektrum $\underline{U}(\omega)$ dieser Erregung $u(t)$?

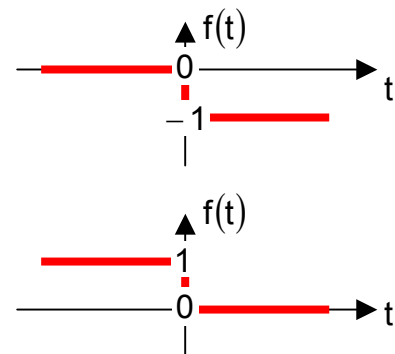
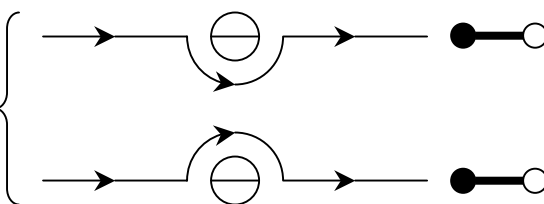
Erinnerung an Sprungfunktionen:

$$\underline{F}(\omega) = \frac{1}{j\omega}$$



Mit umgekehrtem Vorzeichen:

$$\underline{F}(\omega) = -\frac{1}{j\omega}$$



Für die vorliegende Aufgabenstellung wird der 4.Fall benutzt, d.h.

$$\underline{U}(\omega) = -\frac{U_0}{j\omega} \quad (\text{dieser Pol ist zur unteren Halbebene zu rechnen})$$

Damit ergibt sich sofort:

$$\underline{I}(\omega) = \frac{\underline{U}(\omega)}{\underline{Z}(\omega)} = -\frac{U_0}{j\omega} \cdot \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}}$$

$$\begin{aligned} \underline{I}(\omega) &= \dots = -\frac{U_0}{j\omega} \cdot \frac{j\omega C}{1 + j\omega CR} = -\frac{U_0}{j\omega} \cdot \frac{\omega \cdot \frac{1}{R}}{\omega - j \cdot \frac{1}{RC}} \\ &= -\frac{U_0}{jR} \cdot \frac{1}{\omega - \underline{\omega}_v} \end{aligned}$$

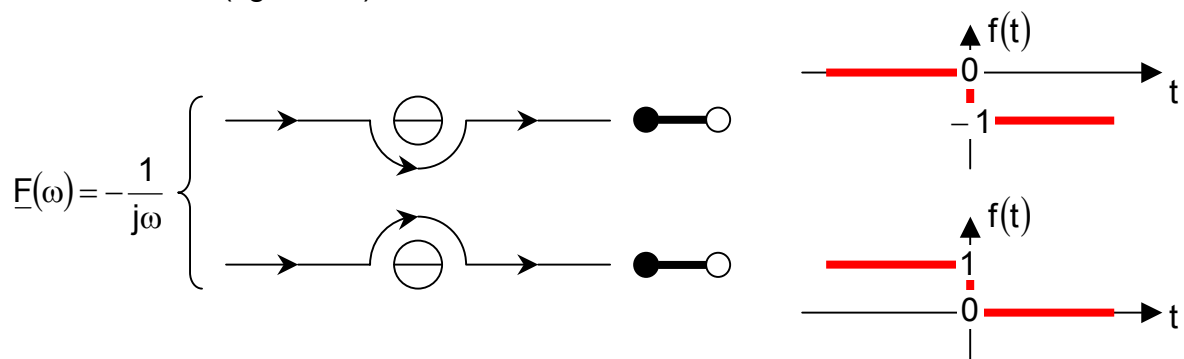
mit: $\underline{\omega}_v = j\alpha = j \cdot \frac{1}{RC}$

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \underline{I}(\omega) \cdot e^{j\omega t} \cdot d\omega \\ &= -\frac{U_0}{R} \cdot \frac{1}{2\pi j} \cdot \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} \cdot d\omega}{\omega - \underline{\omega}_v} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für: } t < 0 \\ -\frac{U_0}{R} \cdot e^{j\underline{\omega}_v t} = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\alpha t} = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}} & \text{für: } t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

↑
 Minuszeichen wegen
 Zählpfeil andersherum

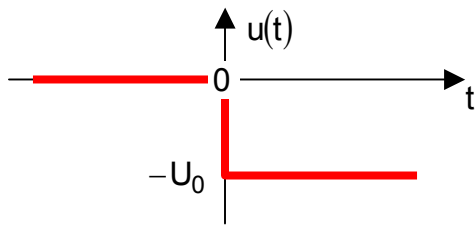
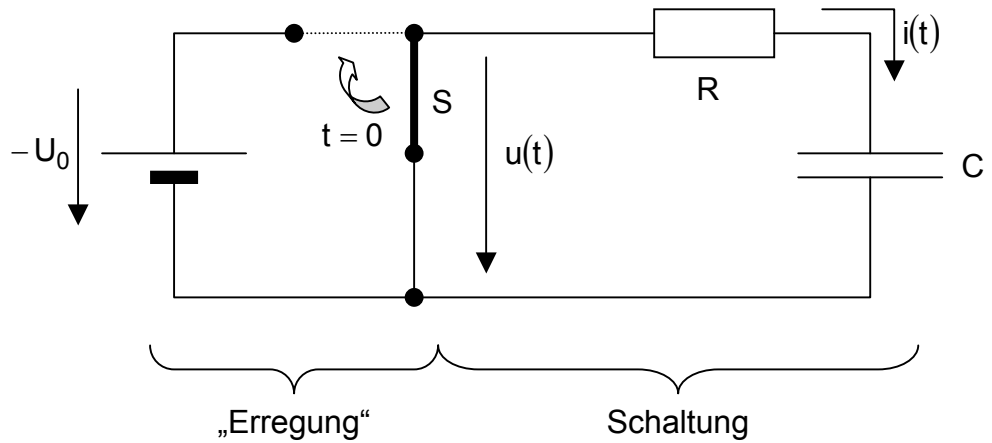
Wichtige Anmerkung:

Hier hat sich der Pol bei $\omega = 0$ herausgekürzt. Dann ist es offenbar egal, wie der Pol umfahren wird (vgl. oben).



Beide „Erregungen“ (sowohl das Abschalten einer positiven Gleichspannung U_0 als auch das Einschalten einer negativen Gleichspannung $-U_0$) müssen also zum gleichen Ergebnis führen.

Überprüfung mit DGL.:



$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für: } t < 0 \\ -U_0 & \text{für: } t > 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow q_{\text{st}} = q(t \rightarrow \infty) = -C \cdot U_0$$

$$q(t) = q_f(t) + q_{\text{st}} = A \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} - C \cdot U_0$$

$$q(t=0) = 0 \Rightarrow A = C \cdot U_0$$

$$\rightarrow q(t) = C \cdot U_0 \cdot \left(e^{-\frac{1}{RC}t} - 1 \right)$$

$$\rightarrow i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = -\frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{1}{RC}t} \quad \text{für } t > 0$$