



M. M. WARBURG & CO
1798

BEOBACHTUNGEN ZUR ZEIT

No 9



M. M. WARBURG & CO
1798

Über den Glauben in der Mathematik

von Matthias Kreck
April 2008

Nach meiner Promotion in Mathematik habe ich vier Jahre evangelische Theologie studiert. Natürlich war da oft vom Glauben die Rede, allerdings zumeist vom Glauben anderer oder von der Rolle des Glaubens („Dein Glaube hat Dir geholfen“). Sätze, die mit „Ich glaube“ beginnen, habe ich selten gehört. Das ist auch nicht verwunderlich, schließlich ging es um Theologie, also um eine Wissenschaft. Eine solche hat objektiv zu sein, ein „Ich glaube“ ist da fehl am Platz.

Wenn einer Wissenschaft Objektivität zugesprochen wird, dann kommt wohl die Mathematik an erster Stelle. Jeder der behauptet, dass in der Euklidischen Geometrie der Satz von Pythagoras möglicherweise nicht in voller Allgemeinheit gilt oder die Winkelsumme im Dreieck nicht 180° ist, wird für verrückt gehalten. Subjektivität scheint keinen Platz in der Mathematik zu haben.

Vor diesem Hintergrund wäre sicher mancher Leser überrascht, wenn er Mathematikern bei der Diskussion über neue Forschung zuhören würde. Da würde er schon viel Geduld und Leidensfähigkeit aufbringen müssen, weil jedes zweite Wort entweder unbekannt ist oder offensichtlich in einem ganz anderen Sinn als normalerweise üblich verwendet wird. Im Frühjahr 2008 habe ich eine Diskussion mit einem meiner Doktoranden, einem Studenten aus Jerusalem, aufgenommen, weil wir Material für eine Photoreportage sammeln, die zwei Journalisten unter dem Arbeitstitel „Die Welt der Mathematiker“ erstellen. Sie wird aus Fotos und Tondokumenten bestehen. Wer diese Aufnahme abhört, wird zwar eine Fülle von unverständlichen Fachtermini hören, aber zumindest einige Minuten zuhören, weil ziemlich lebendig diskutiert wird. Und vielleicht hört er noch zu, wenn nach gut sechs Minuten gesagt wird: „When you say that, I believe it, I see the idea.“ Und sollte er das „Ich glaube“ in ei-

ner mathematischen Diskussion für einen Versprecher oder für eine Ausnahme halten, so kann er sich bei entsprechender Geduld davon überzeugen, dass das nicht der Fall ist. Er wird kaum eine Diskussion erleben, wo nicht früher oder später und immer mal wieder gesagt wird, „Ich glaube, dass folgende Aussage gilt“ oder „Das glaube ich auf keinen Fall.“

2

ELEMENTARTEILCHEN DER MATHEMATIK

Im folgenden soll etwas genauer erläutert werden, warum und in welchem Sinne Mathematiker so oft „Ich glaube (nicht)“ sagen. An erster Stelle ist dazu mit einem Vorurteil aufzuräumen, das erstaunlich weit verbreitet ist. Wie oft habe ich den Satz gehört: „In der Mathematik ist doch alles bekannt!“ Wenn man mich nach dem Abitur gefragt hätte, ob es in der Mathematik offene Probleme gibt, so hätte ich vielleicht geantwortet: „Ich weiß es nicht.“ Ich bin mir ziemlich sicher, dass ich in der Schule von keinem offenen mathematischen Problem gehört habe. Dass es in der Physik noch unerforschte Bereiche gibt, weiß jeder, zumindest, dass jedes Jahr Nobelpreise vergeben werden für ganz neue Erkenntnisse oder Entdeckungen. Mathematik als Forschungsgegenstand taucht in der Öffentlichkeit kaum auf, wenn das Wort in den Nachrichten fällt, dann im Zusammenhang mit der Pisa Studie, wo unsere Kinder mal wieder schlecht abgeschnitten haben.

Nun könnte die Unkenntnis über offene mathematische Probleme daran liegen, dass die offenen interessanten Probleme nur Leuten mit weit über die Schulmathematik hinausgehenden Kenntnissen dargestellt werden können. Bei den meisten Problemen ist das in der Tat der Fall. Aber es gibt auch Probleme – und darunter einige sehr interessante –, die man jedem erläutern kann. Ich will einige Beispiele nennen. Jeder kennt die natürlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$. Sie sind Ausgangspunkt fast sämtlicher Mathematik. Jeder weiß, dass man Zahlen addieren und multipliziere-

ren kann. Und jeder weiß, dass die Multiplikation irgendwie spannender als die Addition ist. Addition von Zahlen vergrößert diese verglichen mit Produkten nur wenig: z. B. ist $2 + 2 + 2 + 2 = 8$, während die Produktbildung sehr schnell voranschreitet: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$, oder noch drastischer $30 \cdot 2 = 60$, während $2^{30} = 68719476736$ ist. Allein deshalb liegt es nahe, natürliche Zahlen in Produkte von möglichst kleinen Zahlen zu zerlegen. Wie man an den obigen Potenzen von 2 sieht, kann das sehr effektiv sein, muss aber natürlich nicht so sein. Der extremste Fall tritt auf, wenn eine Zahl n überhaupt nicht zerlegt werden kann oder – um ganz genau zu sein – nur als $1 \cdot n$ geschrieben werden kann. Solche Zahlen n , die nur durch 1 und n teilbar sind, heißen **Primzahlen**, genauer schließt man 1 aus. Die ersten Primzahlen sind:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Die Primzahlen bezeichne ich gerne als **Elementarteilchen der Mathematik**. Jede natürliche Zahl lässt sich als Produkt von Primzahlen schreiben (wenn es keine Primzahl ist, so kann man sie als Produkt von kleineren Zahlen schreiben, die entweder Primzahlen sind oder sich wieder faktorisieren lassen: Da die Zahlen dabei immer kleiner werden, hört dieses Verfahren irgendwann auf und alle Faktoren sind Primzahlen). Diese Zerlegung in Primfaktoren ist (bis auf Umordnen) im wesentlichen eindeutig.

