

Daniel Duverney  
Gilles Bouton  
Pascale Bouton  
Géry Huvent

MPSI,  
MP2I, PCSI,  
PTSI, TSI

# Toutes les mathématiques

Première année  
de classes préparatoires scientifiques

3<sup>e</sup> édition



ellipses

# Chapitre 1

## Trigonométrie

Les fonctions trigonométriques sont d'une importance fondamentale. Après avoir étudié ce chapitre, vous devez :

- A.** Savoir utiliser le cercle trigonométrique.
- B.** Connaître les propriétés élémentaires des fonctions trigonométriques (valeurs usuelles, symétries, etc).
- C.** Connaître les formules d'addition et de duplication.
- D.** Savoir linéariser  $\sin^2 x$  et  $\cos^2 x$ .
- E.** Connaître l'existence des formules de transformation de sommes en produits et de produits en sommes et savoir les retrouver.

### 1.1 Cercle trigonométrique

Un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1, centré en  $O$  (figure 1.1 page suivante). Un point  $M$  de ce cercle est repéré par un nombre réel  $x$  correspondant à la longueur de l'arc  $UM$ , affectée du signe correspondant au sens positif de rotation (sens trigonométrique). *Par définition du radian*,  $x$  est la mesure en radians de l'angle de vecteurs orienté  $\theta = \widehat{(\vec{OU}, \vec{OM})}$ .

*Par définition*,  $\cos x$  est l'abscisse du point  $M$  et  $\sin x$  est son ordonnée. On définit en outre la *tangente* et la *cotangente* par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cotan x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}. \quad (1.1)$$

On peut démontrer que  $\tan x$  est l'abscisse sur l'axe vertical passant par  $U$  (axe des tangentes) du point d'intersection de la droite  $(OM)$  avec cet axe, tandis que  $\cotan x$  est l'abscisse du point d'intersection de la droite  $(OM)$  avec l'axe horizontal passant par  $V$  (axe des cotangentes).

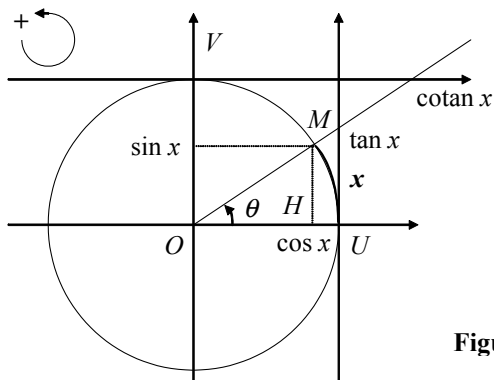


Figure 1.1

Les lignes trigonométriques de l'angle  $\theta$  sont définies par

$$\sin \theta = \sin x, \quad \cos \theta = \cos x, \quad \tan \theta = \tan x, \quad \cotan \theta = \cotan x.$$

Le théorème de Pythagore appliqué au triangle  $OMH$  montre que

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \tag{1.2}$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ . Les *valeurs usuelles* du sinus, du cosinus et de la tangente, résumées dans le tableau ci-dessous, sont à connaître. Elles se retiennent facilement en remarquant que, pour le sinus par exemple, ces valeurs sont

$$\frac{\sqrt{0}}{2}, \quad \frac{\sqrt{1}}{2}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\sqrt{4}}{2}.$$

Elles s'obtiennent à partir du cercle trigonométrique (exercice 1.1). On notera que  $\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , puisque  $2 = (\sqrt{2})^2$ .

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Non définie

Enfin, il résulte immédiatement de (1.2) que, pour tout  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \tag{1.3}$$

En effet, pour tout  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,

$$1 + \tan^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

## 1.2 Symétries dans le cercle trigonométrique

Certaines propriétés des fonctions trigonométriques résultent des symétries dans le cercle trigonométrique et se *retrouvent très rapidement* dès lors qu'on fait un petit *dessin*. La première série de formules résulte de la figure 1.2 ci-dessous. Le cercle trigonométrique ayant une circonférence de longueur  $2\pi$ , on a pour tout  $x$  réel

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x. \quad (1.4)$$

Ceci exprime que les fonctions sinus et cosinus sont *périodiques* de période  $2\pi$ . Il en est de même, bien sûr, pour la fonction tangente, mais  $2\pi$  n'est pas la plus petite période de la fonction tangente. En effet, les points repérés par  $x$  et par  $x + \pi$  sont diamétralement opposés. Donc, pour tout  $x$  réel,

$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x. \quad (1.5)$$

On en déduit que, pour tout  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $\tan(x + \pi) = \tan x$ . C'est-à-dire que *la fonction tangente est périodique de période  $\pi$* .