Nach meinem Dafürhalten sind die Primzahlen mindestens genauso wichtig für das Verständnis der Welt wie die Elementarteilchen der Physik – und genauso wenig verstanden. Es gibt aber einen großen Unterschied: Die Gesellschaft ist bereit, Unsummen für die Erforschung der physikalischen Elementarteilchen auszugeben, während kaum extra Geld für die Erforschung der Primzahlen ausgegeben wird.

Nun habe ich mich weit aus dem Fenster gelehnt und muss mir die kritische Frage gefallen lassen, worin denn eigentlich die mit den Ele-

mentarteilen der Physik vergleichbare Bedeutung der Primzahlen liegt. So etwas klärt man am besten in einem Streitgespräch, wo ein Physiker erläutert, warum es so wichtig ist, Elementarteilchen zu verstehen und man dies mit der Bedeutung der Primzahlen vergleicht. Natürlich wird es keine objektive Antwort geben, Geschmack wird dabei eine große Rolle spielen.

Wie bei den Elementarteilchen der Physik, wo es zum einen um die Frage geht, was unsere Welt im Innersten zusammenhält, und zum anderen um praktische Anwendungen, so ist das Interesse an Primzahlen einerseits grundlegender Art – um es mal ganz lax auszudrücken – die Neugierde zu wissen, was sich Gott dabei ausgedacht hat, den Zahlen eine solche Struktur zu geben, dass ihre Bausteine so geheimnisvoll sind. Andererseits haben Primzahlen unmittelbaren praktischen Nutzen, der gerade daher rührt, dass sie so geheimnisvoll sind. Primzahlen spielen eine zentrale Rolle bei der Kryptographie, wo es darum geht, Information, z. B. den Austausch von Information zwischen zwei Banken, so zu verschlüsseln, dass nur der ihn aus der verschlüsselten Information rekonstruieren kann, der den Schlüssel kennt, welcher aus zwei bestimmten Primzahlen besteht. Am Ende des Artikels wird dies etwas genauer erläutert. Theoretische Mathematik kommt hier in doppelter Weise ins Spiel: Zum einen durch die Erkenntnis, dass große Primzahlen äußerst selten sind, und zum anderen dadurch, dass man, um eine große Primzahl zu finden, ohne theoretische Kenntnisse keine Chance hat.

3

DIE VERTEILUNG DER PRIMZAHLEN

Was ist mit der Aussage, große Primzahlen sind äußerst selten, gemeint? Die einfachste Antwort wäre: Es gibt nur endlich viele Primzahlen. Dass dem nicht so ist, wussten schon die alten Griechen. Der Beweis ist gleichzeitig einfach, trickvoll und typisch für zahlreiche

andere mathematische Beweise, dass ich mich nicht bremsen kann, ihn hier zu wiederholen: Angenommen es gäbe nur endlich viele Primzahlen, sagen wir mal

$$2; 3; 5; 7.$$

Dann bilden wir ihr Produkt, also in dem angenommenen Fall $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 210$, und addieren 1 dazu und erhalten hier 211. Nun gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder 211 ist eine Primzahl, dann war die Annahme, dass es nur die benutzten endlich vielen Primzahlen gibt, falsch, und es gibt folglich unendlich viele Primzahlen. Oder 211 lässt sich in Produkte von Primzahlen zerlegen (der Leser kann selber mal nachrechnen, ob 211 eine Primzahl ist oder nicht), und da wir annehmen, dass es nur die obigen vier Primzahlen gibt, muss 211 durch eine der vier Primzahlen teilbar sein, sagen wir mal durch 7. Dann teilen wir halt durch 7 und schreiben

$$211 = 7 \cdot (211/7).$$

Nun kommt der Clou: 210 ist nach Konstruktion der Zahl durch 7 teilbar, nämlich

$$210 = 7 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5) = 7 \cdot 30.$$

Nun ziehen wir die beiden Gleichungen voneinander ab und erhalten:

$$1 = 7 \cdot (211/7) - 7 \cdot 30,$$

und nach Ausklammern:

$$1 = 7 \cdot (211/730).$$

Das kann aber auch nicht sein, da 1 sicher nicht durch 7 teilbar ist. Also konnte es nicht nur endlich viele Primzahlen geben (ob wir das Argu-

ment mit angenommen vier oder 100 Millionen oder welcher Anzahl auch immer machen, ist völlig egal).

Was hier an einem der ältesten Sätze der Mathematik vorgeführt wurde, ist ein für die Mathematik fundamentales Beweisprinzip: der indirekte Beweis. Man will eine Aussage beweisen und nimmt an, dass sie falsch ist, also ihre Verneinung richtig ist (im obigen Falle nimmt man an, dass es nur endlich viele Primzahlen gibt) und verwendet dies, um einen Widerspruch zu erzeugen. Dass der indirekte Beweis funktioniert beruht auf dem berühmten „tertium non datur“ (es gibt bei mathematischen Aussagen nur richtig oder falsch, ein im restlichen Leben so typisches „Es könnte aber auch noch ganz anders sein“ gibt es in der Mathematik nicht).

Kehren wir zur Aussage: „Primzahlen sind äußerst selten“ zurück und versuchen, diese zu präzisieren. Ich beginne mit einem Zitat von einem der größten heutigen Kenner der Primzahlen, Don Zagier vom Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn: „Es gibt zwei Tatsachen über die Verteilung der Primzahlen, ... die eine ist, dass die Primzahlen, trotz ihrer einfachen Definition und Rolle als Bausteine der natürlichen Zahlen, zu den willkürlichsten, widerspenstigsten Objekten gehören, die der Mathematiker überhaupt studiert. Sie wachsen wie Unkraut unter den natürlichen Zahlen, scheinbar keinem anderen Gesetz als dem Zufall unterworfen, und kein Mensch kann voraussagen, wo wieder eine sprießen wird, noch einer Zahl ansehen, ob sie prim ist oder nicht. Die andere Tatsache ist viel verblüffender, denn sie besagt just das Gegenteil – dass die Primzahlen die ungeheuerste Regelmäßigkeit aufzeigen, dass sie durchaus Gesetzen gehorchen, und dies mit fast peinlicher Genauigkeit.“

Dass die Primzahlen wie Unkraut wachsen, davon kann sich jeder zumindest ansatzweise überzeugen, indem er sich mal 10 fünfstellige Zahlen nimmt und dadurch, dass er sie durch kleinere Zahlen zu teilen versucht, entscheidet, welche davon Primzahlen sind. Dass sie Gesetzen gehorchen

soll nun angedeutet werden. Dazu machen wir ein (gedachtes) Experiment. Beim Stichwort „Primzahlen sind selten“ werden manche unwillkürlich an Lottozahlen denken. Man könnte z. B. die Lottofee bitten, mit ihrer absolut fairen Maschine 25 Kugeln mit den Zahlen 0 – 9 zu ziehen und erhält so eine Zahl mit 25 Ziffern. Dann kann man sich fragen, wie wahrscheinlich es ist, dass das Ergebnis eine Primzahl ist. Die Antwort ist ganz einfach: Es ist die Anzahl der Primzahlen, die man aus 25 Ziffern bilden kann, dividiert durch die Anzahl aller Zahlen mit 25 Ziffern, also 1025. Man könnte diese Zahl noch mit 100 multiplizieren, dann erhält man die gewohnte Prozentzahl. Wäre z. B. jede zweite Zahl eine Primzahl (was offensichtlich Quatsch ist, da neben den durch zwei teilbaren Zahlen > 2 auch die durch drei teilbaren Zahlen > 3 nicht Primzahlen sind, die durch 5 teilbaren usw.), so wäre der Quotient $1/2$, also wäre das Ergebnis nach Multiplikation mit 100:

50 % aller Zahlen mit 25 Ziffern sind Primzahlen.

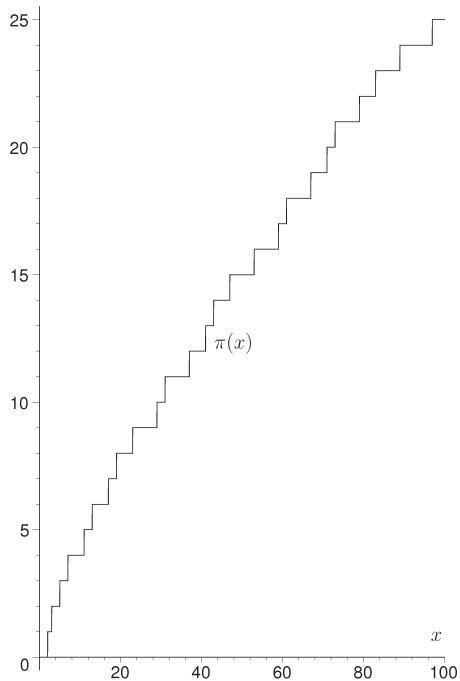
Je kleiner diese Prozentzahl ist, desto seltener sind Primzahlen mit 25 Ziffern unter allen Zahlen mit 25 Ziffern. Wir notieren uns mal die Anzahl der Primzahlen unterhalb von 100, 1000, 10000 usw., indem wir diese jeweils daneben schreiben:

unterhalb von 10 : 4
unterhalb von 100 : 25
unterhalb von 1000 : 168
unterhalb von 10000 : 1229
unterhalb von 100000 : 9592
unterhalb von 1000000 : 78498
unterhalb von 10000000 : 664579
unterhalb von 100000000 : 5761455
unterhalb von 1000000000 : 50847534
unterhalb von 10000000000 : 455052512

Daraus berechnet man den Prozentanteil der Primzahlen bis zur jeweiligen Größe:

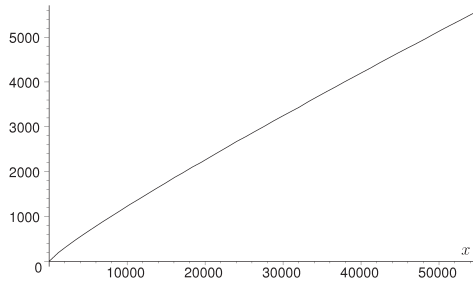
40 %; 25 %; 16,8 %; 12,3 %; 9,6 %; 7,9 %; 6,7 %; 5,7 %; 5,1 %; 4,5 %.

Man sieht, dass die Anzahl der Stellen recht gleichmäßig anzuwachsen scheint. Wir veranschaulichen uns die Situation in einer Graphik, wo wir auf der horizontalen Achse die Zahlen bis 100 eintragen und vertikal dazu jeweils darüber die Anzahl der Primzahlen, die kleiner als diese Zahl sind, hinmalen. Da sieht man schon eine gewisse Regelmäßigkeit:



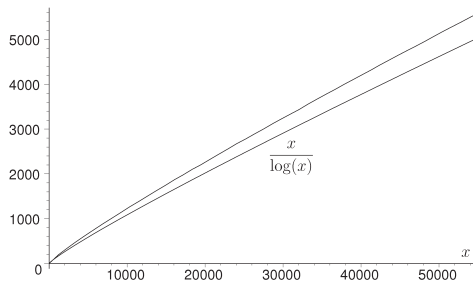
Primzahlverteilung bis 100

Noch frappierender ist das Bild für große Zahlen:



Primzahlverteilung bis 55000

Der junge Gauß hat bereits mit 15 Jahren Tabellen über die Verteilung der Primzahlen aufgestellt und natürlich war ihm die Form der obigen Kurve aufgefallen. Für einen Mathematiker liegt nahe, nach einer anderen Funktion (Kurve) zu suchen, die eine ähnliche Form hat, und die hat Gauß wahrscheinlich schnell gefunden, nämlich $x/\log(x)$ sieht so ähnlich aus (wer sich nicht mehr an den natürlichen Logarithmus \log oder auch \ln genannt erinnert, soll hier nur daran denken, dass es sich um eine besonders interessante und regelmäßige Kurve handelt). Wir legen beide Kurven übereinander:



Primzahlverteilung bis 55000 vs. $x/\ln(x)$

Gauß hat vermutet (ganz fest geglaubt), dass das Verhältnis dieser beiden Kurven, wenn x immer größer wird, gegen 1 geht; wir Mathematiker sagen dazu, dass die beiden Kurven asymptotisch gleich sind. Diese Aussage wurde rund 100 Jahre später unabhängig durch Hadamard als auch de la Valle Poussin bewiesen.

Kehren wir zur Frage zurück, wie selten Primzahlen sind, so wissen wir nun, dass die Folge der Wahrscheinlichkeit des Auftretens von Primzahlen unterhalb einer gewissen Zahl nach Null strebt, wenn diese Zahl nach Unendlich geht, und zwar sehr schnell. Also wird die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig herausgepickte Zahl eine Primzahl ist, immer geringer, je mehr Stellen die Zahl hat, und wir wissen auch wie groß oder besser gering diese Wahrscheinlichkeit ungefähr ist.

Wir wissen nun, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, und dass sie mit zunehmender Größe immer seltener werden. Das legt die Frage nahe, ob wir vielleicht unendlich viele Primzahlen kennen. Vielleicht wird mancher denken, wie kann man wissen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, ohne unendlich viele zu kennen. Damit ist eine für die Mathematik typische Situation angedeutet: Wir können oft nur die Existenz von etwas beweisen (z. B. dass eine Gleichung eine Lösung hat oder es unendlich viele Primzahlen gibt), ohne es angeben zu können. Bei den Primzahlen entsteht dadurch so eine Situation, die wir vom Sport kennen, wo wir versuchen, immer höher zu springen, um den Weltrekord aufzustellen. Wie beim Sport werden sogar bisweilen Gelder für die Erreichung einer bestimmten Marke ausgelobt. Wer als erster eine Primzahl mit mehr als zehn Millionen Ziffern angeben kann, erhält 100.000 US Dollar. Bitte beeilen Sie sich, wenn Sie sich am Wettbewerb beteiligen wollen, der bisherige Rekord ist bereits bei 9,8 Millionen Stellen.

Für die meisten Mathematiker ist die Suche nach immer größeren Primzahlen jedoch nicht sehr interessant. Uns fasziniert das Geheimnis der

Struktur der Primzahlen. Die Frage, wie die Primzahlen unter allen Zahlen verteilt sind, wird durch die Tatsache, dass sie so selten sind, erst richtig interessant. Sind die Primzahlen regelmäßig verteilt, bilden sie vielleicht Klumpen, um danach lange Zeit überhaupt nicht aufzutau-chen, all das sind naheliegende und schwierige Fragen. Eine höchst sub-tille und ohne tiefere Mathematikkenntnisse nicht darstellbare Kodierung der Verteilung der Primzahlen wurde durch Bernhard Riemann Mitte des 19. Jahrhunderts gegeben. Diese Kodierung sollte nach Riemann eine ganz spezifische Eigenschaft haben, die man bis heute nicht nach-weisen kann. Fast alle Mathematiker glauben, dass diese Riemannsche Vermutung wahr ist. Das würde die wohl berühmteste offene Frage der Mathematik lösen. Einige Gründe, worauf so ein starker Glaube beruht, werden im folgenden angedeutet.

4

MATHEMATIK: ERFINDUNG ODER ENTDECKUNG?

U nd da haben wir wieder das Wort „Glauben“. Wie kommt ein Ma-
thematiker dazu, mit großer Bestimmtheit eine Aussage zu glau-
ben? Darauf gibt es natürlich keine von allen Mathematikern akzep-
tierte Antwort. Deshalb ist der folgende Erklärungsversuch naturgemäß
subjektiv, ich kenne aber zahlreiche Mathematiker, die ähnlich denken.
Ich möchte dazu mit einer häufig gestellten Frage beginnen: Werden
mathematische Konzepte und Resultate entdeckt oder erfunden? Für
beides kann man gute Gründe angeben. Ich tendiere zum Entdecken.
Wenn wir z. B. an die bereits erwähnten natürlichen Zahlen 0, 1, 2, 3,
... denken, so könnte es gut so gewesen sein, dass sie über das Zählen
von Gegenständen entdeckt wurden. Damit betone ich, dass es nicht in
meine Wahl gestellt ist, ob die Anzahl von Birnen in einem Korb gleich
der von Äpfeln in einem anderen Korb ist. Sollten Unklarheiten beste-
hen, so nimmt man nacheinander je eine Birne und einen Apfel aus den
Körben und legt sie zu Paaren nebeneinander. Wenn das aufgeht, ist die

Anzahl gleich, sonst verschieden. Dass man der Anzahl dann irgendwann einen Namen gibt, ist naheliegend und welchen eigentlich egal, solange man die gleichen Namen verwendet. Und auch die Rechenoperationen der natürlichen Zahlen entsprechen Vorgängen, die jeder macht: Wenn ich zwei Körbe in einen dritten schütte, addiert sich die Anzahl. Und wenn ich eine gewisse Anzahl von Körben, die jeweils gleich viele Äpfel enthalten, in einen werfe, so multipliziert sich die Anzahl der Äpfel und die Anzahl der Körbe.