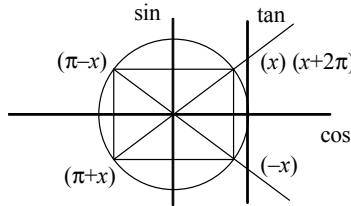


Figure 1.2

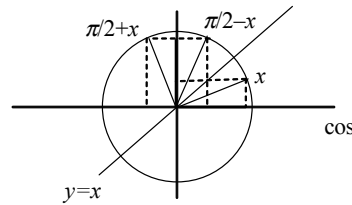


Figure 1.3

Par ailleurs, les points repérés par  $x$  et  $-x$  sont symétriques par rapport à l'axe des cosinus. Donc, pour tout  $x$  réel

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x. \quad (1.6)$$

Ainsi, pour tout  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $\tan(-x) = -\tan x$  (ce qui se voit aussi sur l'axe des tangentes). On traduit ceci en disant que les fonctions sinus et tangente sont *impaires*, tandis que la fonction cosinus est *paire*.

Enfin, les points repérés par  $x$  et  $\pi - x$  étant symétriques par rapport à l'axe des sinus, on a pour tout  $x$  réel

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \cos(\pi - x) = -\cos x. \quad (1.7)$$

Par conséquent, pour tout  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $\tan(\pi - x) = -\tan x$ .

Considérons maintenant la figure 1.3. On observe que les points repérés par  $x$  et  $\frac{\pi}{2} - x$  sont *symétriques par rapport à la première bissectrice*. Leurs sinus et cosinus sont donc échangés. Ainsi, pour tout  $x$  réel,

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x. \quad (1.8)$$

Par ailleurs, le point repéré par  $\frac{\pi}{2} + x$  s'obtient à partir du point repéré par  $x$  par la rotation de centre  $O$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ . Lors de cette rotation,  $\cos x$  devient  $\sin(x + \frac{\pi}{2})$ , tandis que  $\sin x$  devient  $-\cos(x + \frac{\pi}{2})$  [attention aux signes :  $\sin x$  est positif sur la figure, alors que  $\cos(x + \frac{\pi}{2})$  est négatif]. Donc, pour tout  $x$  réel,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x.$$

Ces formules, très importantes, se retiennent facilement si on se souvient des formules qui donnent la dérivée du sinus et du cosinus, et on a le

**Théorème 1.1** *Ajouter  $\frac{\pi}{2}$  à  $x$  dans un sinus ou un cosinus revient à le dériver, c'est-à-dire que pour tout  $x$  réel on a*

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = (\sin x)' = \cos x, \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = (\cos x)' = -\sin x.$$

### 1.3 Formules d'addition

Les formules d'addition, qui doivent être *connues parfaitement*, s'écrivent, pour tous  $a, b$  réels,

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a \\ \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \end{cases} \quad (1.9)$$

**Démonstration :** Considérons, sur le cercle trigonométrique de la figure 1.4, un arc de longueur  $a$  auquel nous ajoutons un arc de longueur  $b$ . Dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , le point  $N$  a pour coordonnées  $\cos a$  et  $\sin a$ . Donc  $\vec{u} = \vec{ON} = \cos a \vec{i} + \sin a \vec{j}$ .

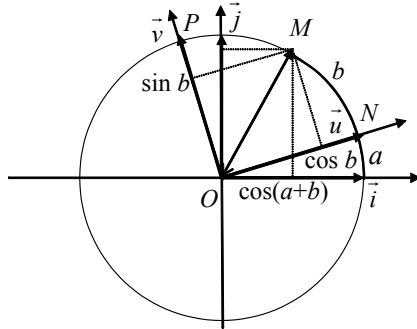


Figure 1.4

De même le point  $P$  a pour coordonnées  $\cos(a + \frac{\pi}{2})$  et  $\sin(a + \frac{\pi}{2})$ , donc

$$\vec{v} = \vec{OP} = \cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \vec{i} + \sin\left(a + \frac{\pi}{2}\right) \vec{j} = -\sin a \vec{i} + \cos a \vec{j}.$$

Dans le cercle trigonométrique du repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , le point  $M$  a pour coordonnées  $\cos b$  et  $\sin b$ , donc  $\vec{OM} = \cos b \vec{u} + \sin b \vec{v}$ . En utilisant les expressions de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ , il vient

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= \cos b(\cos a \vec{i} + \sin a \vec{j}) + \sin b(-\sin a \vec{i} + \cos a \vec{j}) \\ &= (\cos b \cos a - \sin b \sin a) \vec{i} + (\cos b \sin a + \sin b \cos a) \vec{j}. \end{aligned}$$

Or on a également  $\overrightarrow{OM} = \cos(a+b)\vec{i} + \sin(a+b)\vec{j}$  dans le cercle trigonométrique du repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . En identifiant les deux expressions de  $\overrightarrow{OM}$  dans la base  $(\vec{i}, \vec{j})$ , on obtient les formules d'addition (1.9).

Des formules d'addition (1.9) on déduit la formule d'addition pour la fonction tangente, à connaître mais surtout à *savoir retrouver* (Exercice 1.2).

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad (1.10)$$

## 1.4 Formules de duplication

En faisant  $a = b = x$  dans les formules d'addition, on obtient immédiatement les *formules de duplication* :

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x, \quad \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

En utilisant la formule  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , on peut transformer la formule de  $\cos 2x$  en remplaçant, soit  $\sin^2 x$  par  $1 - \cos^2 x$ , soit  $\cos^2 x$  par  $1 - \sin^2 x$ . On obtient deux autres formules pour  $\cos 2x$  :

$$\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1, \quad \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \quad (1.11)$$

A partir de (1.11), on obtient immédiatement les *formules de linéarisation* de  $\sin^2 x$  et  $\cos^2 x$ , que l'on doit savoir retrouver rapidement :

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} (1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) \quad (1.12)$$

## 1.5 Transformations de produits en sommes

On peut transformer en une somme un *produit de deux sinus*, ou un *produit de deux cosinus*, ou le *produit d'un sinus et d'un cosinus*. Il n'est pas utile de connaître ces formules par coeur, mais il faut savoir qu'elles existent et savoir les retrouver rapidement. On les obtient à partir des formules d'addition. Partons d'abord de

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a.$$

Remplaçons  $b$  par  $-b$ . Puisque la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus paire, on obtient

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a.$$

En additionnant ces deux égalités, on obtient immédiatement la première formule de transformation de produit en somme :

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]. \quad (1.13)$$

Partons maintenant de  $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ . En remplaçant de nouveau  $b$  par  $-b$ , il vient  $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$ . En additionnant ces deux égalités, on obtient la deuxième formule de transformation de produit en somme :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]. \quad (1.14)$$

En les soustrayant, on obtient la troisième formule de transformation de produit en somme :

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)]. \quad (1.15)$$

## 1.6 Transformations de sommes en produits

Inversement, on peut transformer des sommes ou différences de deux sinus ou deux cosinus en produits de fonctions trigonométriques. Ces formules se retrouvent également à partir des formules d'addition, en notant que

$$p = \frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2} \quad \text{et} \quad q = \frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}.$$

Ainsi, par exemple, on a

$$\begin{aligned} \sin p + \sin q &= \sin\left(\frac{p+q}{2} + \frac{p-q}{2}\right) + \sin\left(\frac{p+q}{2} - \frac{p-q}{2}\right) \\ &= \sin\frac{p+q}{2} \cos\frac{p-q}{2} + \cos\frac{p+q}{2} \sin\frac{p-q}{2} \\ &\quad + \sin\frac{p+q}{2} \cos\frac{p-q}{2} - \cos\frac{p+q}{2} \sin\frac{p-q}{2}, \end{aligned}$$

d'où la première formule de transformation de produit en somme :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin\frac{p+q}{2} \cos\frac{p-q}{2}. \quad (1.16)$$

De même on obtient facilement

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\frac{p+q}{2} \cos\frac{p-q}{2}, \quad (1.17)$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\frac{p+q}{2} \sin\frac{p-q}{2}. \quad (1.18)$$

On notera que  $\sin p - \sin q$  peut s'obtenir en remplaçant  $q$  par  $-q$  dans (1.16).

## Exercices

### Les basiques

**Exercice 1.1 (A,B)** Calculer les valeurs de  $\sin x$  et  $\cos x$  pour  $x = \frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  et  $\frac{\pi}{3}$  à partir du cercle trigonométrique. On pourra faire apparaître des triangles remarquables.

**Exercice 1.2 (C)** Démontrer la formule (1.10).

**Exercice 1.3 (A,B,C)** Calculer les valeurs des sinus et cosinus des nombres réels  $a$ ,  $b$  et  $a + b$  sachant que

a)  $\cos a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $\cos b = -\frac{1}{2}$ ,  $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ,  $0 < b < \pi$ .

b)  $\sin a = \frac{2}{5}$ ,  $\sin b = \frac{3}{5}$ ,  $0 < a < \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} < b < \pi$ .

**Exercice 1.4 (B)** Calculer  $\sin \theta$ , sachant que  $\tan \theta = 3 \cos \theta$ .

**Exercice 1.5 (C)** Démontrer que  $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

**Exercice 1.6 (C)** Calculer  $\cos 3\theta$  en fonction de  $\cos \theta$ .

En déduire que  $x_1 = \cos \frac{\pi}{9}$ ,  $x_2 = \cos \frac{7\pi}{9}$ ,  $x_3 = \cos \frac{13\pi}{9}$  sont solutions de l'équation du troisième degré  $8x^3 - 6x - 1 = 0$ .