Natürlich kann man dem entgegenhalten, dass es eine beträchtliche intellektuelle Fähigkeit erfordert, z. B. das Konzept der Zahlen zu destillieren, und in gewissem Sinne ist es natürlich Menschenwerk. Aber das gilt genauso für alle physikalischen und allgemeinen naturwissenschaftlichen Erkenntnisse. Das entscheidende Kriterium dort ist das Experiment, und das Zusammenschütten von Äpfeln ist auch ein Experiment, das wir nur deshalb nie mehr machen, weil es zum erwarteten Ergebnis führt.

Die natürlichen Zahlen sind der Ausgangspunkt der Algebra: Vom Rechnen mit Zahlen gehen die Mathematiker zum Rechnen mit Buchstaben über. Von den Zahlen bleiben dabei nur die Rechenregeln (und diese werden ergänzt und modifiziert, aber in erstaunlicher Zurückhaltung, zu weit entfernen sich die Mathematiker von den Regeln der Zahlen nicht). Die Erweiterungen der Regeln gehen meist mit der Entdeckung neuer mathematischer Objekte einher, z. B. der ganzen Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, der rationalen Zahlen p/q , der reellen Zahlen und der komplexen Zahlen.

Ähnliches wie für die Zahlen, die am Anfang der Algebra stehen, gilt für die Geometrie, die in ihren Anfängen bei Euklid Gebilde wie Ebene, Gerade als kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten, in Begriffe gefasst hat und entsprechende Regeln (Axiome) festgehalten hat. Über mehr als 2000 Jahre war das der Rahmen der Geometrie. Man entdeckte immer

raffiniertere Zusammenhänge, die die Form mathematischer Sätze annahmen. Die Beweise dieser Sätze konnten in Konstruktionen bestehen, die man mit Zirkel und Lineal real oder im Geiste durchführte, sie konnten aber auch mit raffinierteren abstrakten Argumenten geführt werden.

Vor rund 150 Jahren hat der schon erwähnte Bernhard Riemann ein völlig neues Konzept in die Geometrie eingeführt, den Begriff der **Mannigfaltigkeit**. Dieser Begriff erlaubt es, z. B. beliebige Oberflächen fester Körper mathematisch zu beschreiben. Was Riemann zu diesem Konzept geführt hat, ist mir nicht ganz klar. Dass es eine reine Erfindung war, glaube ich nicht. Riemann selbst hat wohl über die physikalische Bedeutung seiner Geometrie nachgedacht. Und damit war er seiner Zeit um rund 50 Jahre voraus. Denn die Riemannsche Geometrie ist Grundlage von Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie.

Nun könnte eingewendet werden, dass diese Sicht Bereiche der Mathematik ausgeklammert hat, die in der Tat nicht mehr (oder eventuell gar nicht) unmittelbar der Natur entstammen. Das gilt insbesondere für die Unendlichkeit. Jeder kennt das Paradox von Achill und der Schildkröte, die 100 Meter Vorsprung hat, und von Achill, der ein Vielfaches schneller läuft, nie eingeholt werden kann, weil, wenn er da ankommt, wo die Schildkröte eben noch war, diese ein Stück weiter gekrochen ist und so weiter. Eine befriedigende Lösung dieses Paradoxon erfolgte in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts, als Cauchy den Begriff des Grenzwertes präziserte. Allein die Zeit, die bis dahin verflossen ist, deutet die intellektuelle Leistung, die notwendig war, an. Aber auch hier neige ich zu der Sicht, dass Cauchy etwas in Worte gefasst hat, was vor ihm schon da war. Natürlich haben die Mathematiker lange vor Cauchy mit der Unendlichkeit hantiert.

In den letzten 200 Jahren zog eine Vielfalt von neuen Begriffen in die Mathematik ein, die teilweise auch für einen professionellen Mathemati-

ker weit hergeholt, ja künstlich erscheinen. Aber nach meiner Erfahrung ist Ausgangspunkt all dieser Konzepte der Versuch, etwas bereits Existierendes in Worte zu fassen oder, wenn man tatsächlich etwas neu erschafft, festzustellen, dass es doch einer Wirklichkeit entspricht.

5

MATHEMATIK: EIN KOMPLEXES GEBÄUDE

Ich vergleiche die Mathematik gerne mit einem Gebäude, wo jede Etage auf der vorigen aufbaut, jedes Zimmer zu seinem Nachbarzimmer passt. Die Architektur dieses Gebäudes (das wir nach meiner Auffassung bisher nur teilweise kennen, nach Auffassung anderer selbst konstruieren) ist sehr raffiniert. Im Zuge der mathematischen Forschung turnen wir an Gebäuden, klettern an auf den ersten Blick ganz glatt und unbesteigbar erscheinenden Wänden hoch, erfinden Schlüssel, mit denen man neue Räume aufschließen kann. Dabei kommt es vor, dass wir von einem Moment auf den anderen ganz unerwartet Zusammenhänge sehen, z. B. eine Brücke zwischen zwei Zimmern, einen Tunnel durch eine scheinbar undurchdringliche Wand. Häufig täuschen wir uns, meinen dies alles nur gesehen zu haben, denken, dass dies das richtige Konzept ist, um Gesehenes in Worte zu fassen. Wir sehen diese Täuschung meist dadurch, dass das Gesehene nicht zum bereits Entdeckten passt, bis hin dazu, dass das Gebäude zu wanken anfängt. Das Gebäude hat eine außergewöhnliche Statik, ein falscher Stein bringt es komplett zum Einsturz. Aber dann gibt es den Moment, den die meisten Mathematiker bestätigen werden: Wir wissen im Augenblick des Sehens, dass es passt. Wir formulieren einen neuen Satz, von dessen Gültigkeit wir absolut überzeugt sind, an den wir unerschütterlich glauben. So wird es Gauß mit dem Primzahlsatz gegangen sein. Es kann dann Monate dauern (oder 100 Jahre wie im Falle des Primzahlsatzes), bis wir den zugehörigen Beweis finden, aber der Glaube an die Gültigkeit hilft uns, alle Durststrecken zu überwinden.

Neben der subtilen Statik spielt bei der Möglichkeit, Ergebnisse zu „sehen“ und dann zu glauben, eine Erfahrung eine große Rolle, die die meisten Schüler mit höchster Verwunderung zur Kenntnis nehmen werden: Das Gebäude der Mathematik hat eine bezaubernde Ästhetik, nicht in jedem einzelnen Bereich und Ergebnis, aber aufs Ganze gesehen. Das geht einher mit meiner Erfahrung, dass ich immer mal wieder zu Studenten und Kollegen, die mir ein erhofftes Resultat erzählen, gesagt habe: „Das kann nicht stimmen, das ist so unästhetisch.“

6

DIE VERSCHIEDENEN FLÜGEL IM GEBÄUDE DER MATHEMATIK

Nun wird sich mancher Leser sagen: Gut und schön, ich kann mir schon vorstellen, dass ein Mathematiker bei seiner Forschung Visionen braucht und diese so konkrete Gestalt annehmen können, dass der Glaube an die Gültigkeit unerschütterlich ist. Aber bis auf Zahlentheorie, wo es z. B. um die Verteilung von Primzahlen geht, weiß ich immer noch nicht, womit sich die Mathematiker beschäftigen. Ich kann im großen Gebäude der Mathematik grob fünf Flügel erkennen:

- Algebra
- Geometrie
- Analysis (Differentialrechnung)
- Numerische Mathematik und wissenschaftliches Rechnen
- Stochastik (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik)

Natürlich kann ich dazu nur exemplarisch etwas sagen. Ich möchte an die Mathematik, die man im Gymnasium lernt, anknüpfen. Ein Großteil der Schulmathematik hat mit Rechnen zu tun. Damit ist neben dem Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren und Dividieren auch das Lösen von Gleichungen gemeint. Das ist ein weites Feld. Wir lernen in der

Schule z. B., wie man einfache Gleichungssysteme durch Eliminieren von Unbekannten löst. Diese Eliminationsmethode (Gauß-Algorithmus) geht im Prinzip genauso bei beliebig großen Gleichungssystemen. Der Aufwand wird dabei aber so groß, dass selbst die schnellsten Computer an ihr Limit stoßen. Für beliebige Gleichungssysteme lässt sich nicht viel machen. Aber in zahlreichen Anwendungssituationen hat man es mit sogenannten dünn besetzten Gleichungssystemen zu tun, wo man auch heute noch nach besonders effektiven Lösungsverfahren sucht. In der Schule tauchen vorwiegend lineare Gleichungssysteme auf. Nichtlineare Gleichungen sind z.B. quadratische Gleichungen $x^2 + px + q = 0$, die wir mit der vielgeliebten p,q -Formel lösen.

Wenn statt Quadraten höhere Potenzen von den Variablen auftauchen, so sind Lösungen in der Regel nur noch näherungsweise bestimmbar. Noch schwieriger wird die Aufgabe, wenn wir als Unbekannte nicht Zahlen wie bei den obigen Gleichungen haben, sondern Funktionen wie bei Differentialgleichungen. Hier wird nach einer Funktion (Kurve) $f(x)$ gesucht, die in einer Gleichung auftaucht, wo die Ableitung von f oder höhere Ableitungen benutzt werden, z. B. kann man die Differentialgleichung untersuchen, wo die Funktion gleich ihrer Ableitung ist. Die Lösungen dieser Differentialgleichung sind wenigstens vom Namen her jedem bekannt, es ist die Exponentialfunktion e^x oder $\exp(x)$, wie wir Mathematiker schreiben, und alle Vielfachen davon. Die Zahl e hat etwas mit dem natürlichen Wachstum zu tun. Und Lösungen der Differentialgleichungen, wo die zweite Ableitung gleich dem Negativen der Kurve ist, kennen wir auch aus der Schule, nämlich sinus und cosinus. Diese beiden Differentialgleichungen beschreiben fundamentale Naturphänomene: Das natürliche Wachstum wird durch die Exponentialfunktion beschrieben, und die Sinus- bzw. Cosinusfunktion beschreibt Schwingungsvorgänge. Beispiele, wo die Exponentialfunktion vorkommt, sind der radioaktive Zerfall in der Physik, das Wachstum einer Population von Mikroorganismen in der Biologie, die Lösung eines Stoffes in der

Chemie. Die Sinus- und Cosinusfunktion tritt bei der schwingenden Saite und ganz allgemein bei Schwingungsvorgängen auf, oder die Zu-/Abnahme des Tageslichts wird damit beschrieben.

Schon diese besonders einfachen Differentialgleichungen haben komplizierte Lösungen. Man kommt sehr schnell an ähnliche Grenzen wie bei nichtlinearen Gleichungssystemen – und zwar bei Differentialgleichungen, die fundamentale Naturvorgänge beschreiben oder bei ganz praktischen Anwendungsproblemen entstehen. Die Versuche, Gleichungssysteme aller Art entweder explizit (selten möglich) oder näherungsweise zu lösen, sind Gegenstand eines zentralen Gebietes der modernen Mathematik, der Numerik oder des noch mehr auf Anwendungen orientierten wissenschaftlichen Rechnens. Bei der Lösung und Aufstellung von Differentialgleichungen wird neben und meist vor der numerischen Behandlung, aber auch unabhängig von dieser viel Theorie entwickelt, was zum Gebiet der Analysis gehört.