**Exercice 1.7 (C)** Exprimer  $\cos 4x$  en fonction de  $\cos x$ .

**Exercice 1.8 (B,C)** Simplifier les sommes suivantes :

$$S_1 = \cos \omega t + \cos \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left( \omega t - \frac{4\pi}{3} \right).$$

$$S_2 = \sin \omega t + \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{4} \right) \cos \frac{\pi}{4} + \sin \left( \omega t - \frac{3\pi}{4} \right) \cos \frac{3\pi}{4}.$$

**Exercice 1.9 (C)** Démontrer les relations suivantes :

1)  $\cos(x + y) \cos(x - y) = \cos^2 x - \sin^2 y$ .

2)  $\sin(x + y) \cos(x - y) = \sin x \cos x + \sin y \cos y$ .

3)  $\tan x - \tan y = \frac{2 \sin(x - y)}{\cos(x + y) + \cos(x - y)}$ .

**Exercice 1.10 (D)** Démontrer que  $\sin^4 x = \frac{1}{8} (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3)$ .

**Exercice 1.11 (B,D)** 1) Montrer que  $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x$ .

2) En déduire la valeur de

$$S(x) = \cos^4 x + \cos^4 \left( x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos^4 \left( x + \frac{2\pi}{4} \right) + \cos^4 \left( x + \frac{3\pi}{4} \right).$$

**Exercice 1.12 (E)** Démontrer que  $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \tan 3x$ .

**Exercice 1.13 (B,C)** Soit  $\cos x = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$  et  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ .

Calculer  $\cos 2x$  et en déduire  $x$ .

**Exercice 1.14 (B,E)** Simplifier  $\frac{\cos p - \cos q}{\sin p + \sin q}$ . En déduire  $\tan \frac{\pi}{24}$ .

**Les techniques**

**Exercice 1.15** Démontrer que

$$\sin a + \sin b + \sin c - \sin(a + b + c) = 4 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a+c}{2} \sin \frac{b+c}{2}.$$



**Exercice 1.16** On pose  $t = \tan \frac{x}{2}$ . Démontrer que

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}.$$

**Exercice 1.17**  $x$  et  $y$  sont deux nombres réels compris entre 0 et  $\frac{\pi}{2}$ , et vérifient  $\tan x = \frac{1}{7}$  et  $\tan y = 2$ .

- 1) Montrer que  $0 \leq x + 2y \leq \frac{3\pi}{2}$ .
- 2) Calculer  $\tan(x + 2y)$ . En déduire la valeur de  $x + 2y$ .

**Exercice 1.18** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Soit  $\theta \neq 2k\pi$ . Démontrer que

$$\frac{1 - \cos(n+1)\theta - \cos\theta + \cos n\theta}{2(1 - \cos\theta)} = \cos \frac{n\theta}{2} \frac{\sin \frac{n+1}{2}\theta}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

**Exercice 1.19** Démontrer les formules suivantes :

$$1) \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \cotan \frac{x}{2} ; \quad 2) \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \cotan \frac{x}{2}.$$

**Exercice 1.20** Calculer  $S = \tan^2 \frac{\pi}{12} + \tan^2 \frac{5\pi}{12}$ .

**Exercice 1.21** Calculer le réel  $A = \left(\frac{1}{2} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5}\right) \sin \frac{\pi}{5}$ . En déduire que  $4 \cos^2 \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{2\pi}{5} - 1 = 0$ , puis la valeur de  $\cos \frac{2\pi}{5}$  et de  $\cos \frac{\pi}{5}$ .

### Les exotiques et les olympiques

**Exercice 1.22** En utilisant le cercle trigonométrique, montrer que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

En déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$ .

**Exercice 1.23** Résoudre l'équation  $\cos^{2021} x + \cos^{2022} x + \cos^{2023} x = 3$ .

**Exercice 1.24** Soit  $\alpha = \cos \frac{2\pi}{7}$ ,  $\beta = \cos \frac{4\pi}{7}$ ,  $\gamma = \cos \frac{6\pi}{7}$ .

- 1) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\theta \neq k\pi$ . Calculer  $\sin \frac{\theta}{2} (1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta)$ .

En déduire que  $1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta = \frac{\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{(2n+1)\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$ .

- 2) Calculer  $\alpha + \beta + \gamma$ .
- 3) Calculer  $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma$ .
- 4) Calculer  $\alpha\beta\gamma$ .
- 5) Démontrer que  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont solutions d'une équation du troisième degré à coefficients entiers, que l'on déterminera.