Zu den großen wissenschaftlichen Überraschungen des letzten Jahrhunderts gehörte die Erkenntnis, dass die Physik im Kleinen nicht deterministisch ist. Während die Flugbahn eines Balles durch eine Differentialgleichung bei vorgegebener Anfangsrichtung und Geschwindigkeit völlig bestimmt ist, ist der Zustand eines kleinen Teilchens in der Physik nur mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit festgelegt, z. B. in 80 % der Fälle im Zustand *A* und in 20 % der Fälle im Zustand *B*. Damit sind wir im Bereich der Wahrscheinlichkeitsrechnung oder Stochastik. Neben der Physik gibt es zahlreiche Bereiche des täglichen Lebens, aber auch innerhalb der Mathematik, wo man „nur“ Wahrscheinlichkeitsaussagen machen kann. Selbstverständlich stellen die Mathematiker auch im Bereich der Stochastik Gleichungen auf und versuchen diese zu lösen. Dass ich die beiden Bereiche der Mathematik, die besonders stark von Anwendungen (auf Physik, man denke nur an die Verbesserung der Wetterprognose, wo stochastische Methoden eine große Rolle spielen, auf

Technik, auf ökonomische Vorgänge, z. B. Versicherungen, Börsenkurse ...) geprägt sind, als erstes nenne ist kein Zufall. Ein wichtiger Grund, warum die Gesellschaft mathematische Forschung finanziert, ist die Anwendbarkeit der Mathematik.

Seit Alters gehörte die Mathematik aber auch zu einem hoch geschätzten Kulturgut. Die meist von Anwendungen oder dem Versuch außermathematischer Gegenstände (in Physik, Ökonomie ...) ausgehende Mathematik hat natürlicherweise – so sind wir Menschen nun mal – dazu geführt, dass man parallel grundsätzliche Fragen gestellt hat wie z. B.:

- Was hat es eigentlich mit den natürlichen Zahlen auf sich?
- Was macht die Besonderheit der Kreiszahl π oder der Zahl e aus?
- Welche Sätze gelten in der Geometrie und wie werden geometrische Objekte wie z. B. der Kosmos mathematisch beschrieben?

Diese Liste von Fragen könnte leicht fortgesetzt werden, wobei natürlich mehr und mehr Fachtermini auftauchen würden. Mit den exemplarischen Fragen werden zwei große Bereiche der theoretischen Mathematik angesprochen: Algebra und Geometrie.

Die Unterscheidung in theoretische Mathematik und angewandte Mathematik verwende ich nur ungern. Nach meiner Sicht kann man diese Bereiche nur schwer unterscheiden. Jedes Problem aus der Praxis kann dazu führen, dass ein neues mathematisches Konzept eingeführt wird. Manchmal reicht dies aus, um das Problem zu lösen, meist stellen sich aber Fragen, die über das ursprüngliche Praxisproblem weiterführen. Das kann so weit gehen, dass der Mathematiker, der darüber forscht, das Anwendungsproblem gar nicht mehr kennt. Aber häufig sind die aus scheinbar rein theoretischem Interesse gewonnenen Erkenntnisse Basis für die Lösung neuer Praxisprobleme.

SICHERE KOMMUNIKATION DURCH PRIMZAHLEN

Stellen wir uns vor, Bank A will eine Information an Bank B schicken (oder der Geheimdienst der USA an den Bundesnachrichtendienst), die niemand anders mitbekommen darf. Da die Übertragung durch Netze geht, die man abhören kann, muss die Information verschlüsselt werden. Als erstes verwandelt Bank A den Text in eine Folge von Ziffern, z. B. steht 01 für den Buchstaben a, 02 für b usw. Dann bedeutet 02010308 z. B. „bach“. Um die Situation zu vereinfachen, nehmen wir mal an, dass wir nur Wörter aus zwei Buchstaben bilden wollen, z. B. „an“, was sich in 0114, also der erste und vierzehnte Buchstabe, verwandelt, oder „um“, was zu 2113 wird.

Nun verschafft sich Bank B (nicht Bank A!) zwei Primzahlen, z. B. 101 und 139, und bildet das Produkt: 14039, eine 5-stellige Zahl. Diese Zahl sendet sie an Bank A (und eine neugierige andere Bank C hört mit und notiert sich auch diese Zahl). Bank A braucht diese Zahl, um die Information zu verschlüsseln, das Geheimnis der beiden Primzahlen behält Bank B natürlich für sich, das braucht auch Bank A nicht zu kennen (die ihre „eigenen“ Primzahlen verwendet, die wiederum Bank B nicht kennen soll). Nun bildet Bank A das Quadrat von der zu übermittelnden Information, eine sehr große Zahl, die zu übermitteln viel zu aufwendig wäre. Also im obigen Fall mit „um“:

$$2113 \cdot 2113 = 4464769.$$

In der Praxis bestehen die Wörter natürlich nicht nur aus zwei Buchstaben, so dass das Quadrat wirklich riesig wird. Die Primzahlen werden dann so gewählt, dass ihr Produkt eine Stellenzahl hat, die um 1 oder 2 größer als die Stellenzahl der in Ziffern verwandelten Wörter ist.

Nun kehren wir zum obigen Beispiel zurück. Um aus dem Quadrat 4464769 eine handhabbare kleine Zahl zu erhalten, zieht Bank A von dem Quadrat das Produkt der Primzahlen, also in unserem Fall 14039 so oft ab, bis die Zahl kleiner als 14039 ist. In unserem Fall ist das Ergebnis: 367. Dies ist die chiffrierte Information, die Bank A nun beruhigt zu Bank B schicken kann. Bank B kann mit etwas Mathematik und der Kenntnis der beiden Primzahlen die ursprüngliche Information 2113 rekonstruieren. Bank C, die fleißig mitgehört hat, hat ohne die Kenntnis der beiden Primzahlen keine Chance, die ursprüngliche Information 2113 zu rekonstruieren, wenn die Primzahlen genügend groß sind (z. B. 500-stellig).

8

KANN GLAUBE MATHEMATISCHE BERGE VERSETZEN?

Ja, das kann er, wenn damit gemeint ist, dass die Überzeugung, ja mehr noch, subjektive Gewissheit, dass ein bestimmtes Resultat richtig ist, dass eine bestimmte Beweismethode zum Ziel führt, Kräfte freisetzt, den Intellekt zu Höchstleistungen animiert. Dann kann man manches zunächst einmal unüberwindlich hoch erscheinendes Hindernis aus dem Weg räumen. Natürlich wächst dadurch auch der Mut, einen besonders schwierigen Klimmzug zu wagen.

Hier sei auf eine dem Nichtmathematiker möglicherweise überraschend erscheinende Tatsache hingewiesen. Wir Mathematiker schreiben unsere Arbeiten nicht als eine Kette von logischen Argumenten auf, die von der Form sind: Aus Aussage A folgt Aussage B und aus Aussage B folgt Aussage C, also folgt aus A die Aussage C. Wenn wir Arbeiten so aufschreiben würden, so würde eine heute 20 Seiten lange Arbeit mindestens zehnmal so lang sein. Und – und das mag noch mehr überraschen – wir Mathematiker würden große Schwierigkeiten haben, einen solchen Beweis zu

überprüfen. Bei einer formalen Art, eine Arbeit aufzuschreiben, ermüdet der Leser. Er wird Schwierigkeiten haben, den Clou zu erkennen, und einen eventuellen Fehler vielleicht übersehen. Stattdessen versuchen wir den Leser davon zu überzeugen, dass eine bestimmte Aussage richtig ist. Wir benutzen dabei selbstverständlich Argumente, die meist von der Art sind, dass wir größere Schritte vorstellen, bei denen die Mathematiker aus ihrer Erfahrung wissen, dass man sie durch ein Zerlegen in kleine Schritte bis hin zu im Extremfall einer Kette von logischen Schlüssen verifizieren kann. In den meisten Fällen wird ein erfahrener Mathematiker solch einem größeren Schritt sofort ansehen, ob er zulässig ist, er wird vor sich hin sagen: das glaube ich.

In den letzten Jahren hat es einige spektakuläre Beispiele für Forschungserfolge gegeben, die dem Versetzen von Bergen gleichkommen. Der britische Mathematiker Andrew Wiles hat in den neunziger Jahren eine der ältesten offenen Fragen geklärt, die Fermatsche Vermutung. Hier geht es wieder um Zahlentheorie, allerdings nicht um Primzahlen, sondern um die Frage, ob eine der Gleichungen

$$x^3 + y^3 = z^3$$

$$x^4 + y^4 = z^4$$

$$x^5 + y^5 = z^5$$

$$x^6 + y^6 = z^6$$

usw.

eine Lösung hat, bei der x , y und z alles ganze Zahlen sind. Lange war vermutet worden, dass es solche Lösungen nicht gibt (für die Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ gibt es unendlich viele Lösungen, die man alle kennt; die einfachste ist $3^2 + 4^2 = 5^2$). Seit mehreren Jahrhunderten haben einige der besten Mathematiker ohne Erfolg versucht, dieses Problem zu lösen. Ganz neue mathematische Theorien, die selbst inzwischen viel größere Bedeutung als die ursprüngliche Frage haben, wurden mit dem

Ziel entwickelt, der Lösung auf die Spur zu kommen. Wiles hat sich für mehrere Jahre fast ausschließlich der Lösung dieser Frage gewidmet. Er hat dabei Kontakt zu anderen Mathematikern vermieden. Das hätte er wahrscheinlich nicht durchgehalten, wenn er nicht den tiefen Glauben gehabt hätte, dass sein Ansatz zum Erfolg führt. Wer mehr darüber wissen möchte sei auf das spannende Buch von „Simon Singh: Fermat's letzter Satz“ verwiesen.

Vor ein paar Jahren hat der russische Mathematiker Grigory Perelman eine genauso bedeutende Vermutung in der Topologie (einem Zweig der Geometrie) gelöst: die Poincaré Vermutung. Auch er scheint seine Arbeit in selbstgewählter Isoliertheit durchgeführt zu haben, und auch hier muss ein starker Glaube am Werk gewesen sein. Perelman hat Aufsehen erregt, weil er sich völlig von der „normalen“ Welt zurückgezogen und selbst seine kleine Stelle in Sankt Petersburg aufgegeben hat. Für den Beweis der Poincaré Vermutung hat die Clay Stiftung eine Million Dollar als Preis gestiftet, den Perelman bekommen würde, wenn er seine Arbeiten zur Poincaré Vermutung in einer wissenschaftlichen Zeitschrift publizieren würde. Das lehnt Perelman ab, er veröffentlichte seine Arbeiten lediglich im Internet. Er will das Preisgeld, mit dem er ohne Sorgen leben könnte, wahrscheinlich gar nicht haben. Angeblich hat er als Begründung gesagt, dass es eine Entwürdigung der Mathematik wäre, wenn er für eine der größten intellektuellen Leistungen eine Million Dollar erhalten würde, während gleichzeitig jemand, der ganz schnell im Kreis fährt, pro Jahr 100 Millionen Dollar erhält. Auch die ihm vor zwei Jahren verliehene Fields Medaille (der mathematische Nobelpreis) lehnte er ab. Vielleicht wird jetzt der eine oder andere sagen: Die spinnen, die Mathematiker ... Aber erstens sind wir nicht alle so, und zweitens lohnt es sich, über eine solche konsequente Haltung nachzudenken.

Professor Dr. Matthias Kreck, Jahrgang 1947, studierte Mathematik und Theologie in Bonn, Berlin und Regensburg. Zwischen 1976 und 2007 übernahm er neben zahlreichen Gastaufenthalten im Ausland Mathematik-Professuren in Wuppertal, Mainz und Heidelberg. Von 1994 bis 2002 war er zudem Direktor des Mathematischen Forschungsinstitutes in Oberwolfach. Seit 2007 leitet Professor Kreck das Hausdorff Research Institute for Mathematics an der Universität Bonn.



M. M. WARBURG & CO

1798

